

Mathematikaufgaben

> Algebra

> Quadratische Ungleichungen

Aufgabe: Löse die folgende quadratische Ungleichung:

$$x^2 + 4x - 5 < 0.$$

Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von quadratischen Ungleichungen z.B. mit der Variablen x, die folgende Vorgehensweise: Zur quadratischen Ungleichung

$$ax^2 + bx + c < | \leq | \geq | > 0 (*)$$

mit reellen Zahlen a, b, c, a≠0, ist zunächst die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 (**)$$

auszurechnen vermöge der Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (a-b-c-Formel).}$$

Um die Lösung einer quadratischen Gleichung der Form (**) zu erlangen, sind eventuell zuvor Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen; die a-b-c-Formel führt auf die 0 bis 2 Lösungen $x_1, x_2, x_1 \leq x_2$, der Gleichung. Es ergibt sich für die jeweiligen Lösungen der quadratischen Ungleichung (*):

*Zwei Lösungen der quadratischen Gleichung (**):* Im Fall $x_1 < x_2$ gilt die Übersicht A:

Lösungen	Zwei Lösungen der quadratischen Gleichung: $x_1 < x_2$			
	<	≤	≥	>
a>0	$x_1 < x < x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x \leq x_1, x \geq x_2$	$x < x_1, x > x_2$
a<0	$x < x_1, x > x_2$	$x \leq x_1, x \geq x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x_1 < x < x_2$

*Eine Lösung der quadratischen Gleichung (**):* Im Fall $x_1 = x_2$ gilt die Übersicht B:

Lösungen	Eine Lösung der quadratischen Gleichung: $x_1 = x_2$			
	<	≤	≥	>
a>0	(keine Lösung)	$x = x_1 (=x_2)$	$x \in \mathbf{R}$	$x \neq x_1 (=x_2)$
a<0	$x \neq x_1 (=x_2)$	$x \in \mathbf{R}$	$x = x_1 (=x_2)$	(keine Lösung)

*Keine Lösung der quadratischen Gleichung (**):* Im Fall, dass keine Lösung vorhanden ist, gilt die Übersicht C:

Lösungen	Keine Lösung der quadratischen Gleichung			
	<	≤	≥	>
a>0	(keine Lösung)	(keine Lösung)	$x \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{R}$
a<0	$x \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{R}$	(keine Lösung)	(keine Lösung)

II. Wir gehen bei der Lösung der zur quadratischen Ungleichung

$$x^2 + 4x - 5 < 0.$$

gehörenden quadratischen Gleichung unter Verwendung der a-b-c-Formel wie folgt vor:

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\text{(a-b-c-Formel: } a = 1, b = 4, c = -5)$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$
$$x_1 = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$
$$x_2 = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

-> Lösungsmenge $L = \{-5; 1\}$

Damit ist die quadratische Gleichung gelöst; Lösungen sind: $x_1 = -5$; $x_2 = 1$.

III. Die zur quadratischen Ungleichung gehörende quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = -5$, $x_2 = 1$. Daher ergeben sich wegen $a = 1 > 0$ aufgrund des "<"-Zeichens in der Ungleichung als Lösungen der Ungleichung gemäß der Übersicht A:

$$-5 < x < 1.$$

Damit ist die quadratische Ungleichung gelöst.