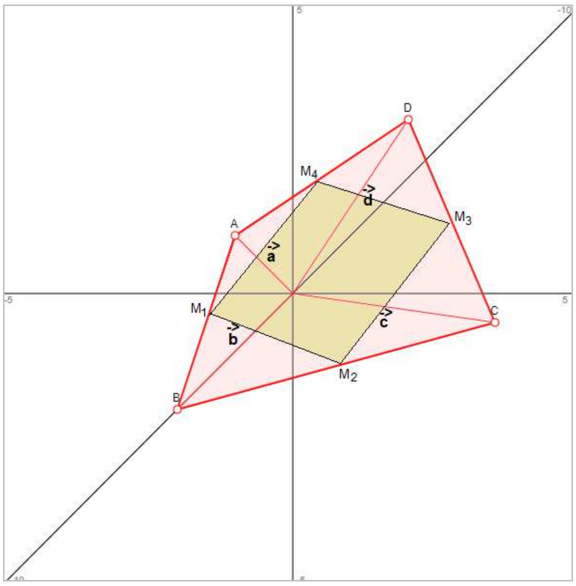
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Beweis

Aufgabe: Zeige: In einem beliebigen Viereck ABCD bilden ist Mittelpunkte der Viereckseiten ein Parallelogramm.



Lösung: Die Ortsvektoren zu den Ecken des Vierecks ABCD heißen: $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$, $\vec{d} = \vec{OD}$. Die Ortsvektoren der Mitten der Viereckseiten M_1, M_2, M_3, M_4 errechnen sich dann als:

$$\vec{OM_1} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{OM_2} = \frac{1}{2}\left(\vec{OB} + \vec{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{OM_3} = \frac{1}{2}\left(\vec{OC} + \vec{OD}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d}\right) = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\vec{OM_4} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OD}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{d}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}.$$

Damit beim Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein Parallelogramm vorliegt, muss z.B. gelten:

$$\vec{M_1M_4} = \vec{M_2M_3}.$$

Nun ist in der Tat:

$$\vec{M_1M_4} = \vec{OM_4} - \vec{OM_1} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{M_2M_3} = \vec{OM_3} - \vec{OM_2} = \left(\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b},$$

woraus die Parallelogrammeigenschaft des Mittelpunktvierecks $M_1M_2M_3M_4$ folgt, was zu beweisen war.

www.michael-buhlmann.de / 09.2020 / Aufgabe 1107