Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Vektorräume

Aufgabe: Zeige: Die Menge U mit U = $\{f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \mid a,b,c,d,e\varepsilon\mathbf{R}, f(20)=0\} \subset P_4(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ (als Vektorraum der Polynome vom Grad maximal 4) ist mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen **R**.

Lösung: I. Ein Tripel (V, +, ·) aus Menge und Verknüpfungen heißt K-Vektorraum über dem Körper (K, +, ·), wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

A) (V, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
a) V ist eine Menge von Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... εV.
b) +: V × V -> V ist die Verknüpfung „Addition" von Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$εV mit: +: ($\vec{a}$, $\vec{b}$) -> $\vec{a}+\vec{b}$εV.
c) Die Verknüpfung + ist assoziativ: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ für alle $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$εV.
d) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element $\vec{0}$εV mit: $\vec{0}+\vec{a} = \vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$εV.
e) Für alle $\vec{a}$εV gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element $-\vec{a}$εV mit: $\vec{a}+(-\vec{a}) = (-\vec{a})+\vec{a} = \vec{0}$ mit neutralem Element $\vec{0}$.
f) Die Verknüpfung + ist kommutativ: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ für alle $\vec{a}$, $\vec{b}$εV.

B) (V, ·) erfüllt:
g) ·: K × V -> V ist die Verknüpfung „skalare Multiplikation" für kεK, $\vec{a}$εV mit: ·: (k, $\vec{a}$) -> k$\vec{a}$εV.
h) Die Verknüpfung · ist assoziativ: $(kl)\cdot\vec{a} = k(l\vec{a})$ für alle k, lεK, $\vec{a}$εV.
i) Mit dem neutralen Element 1εK gilt: $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$εV.

C) Es gelten die Distributivgesetze:
j) $(k+l)\cdot\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ für alle k,l εK, $\vec{a}$εV.
k) $k\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ für alle kεK, $\vec{a}$, $\vec{b}$εV.

D) Für den Körper (K, +, ·) gilt: (K, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
l) K ist eine Menge mit Elementen k, l, m, ... εK.
m) + ist die Verknüpfung „Addition" von Elementen k, l εK mit: +: (k, l) -> k+l εK.
n) Die Verknüpfung + ist assoziativ: (k+l)+m = k+(l+m) für alle k, l, mεK.
o) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 0εK mit: 0+k = k+0 = k für alle kεK.
p) Für alle kεK gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element -kεK mit: k+(-k) = (-k)+k = 0 mit neutralem Element 0.
q) Die Verknüpfung + ist kommutativ: k+l = k+l für alle k, lεK.
K\{0}, ·) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
r) · ist die Verknüpfung „Multiplikation" von Elementen k, lεK mit: ·: (k, l) -> k·lεK.
s) Die Verknüpfung · ist assoziativ: (k·l)·m = k·(l·m) für alle k, l, mεK.
t) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 1εK mit: 1 ≠ 0 und: 1·k = k·1 = k für alle kεK.
u) Für alle kεK mit k≠0 gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element k-1εK mit: k·k-1 = k-1·k = 1 mit neutralem Element 1.
v) Die Verknüpfung · ist kommutativ: k*l = l*k für alle k, lεK. Es gelten die Distributivgesetze:
w) k·(l+m) = k·l + k·m für alle k, l, mεK.
x) (k+l)·m = k·m + l·m für alle k, l, mεK.

Eine Teilmenge U des K-Vektorraums V ist ein K-Unter(vektor)raum von V, wenn U⊂V gilt und U die Eigenschaften eines K-Vektorraums besitzt. In dem Fall folgen die Eigenschaften eines Vektorraums aus der Tatsache, dass (durch + und · in V auf U induzierte) Linearkombinationen von Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$εU mit k, lεK ebenfalls einen Vektor $k\vec{a}+l\vec{b}$εU ergeben.

Reelle Vektorräume sind Vektorräume über dem Körper der reellen Zahlen **R**.

