Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Vektoren

Aufgabe: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$ sowie der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}$.

a) Untersuche die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ auf lineare Abhängig- oder Unabhängigkeit.

b) Stelle, falls möglich, den Vektor $\vec{b}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ dar.

Lösung: a) I. Vektoren eines Vektorraums $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, … $\vec{a}_n$ heißen <u>linear unabhängig</u>, wenn die auf den Nullvektor $\vec{o}$ führende Linearkombination dieser Vektoren, wenn also für reelle α_i, i=1, …n, das lineare Gleichungssystem (*)

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{o} \quad (*)$$

nur die (triviale) Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = … = \alpha_n = 0$ besitzt. Gibt es darüber hinaus α_i mit $\alpha_i \neq 0$ als Lösung des linearen Gleichungssystems (*), so sind die Vektoren <u>linear abhängig</u>, d.h. es gibt Vektoren $\vec{a}_i$ aus {$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, … $\vec{a}_n$}, die sich als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lassen, also: $\vec{a}_i = \beta_1 \vec{a}_1 + ... + \beta_{i-1} \vec{a}_{i-1} + \beta_{i+1} \vec{a}_{i+1} + ... + \beta_n \vec{a}_n$ mit einigen $\beta_i \neq 0$.
Das lineare Gleichungssystem (*) ist ein homogenes Gleichungssystem, d.h. es besitzt immer und mindestens eine Lösung, nämlich die, die aus lauter Nullen besteht. Sind diese Nullen die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems (*), so sind die Vektoren linear unabhängig, gibt es darüber hinaus mehr Lösungen, so sind die Vektoren linear abhängig. Feststellbar ist Lösungsmenge eines Gleichungssystems (*) mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & 0 \\ ... & & & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & 0 \end{array}\right) \quad (**)$$

Erzeugt man mit Letzterem unter der Voraussetzung einer gleichen Zeilen- und Spaltenzahl der Koeffizientenmatrix im zu (**) gehörenden Endtableau eine Matrix ohne Nullzeile, so liegt lineare Unabhängigkeit vor, andernfalls lineare Abhängigkeit.

II. Wir untersuchen die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$ auf lineare Abhängig- oder Unabhängigkeit und bringen mit den Koeffizienten α_1, α_2, α_3 als Unbekannte die Vektoren in ein homogenes lineares Gleichungssystem unter gemäß:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{o} \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ 1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 = 0$
$+ 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$
$+ 1\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0$

<u>Anfangstableau</u>:

1 1 1 | 0
1 2 3 | 0
1 4 9 | 0

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*) /

1 1 1 | 0
0 1 2 | 0
0 3 8 | 0

<u>2. Schritt</u>: 1*(*3*) - 3*(*2*) /

1 1 1 | 0
0 1 2 | 0
0 0 2 | 0

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+ 1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 = 0$
$+ 1\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$
$+ 2\alpha_3 = 0$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:
$\alpha_3 = 0$
$\alpha_2 = 0$
$\alpha_1 = 0$

Da $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gilt, sind die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ <u>linear unabhängig</u>.

b) I. Für Vektoren eines Vektorraums $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, … $\vec{a}_n$ heißt der Vektor $\vec{b}$ mit:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \vec{a}_n \quad (***)$$

mit reellen α_i, i=1, …n, eine <u>Linearkombination</u> der Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, … $\vec{a}_n$. Ist der Vektor $\vec{b}$ gegeben, so können unter der Voraussetzung der eindeutigen Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems (***), die Koeffizienten α_i mit Hilfe des Gauß-Algorithmus ermittelt werden.

II. Wir berechnen die Linearkombination des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ aus den Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, indem wir das folgende lineare Gleichungssystem aufstellen und lösen:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{b} \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lllllll}
+ & 1\alpha_1 & + & 1\alpha_2 & + & 1\alpha_3 & = 1 \\
+ & 1\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & 3\alpha_3 & = 5 \\
+ & 1\alpha_1 & + & 4\alpha_2 & + & 9\alpha_3 & = 4
\end{array}
$$

Anfangstableau:

1 1 1 | 1
1 2 3 | 5
1 4 9 | 4

1. Schritt: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*) /

1 1 1 | 1
0 1 2 | 4
0 3 8 | 3

2. Schritt: 1*(*3*) - 3*(*2*) /

1 1 1 | 1
0 1 2 | 4
0 0 2 | -9

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{array}{lllllll}
+ & 1\alpha_1 & + & 1\alpha_2 & + & 1\alpha_3 & = 1 \\
 & & + & 1\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = 4 \\
 & & & & + & 2\alpha_3 & = -9
\end{array}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$\alpha_3 = -4.5$
$\alpha_2 = 13$
$\alpha_1 = -7.5$

Die Umformungen sind dabei ähnlich zu denen in Aufgabe a), da nur die rechte Seite im linearen Gleichungssystem verändert wurde. Wir haben damit den Vektor $\vec{b}$ als Linearkombination:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -7,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 4,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1220