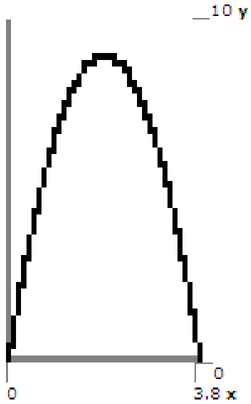
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Volumenintegral

Aufgabe: Ein Diskus entsteht durch Rotation des nichtnegativen Teils der Funktion

$$f(x) = -\frac{5}{2}x\left(x-\frac{19}{5}\right)$$

um die x-Achse.



a) Wie groß sind Durchmesser und Dicke des Diskus, wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers/Diskus? Wie groß ist die Dichte des Diskus, wenn der Diskus 1 kg wiegt?

b) Nun wird beim Diskus der äußere Rand jenseits eines Radius von $\frac{65}{8}$ durch Stahl der Dichte ρ_{Stahl} = 7,86 $\frac{g}{cm^3}$ ersetzt. Wie schwer ist jetzt der Diskus, wie viel Prozent macht der äußere Stahlrand vom Gewicht des Diskus aus?

Lösung: a) I. Wir schreiben die Funktion als: $f(x) = -\frac{5}{2}x\left(x-\frac{19}{5}\right) = -2{,}5x^2 + 9{,}5x$ und erkennen, dass eine nach unten geöffnete Parabel vorliegt. Dann ergibt sich der Hochpunkt der Parabel vermöge: $f'(x) = -5x + 9{,}5 = 0$ ⇔ 5x = 9,5 ⇔ x = 1,9 mit: $f''(x) = f''(1{,}9) = -5 < 0$ und: $f(1{,}9) = 9{,}025$ = y_H. Der Durchmesser d des Diskus beträgt: d = $2y_H$ = 18,05. Die Dicke t des Diskus ist wegen: $f(x) = -\frac{5}{2}x\left(x-\frac{19}{5}\right) = 0$ ⇔ x = 0, $x-\frac{19}{5} = 0$ ⇔ a= x = 0, b= x = 3,8: t = b – a = 3,8.

II. Wir lassen f(x) um die x-Achse im Bereich [a; b] rotieren und erhalten als Volumen:

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \pi\int_0^{3,8}(-2{,}5x^2+9{,}5x)^2\,dx = \pi\int_0^{3,8}(6{,}25x^4 - 47{,}5x^3 + 90{,}25x^2)dx =$$

$$\pi\left[1{,}25x^5 - 11{,}875x^4 + 30{,}083x^3\right]_0^{3,8} = \pi(1{,}25\cdot 3{,}8^5 - 11{,}875\cdot 3{,}8^4 + 30{,}083\cdot 3{,}8^3) - 0 = 518{,}6\ \text{cm}^3$$

Mit m = 1 kg als Masse errechnet sich die Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ in g/cm³ dann als:

$$\rho = \frac{1kg}{518{,}6cm^3} = \frac{1000g}{518{,}6cm^3} = 1{,}93\frac{g}{cm^3}.$$

b) I. Wir bezeichnen die zur x-Achse parallele Gerade mit $g(x)=\frac{65}{8}$ und berechnen die Schnittstellen zwischen f(x) und g(x): $f(x)=g(x) \Leftrightarrow -2{,}5x^2+9{,}5x=8{,}125 \Leftrightarrow 2{,}5x^2-9{,}5x+8{,}125=0$ $\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{9{,}5\pm\sqrt{9{,}5^2-4\cdot 2{,}5\cdot 8{,}125}}{2\cdot 2{,}5}=\frac{9{,}5\pm 3}{5}$ ⇔ x_1 = 1,3, x_2 = 2,5.

II. Wir berechnen das Volumen des äußeren Randes im Bereich [x_1; x_2] durch Rotation der zwischen f(x) und g(x) liegenden Fläche um die x-Achse:

$$V_2=\pi\int_{x_1}^{x_2}\left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)dx=\pi\int_{1,3}^{2,5}\left((-2{,}5x^2+9{,}5x)^2-8{,}125^2\right)dx=$$

$$\pi\int_{1,3}^{2,5}(6{,}25x^4-47{,}5x^3+90{,}25x^2-66{,}015625)dx=\pi\left[1{,}25x^5-11{,}875x^4+30{,}083x^3-66{,}015625x\right]_{1,3}^{2,5}=$$

38,39 cm^3

III. Wir stellen die Formel für die Dichte $\rho=\frac{m}{V}$ nach der Masse um und erhalten: $m=\rho V$. Die Gesamtmasse des Diskus m ergibt sich nun aus der Summe der Massen m_1 und m_2, wobei m_1 den Diskus innerhalb des Radius $\frac{65}{8}$, m_2 den Diskus außerhalb betreffen soll. Wir erhalten für die entsprechenden Volumina V_1 und V_2: V_2 = 38,39 cm^3, V_1 = V – V_2 = 518,6 – 38,39 = 480,21 cm^3.
Die Masse m_1 ist dann: $m_1=\rho V_1=1{,}93\frac{g}{cm^3}\cdot 480{,}21cm^3=926{,}81g$, wobei wir die unter a) berechnete Dichte $\rho=1{,}93\frac{g}{cm^3}$ benutzen. Mit ρ_{Stahl} = 7,86 $\frac{g}{cm^3}$ ergibt sich bzgl. m_2: $m_2=\rho_{Stahl}V_2$ = $301{,}75g$. Die Gesamtmasse des Diskus m ist schließlich: m = 1228,56 g.
IV. Wir setzen die Masse des äußeren Stahlrandes m_2 ins Verhältnis zur Gesamtmasse m und erhalten: $\frac{301{,}75}{1228{,}56}=0{,}2456=24{,}56\%$ als Anteil des Stahlrandes am Gesamtgewicht des Diskus.

07.2014 / Aufgabe 12