Vektoren $a_1^{->}$, … $a_n^{->}$ in einem K-Vektorraum V heißen linear unabhängig, wenn die Linearkombination $k_1a_1^{->}$ + … $k_na_n^{->}$ = $0^{->}$, k_1, … k_n εK, nur auf k_1 = … = k_n = 0 führt. Für einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum V heißt eine Menge B = {$a_1^{->}$, … $a_n^{->}$}, nε**N**, eine Basis, wenn die Basisvektoren linear unabhängig sind und den Vektorraum V erzeugen, d.h. für jeden Vektor $a^{->}$εV gilt (in eindeutiger Weise): $a^{->}$ = $k_1a_1^{->}$ + … $k_na_n^{->}$, k_1, … k_n εK. Der Vektorraum V ist das Erzeugnis von B: V = <B> und besitzt die Dimension: dim(V) = n.

II. Mit **R** als reellen Zahlen bezeichnet C(**R**, **R**) die Menge der stetigen Funktionen f: **R** -> **R**, C^k(**R**, **R**) die Menge der k-mal differenzierbaren Funktionen f: **R** -> **R**, kε**N**. Die Funktionenmengen sind reelle Vektorräume bzgl. der Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen gemäß:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (kf)(x) = k\cdot f(x) \text{ für alle } x\varepsilon\mathbf{R},\ k\varepsilon\mathbf{R}.$$

Alle Polynome (ganz rationale Funktionen) gehören den stetigen und beliebig oft differenzierbaren Funktion f: **R** -> **R** an und bilden als P(**R**, **R**) ebenfalls ein reellen Vektorraum. Dasselbe gilt für die Menge aller Polynome vom Grad maximal n, für P_n(**R**, **R**).

III. Wir brauchen für zwei Funktionen u(x), v(x)εU = {f(x)=$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ | a,b,c,d,eε**R**, f(20)=0} und reelle r, s nur nachzuweisen, dass die Funktion w(x) = (ru+sv)(x) an der Stelle x = 20 eine Nullstelle besitzt. Alles andere ergibt sich aus dem (Unter-) Vektorraum P_4(**R**, **R**), so dass w(x) ebenfalls ein Polynom vom Grad maximal 4 ist. Nun gilt aber mit $u(x) = a_ux^4+b_ux^3+c_ux^2+d_ux+e_u$ und $v(x) = a_vx^4+b_vx^3+c_vx^2+d_vx+e_v$:

$w(x) = (ru+sv)(x) = (ra_u+sa_v)x^4 + (rb_u+sb_v)x^3 + (rc_u+sc_v)x^2 + (rd_u+sd_v)x + (re_u+se_v) =$
$ra_ux^4+rb_ux^3+rc_ux^2+rd_ux+re_u + sa_vx^4+sb_vx^3+sc_vx^2+sd_vx+se_v =$
$r(a_ux^4+b_ux^3+c_ux^2+d_ux+e_u) + s\,(a_vx^4+b_vx^3+c_vx^2+d_vx+e_v) = r\cdot u(x) + s\cdot v(x)$,

so dass

$w(20) = r\cdot u(20) + s\cdot v(20) = r\cdot 0 + s\cdot 0 = 0$

folgt, d.h.: w(x)εU = {f(x)=$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ | a,b,c,d,eε**R**, f(20)=0}. Damit ist U ein Unterraum von P_4(**R**, **R**) und ein reeller Vektorraum.

IV. Die Dimension des Vektorraums U ist übrigens dim(U) = 4, denn für eine Funktion f(x)εU gilt:

$f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $f(20) = 0 \Rightarrow 20^4a+20^3b+20^2c+20d+e = 0 \Rightarrow e = -20^4a–20^3b–20^2c–20d$

und somit:

$f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx–20^4a–20^3b–20^2c–20d = a(x^4–20^4)+b(x^3–20^3)+c(x^2–20^2)+d(x–20)$,

d.h.: jede Funktion f(x)εU ist eine Linearkombination der vier Funktionen:

$y_i = x^i–20^i$, i = 1, 2, 3, 4,

die eine Basis B = {$x–20$, $x^2–20^2$, $x^3–20^3$, $x^4–20^4$} des Vektorraums U bilden.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1239