

# Mathematikaufgaben

## > Algebra

## > Trigonometrische Gleichungen

**Aufgabe:** Bestimme die Lösungen der trigonometrischen Gleichung:

$$-\cos(2x) + 0,5 = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

**Lösung:** I. Allgemein sind einfache trigonometrische Gleichungen vom Typ:

$$\sin(bx) = r \text{ bzw. } \cos(bx) = r, \quad 0 \leq x \leq p$$

mit  $p = 2\pi/b$  als Periode der zugehörigen trigonometrischen Funktion  $y = \sin(x)$  bzw.  $y = \cos(x)$ ,  $b \neq 0$ . Lösbar sind die Gleichungen nur für  $-1 \leq r \leq 1$ , mit  $r = \pm 1$  haben die Gleichungen genau eine Lösung. Eine Lösung findet sich für  $\sin(bx) = r$  mit:

$$\sin(bx) = r \Rightarrow bx = \sin^{-1}(r) \Rightarrow x_1 = x = \sin^{-1}(r)/b \text{ für } 0 \leq r \leq 1 \text{ bzw.}$$

$$\sin(bx) = r \Rightarrow bx = \sin^{-1}(r) + 2\pi \Rightarrow x_1 = x = \sin^{-1}(r)/b + 2\pi/b \text{ für } -1 \leq r < 0,$$

die zweite Lösung als:

$$bx = \pi - \sin^{-1}(r) \Rightarrow x_2 = x = (\pi - \sin^{-1}(r))/b = \pi/b - x_1 \text{ für } 0 < r < 1 \text{ bzw.}$$

$$bx = \pi - \sin^{-1}(r) \Rightarrow x_2 = x = (\pi - \sin^{-1}(r))/b = 3\pi/b - x_1 \text{ für } -1 < r < 0.$$

Entsprechend gilt für die erste Lösung der Gleichung  $\cos(bx) = r$ :

$$\cos(bx) = r \Rightarrow bx = \cos^{-1}(r) \Rightarrow x_1 = x = \cos^{-1}(r)/b$$

und für die zweite Lösung:

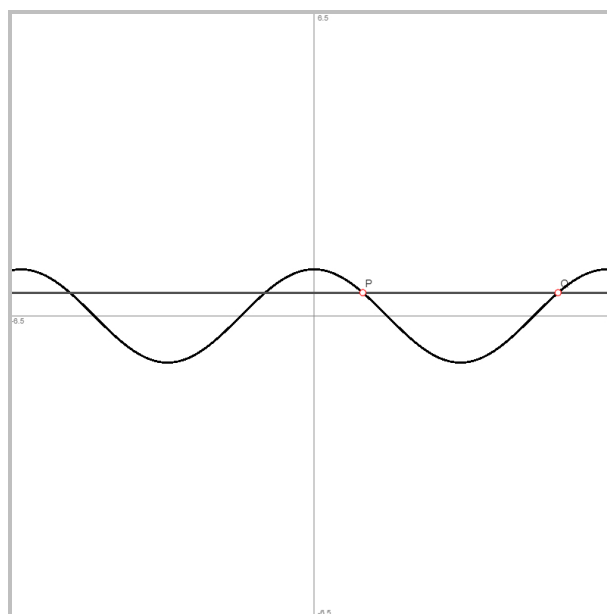
$$bx = 2\pi - \cos^{-1}(r) \Rightarrow x_2 = x = (2\pi - \cos^{-1}(r))/b = 2\pi/b - x_1.$$

II. Hinsichtlich der vorgegebenen Gleichung formen wir zunächst um:

$$-\cos(2x) + 0,5 = 0$$

$$| +\cos(2x)$$

$$0,5 = \cos(2x) \quad (*)$$



$y = \cos(x), y = 0,5$ : Schnittpunkte P, Q

Der obigen Zeichnung entnehmen wir, dass es zwei Lösungen der Gleichung (\*) gibt; die erste bestimmt sich als:

$$2x = \cos^{-1}(0,5) = \pi/3 \quad | :2$$

$$x_1 = x = \pi/6$$

die zweite als:

$$2x = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3 \quad | :2$$

$$x_2 = x = 5\pi/6.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung lautet damit:  $L = \{\pi/6; 5\pi/6\}$ .

www.michael-buhlmann.de / 06.2021 / Aufgabe 1446