Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Quadratische Ungleichungen

Aufgabe: Löse die folgende quadratische Ungleichung:

$$-x^2 - 2x + 3 > 0.$$

Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von quadratischen Ungleichungen z.B. mit der Variablen x, die folgende Vorgehensweise: Zur quadratischen Ungleichung

$$ax^2 + bx + c < \mid \leq \mid \geq \mid > 0 \ (*)$$

mit reellen Zahlen a, b, c, a≠0, ist zunächst die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (**)$$

auszurechnen vermöge der Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (a-b-c-Formel).}$$

Um die Lösung einer quadratischen Gleichung der Form (**) zu erlangen, sind eventuell zuvor Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen; die a-b-c-Formel führt auf die 0 bis 2 Lösungen x_1, x_2, $x_1 \leq x_2$, der Gleichung. Es ergibt sich für die jeweiligen Lösungen der quadratischen Ungleichung (*):

Zwei Lösungen der quadratischen Gleichung (**): Im Fall $x_1<x_2$ gilt die Übersicht A:

Lösungen	*Zwei Lösungen* der quadratischen Gleichung: $x_1<x_2$			
	<	**≤**	**≥**	**>**
a>0	$x_1<x<x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x \leq x_1$, $x \geq x_2$	$x<x_1$, $x>x_2$
a<0	$x<x_1$, $x>x_2$	$x \leq x_1$, $x \geq x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x_1<x<x_2$

Eine Lösung der quadratischen Gleichung (**): Im Fall $x_1=x_2$ gilt die Übersicht B:

Lösungen	*Eine Lösung* der quadratischen Gleichung: $x_1=x_2$			
	<	**≤**	**≥**	**>**
a>0	(keine Lösung)	$x=x_1$ $(=x_2)$	$x \in \mathbf{R}$	$x \neq x_1$ $(=x_2)$
a<0	$x \neq x_1$ $(=x_2)$	$x \in \mathbf{R}$	$x=x_1$ $(=x_2)$	(keine Lösung)

Keine Lösung der quadratischen Gleichung (**): Im Fall, dass keine Lösung vorhanden ist, gilt die Übersicht C:

Lösungen	*Keine Lösung* der quadratischen Gleichung			
	<	**≤**	**≥**	**>**
a>0	(keine Lösung)	(keine Lösung)	$x \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{R}$
a<0	$x \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{R}$	(keine Lösung)	(keine Lösung)

II. Wir gehen bei der Lösung der zur quadratischen Ungleichung

$$-x^2 - 2x + 3 > 0.$$

gehörenden quadratischen Gleichung unter Verwendung der a-b-c-Formel wie folgt vor:

$-x^2 - 2x + 3 = 0$ (a-b-c-Formel: a = -1, b = -2, c = 3)

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$x_2 = \frac{2-4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

-> Lösungsmenge L = {-3;1}

Damit ist die quadratische Gleichung gelöst; Lösungen sind: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$.

III. Die zur quadratischen Ungleichung gehörende quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Daher ergeben sich wegen a = -1 < 0 aufgrund des ">"-Zeichens in der Ungleichung als Lösungen der Ungleichung gemäß der Übersicht A:

$1 < x < -3$.

Damit ist die quadratische Ungleichung gelöst.

IV. Der quadratische Term auf der linken Seite der Ungleichung (*) lässt sich noch mit einer Parabel p: $y = -x^2 - 2x + 3$ identifizieren. Nullstellen der Parabel p sind Lösungen der quadratischen Gleichung (**), die x, für die gilt: $y < \ | \ \leq \ | \ \geq \ | \ > 0$, Lösungen der Ungleichung (*). Der Graph der Parabel $y = -x^2 - 2x + 3$ ergibt zusammen mit den (verschiedenfarbigen) Bereichen von Positivität und Negativität der Funktionswerte der Parabel: