**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Volumenintegral

---

**Aufgabe**: Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{40x}{x^2+16}.$$

a) Zeige, dass die Funktion f(x) genau zwei Extrempunkte besitzt.

b) Auf dem Intervall [0; 30] stellt die Funktion f(x) den Umriss einer Glasflasche dar. Wie groß ist das Volumen der Flasche, wenn f(x) um die x-Achse rotiert? (1 Längeneinheit = 1 Zentimeter).

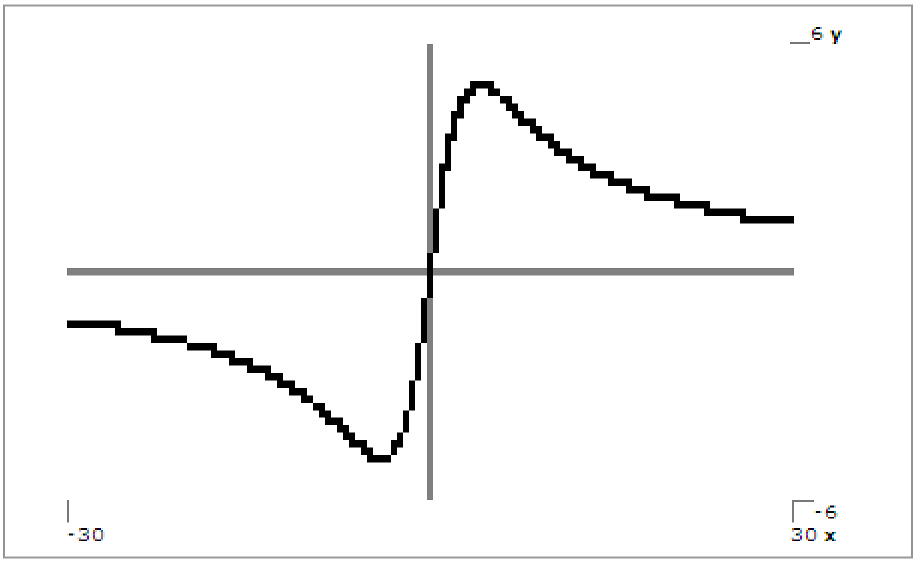
c) Die gefüllte und verkorkte Flasche soll eine zylinderförmige Pappverpackung erhalten, die zum Flaschenboden und zur Flaschenöffnung jeweils 0,5 Zentimeter, zum Flaschenmantel mindestens 1 Zentimeter Abstand hat. Der Hohlraum zwischen Flasche und Verpackung wird mit Holzwolle gefüllt. Welchen Rauminhalt hat dieser Hohlraum?

d) Aus werbetechnischen Gründen wird nun die Art der Verpackung geändert. Statt des Zylinders soll die Verpackung einem Kegel entsprechen derart, dass die Mantellinie des Kegels den Flaschenmantel berührt und die Kegelgrundfläche zum Flaschenboden einen Abstand von 0,5 Zentimetern hat. Wie groß sind Radius und Höhe des Kegels, wie groß dessen Öffnungswinkel, wie groß ist das Volumen der Verpackung?

**Lösung**: a) I. Wertetabelle, Graph:

$$f(x) = \frac{40x}{x^2+16}$$

| x | y = f(x) | f'(x) | f''(x) | Besondere Kurvenpunkte |
|---|---|---|---|---|
| -6.93 | -4.3296 | -0.31 | 0 | Wendepunkt W(-6.93\|-4.33) |
| -4 | -5 | 0 | 0.31 | Tiefpunkt T(-4\|-5) |
| 0 | 0 | 2.5 | 0 | Nullstelle N(0\|0) = Schnittpunkt $S_y$(0\|0) = Wendepunkt W(0\|0) |
| 4 | 5 | 0 | -0.31 | Hochpunkt H(4\|5) |
| 6.93 | 4.3296 | -0.31 | 0 | Wendepunkt W(6.93\|4.33) |



