

Mathematikaufgaben

> Analysis

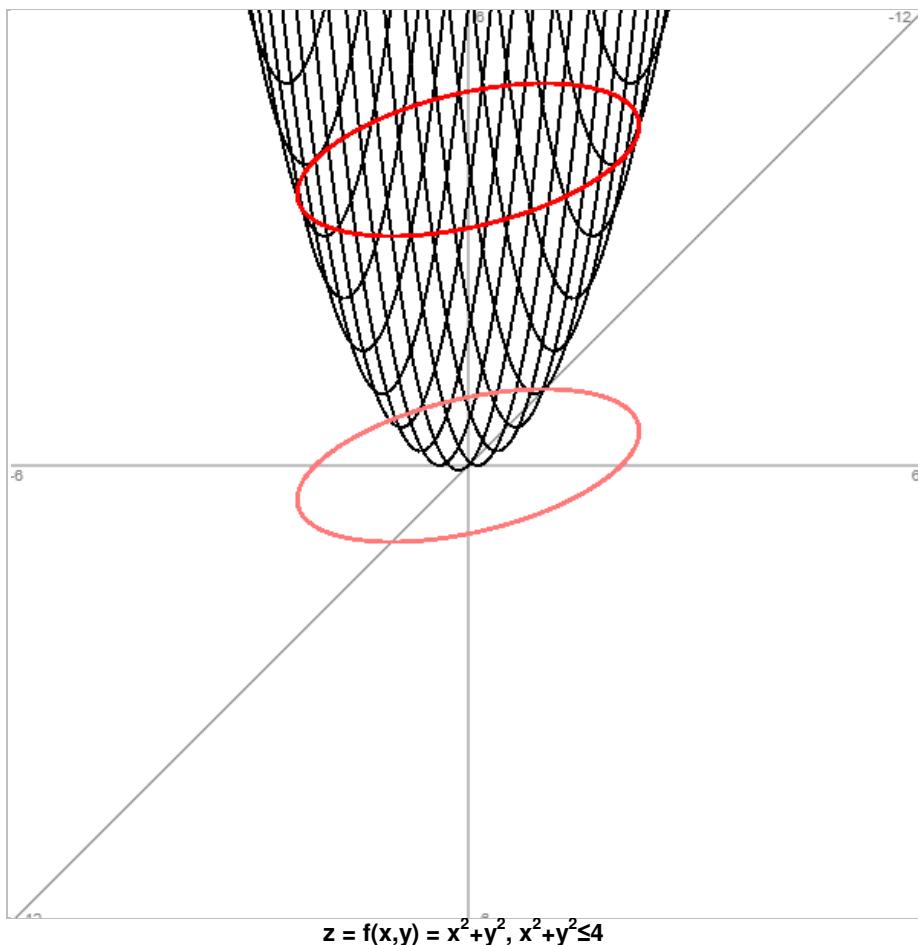
> Volumenintegrale

Aufgabe: Berechne das Volumen zwischen Paraboloid und Ebene

$$z_1 = f(x,y) = x^2 + y^2, z_2 = 4$$

im dreidimensionalen reellen Raum.

1. Lösung: I. Wir identifizieren die Funktion $z_1 = f(x,y) = x^2 + y^2$ mit zwei Unbekannten x, y als Paraboloid im dreidimensionalen reellen Raum über den Bereich $x^2 + y^2 \leq 4$:



Der (Integrations-) Bereich ergibt sich dabei wegen $z_1 = z_2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ als Kreis der x - y -Ebene mit Mittelpunkt $M(0|0)$ und Radius 2 und damit als: $x^2 + y^2 \leq 4$.

II. Wir verwenden im Folgenden die unbestimmten Integrale mit reellem a:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right)$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{8} \left(2x^3 \sqrt{a^2 - x^2} - a^2 x \sqrt{a^2 - x^2} + a^4 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right).$$

III. Das Volumenintegral ergibt sich gemäß dem Bereich $x^2+y^2 \leq 4$ durch dreifache Integration entlang $x^2+y^2 \leq z \leq 4$, $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$ als:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 dz dy dx = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [z]_{x^2+y^2}^4 dy dx = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - (x^2 + y^2)) dy dx \\
 &\stackrel{z\text{-Achsen symmetrisch}}{=} 4 \cdot \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - (x^2 + y^2)) dy dx = 4 \cdot \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - y^2) dy dx \\
 &= 4 \cdot \int_0^2 \left[4y - x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = 4 \cdot \int_0^2 (4\sqrt{4-x^2} - x^2 \sqrt{4-x^2} - \frac{1}{3} \sqrt{(4-x^2)^3} - 0) dx \\
 &= 4 \cdot \int_0^2 (4\sqrt{4-x^2} - x^2 \sqrt{4-x^2} - \frac{1}{3} \sqrt{(4-x^2)^3}) dx = 4 \cdot \int_0^2 (4\sqrt{4-x^2} - x^2 \sqrt{4-x^2} - \frac{1}{3} (4-x^2) \sqrt{4-x^2}) dx \\
 &= 4 \cdot \int_0^2 \left(\frac{8}{3} \sqrt{4-x^2} - \frac{2}{3} x^2 \sqrt{4-x^2} \right) dx = \frac{32}{3} \cdot \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx - \frac{8}{3} \cdot \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx \\
 &= \frac{32}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} \left(x \sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \right) \right]_0^2 - \frac{8}{3} \cdot \left[\frac{1}{8} \left(2x^3 \sqrt{a^2-x^2} - a^2 x \sqrt{a^2-x^2} + a^4 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right) \right]_0^2 \\
 &= \frac{16}{3} \cdot \left((0 + 4 \cdot \frac{\pi}{2}) - 0 \right) - \frac{1}{3} \cdot \left(((0 + 16 \cdot \frac{\pi}{2}) - 0 \right) = \frac{32}{3} \pi - \frac{8}{3} \pi = 8\pi.
 \end{aligned}$$

2. Lösung: I. Der (Integrations-) Bereich ergibt sich dabei wegen $z_1 = z_2 \Rightarrow x^2+y^2 = 4$ als Kreis der x-y-Ebene mit Mittelpunkt M(0|0) und Radius 2 und damit als: $x^2+y^2 \leq 4$. Folglich führt die Transformation von kartesischen in Zylinderkoordinaten auf:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z_1 = (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2$$

$$z_2 = 4$$

für $0 \leq r \leq 2$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

II. Das Volumenintegral ergibt sich gemäß dem Bereich $x^2+y^2 \leq 4$ durch dreifache Integration entlang $x^2+y^2 \leq z \leq 4$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ als:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^4 dz d\varphi r dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - r^2) d\varphi r dr = \int_0^2 (4r - r^3) \int_0^{2\pi} d\varphi r dr = \int_0^2 (4r - r^3) [\varphi]_0^{2\pi} dr \\
 &= \int_0^2 (4r - r^3) (2\pi - 0) dr = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) dr = 2\pi \cdot \left[2r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^2 = 2\pi \cdot (8 - 4 - 0) = 8\pi.
 \end{aligned}$$

3. Lösung: Das zur z-Achse symmetrische Paraboloid $z_1 = f(x,y) = x^2+y^2$ stellt einen Rotationskörper dar, dessen Volumen auch mit Hilfe der eindimensionalen Analysis berechnet werden kann. Es rotiere dazu die Funktion: $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, um die x-Achse. Das Volumenintegral berechnet sich als:

$$V = \pi \int_0^4 y^2 dx = \pi \int_0^4 \sqrt{x}^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 - 0 \right) = 8\pi.$$