II. Extremwertbestimmung: Wir bilden nach der Quotientenregel die 1. Ableitung und erhalten mit $f(x) = \frac{40x}{x^2+16}$, u(x) = 40x, u'(x) = 40, v(x) = $x^2$+16, v'(x) = 2x:

$$f'(x) = \frac{40(x^2+16) - 40x \cdot 2x}{(x^2+16)^2} = \frac{40x^2+640-80x^2}{(x^2+16)^2} = \frac{640-40x^2}{(x^2+16)^2}.$$

Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$f'(x) = \frac{640-40x^2}{(x^2+16)^2} = 0$ (Zähler gleich 0 setzen)

640 – 40x$^2$ = 0 | +40x$^2$
640 = 40x$^2$ | :40
16 = x$^2$ | √
x = ±4

Den möglichen Extremstellen bei x = ±4 spüren wir durch Nachweis des Vorzeichenwechsels der 1. Ableitung nach; es gilt:

$$f'(-5) = \frac{640-40\cdot(-5)^2}{((-5)^2+16)^2} < 0$$

$$f'(0) = \frac{640-40\cdot 0^2}{(0^2+16)^2} > 0$$

$$f'(5) = \frac{640-40\cdot 5^2}{(5^2+16)^2} < 0,$$

so dass bei x = -4 ein Vorzeichenwechsel von – nach +, mithin ein Tiefpunkt, bei x = 4 ein Vorzeichenwechsel von + nach –, mithin ein Hochpunkt festzustellen ist. Insgesamt haben wir wegen f(4) = 5 und f(-4) = -5 (Punktsymmetrie der Funktion):

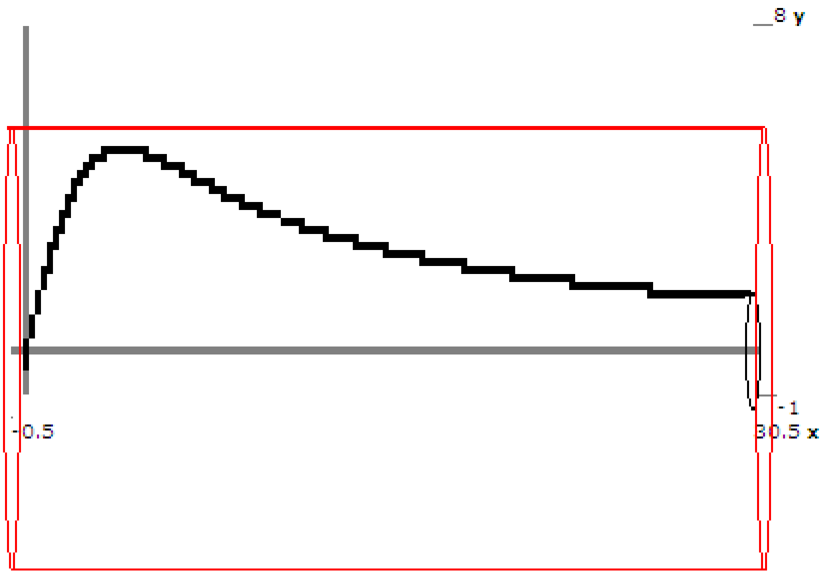
T(-4|-5) als Tiefpunkt
H(4|5) als Hochpunkt.

Andere Extremstellen der Funktion f(x) sind somit nicht vorhanden.

b) Das Volumen der Glasflasche berechnet sich als Rotationskörper über dem Intervall [0; 30]:

$$V = \pi \int_0^{30} \left( \frac{40x}{x^2+16} \right)^2 dx = 821{,}36$$

Der Rauminhalt beträgt also 821,36 cm$^3$.



c) Auf Grund des Hochpunkts H(4|5) der Funktion f(x) muss der Radius der zylindrischen Verpackung wegen $y_{max} = 5$ den Wert $r = y_{max} + 1 = 5 + 1 = 6$ cm haben. Die Höhe h des Zylinders ist $h = 30 + 2 \cdot 0{,}5 = 31$ cm. Das Volumen des Zylinders ergibt sich wegen $V_Z = \pi r^2 h$ als:

$V_Z = \pi \cdot 6^2 \cdot 31 = 3506{,}02\ cm^3$,

so dass das Volumen des Hohlraums $V_H$

$V_H = V_Z – V = 3506{,}02 – 821{,}36 = 2684{,}66\ cm^3$

beträgt.

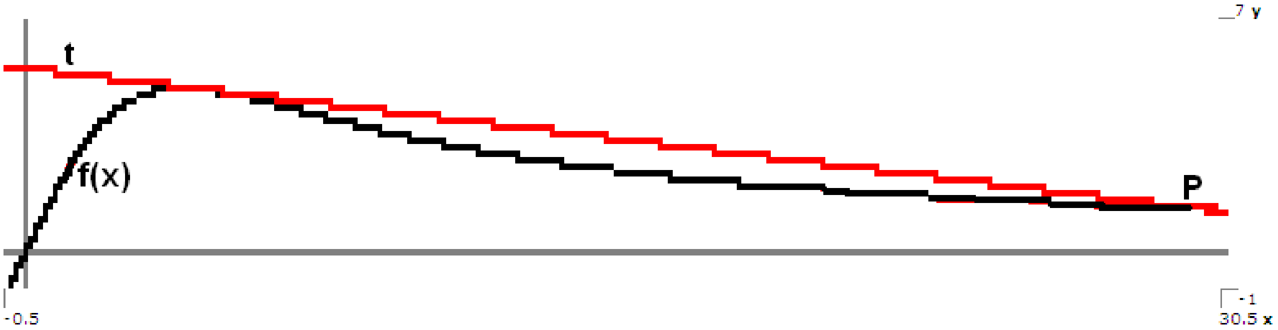
d) Zur Bestimmung der Maße der kegelförmigen Verpackung legen wir vom Punkt P(30|f(30)) eine Tangente t an die Funktion f(x) und bestimmen den Berührpunkt B(u|f(u)) vermöge:

t: $y = f'(u)(x–u) + f(u)$

und mit x = 30, y = f(30) = 1,31 vermöge der Gleichung:

$1{,}31 = f'(u)(30–u) + f(u)$ (*).

Als Lösungen der Gleichung (*) ergibt sich u.a.: u = 4,57.




Der Berührpunkt lautet dann: B(4,57|4,956) mit f(4,57) = 4,956. Die Tangente im Berührpunkt errechnet sich als:

t: $y = f'(4{,}57)(x–4{,}57) + f(4{,}57) = -0{,}144x + 5{,}612$.

Der Radius des Kegels $r_K$ errechnet sich dann als:

$r_K = y(-0{,}5) = 5{,}684$ cm,

die Höhe $h_K$ auf Grund von:

| | |
|---|---|
| $y = 0$ | (Tangente gleich 0 setzen) |
| $-0{,}144x + 5{,}612 = 0$ | $\mid +0{,}144x$ |
| $5{,}612 = 0{,}144x$ | $\mid :0{,}144$ |
| $x = 38{,}97$ | |

als:

$h_K = 38{,}97$ cm.

Das Kegelvolumen ergibt sich mit $V_K = \pi r_K^2 h_K/3$ als:

$V_K = \pi \cdot 5{,}684^2 \cdot 38{,}97/3 = 1318{,}46\ cm^3$.

Der Öffnungswinkel α an der Spitze des Kegels beträgt wegen des Betrags der Tangentensteigung $m_t = 0{,}144$ und wegen $\tan(\alpha/2) = m_t$:

$\alpha/2 = \tan^{-1}(0{,}144) \Rightarrow \alpha/2 = 8{,}19° \Rightarrow \alpha = 16{,}38°$.

www.michael-buhlmann.de / 02.2015 / Aufgabe 98