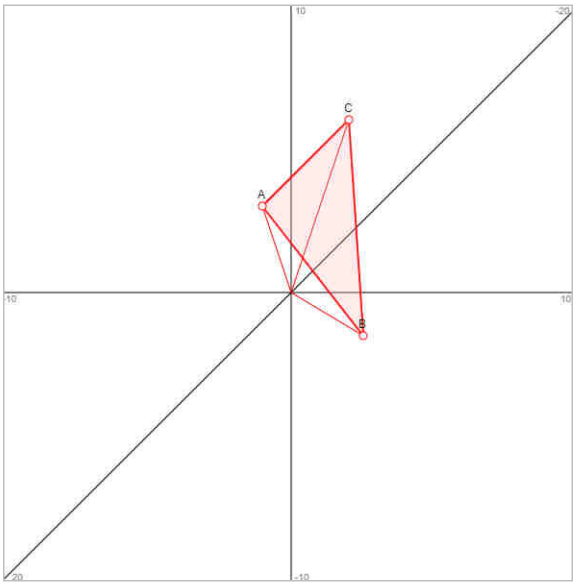
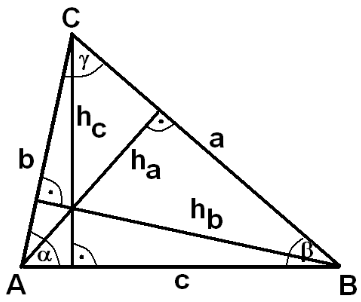
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Dreieck

Aufgabe: Die Punkte A(2|0|4), B(3|4|0) und C(0|2|6) sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Berechne die Seitenlängen und die Innenwinkel sowie Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.



Lösung: I. Es gilt die folgende Übersicht zur Berechnung von Dreiecken:

Dreieck ABC in der Ebene: E: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF), Seiten als Differenzvektoren: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, Winkel an den Ecken A, B, C: α, β, γ.	
$\overrightarrow{AB} \neq k\,\overrightarrow{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\overrightarrow{AB} \neq k\,\overrightarrow{BC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\overrightarrow{BC} \neq k\,\overrightarrow{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck	
Seiten: $c = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert$, $b = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert$, $a = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$, Umfang: $u = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert + \lvert\overrightarrow{AC}\rvert + \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$	
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel α) $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel β) $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel γ)	
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ => Dreieck gleichseitig (α = β = γ = 60°)	
Winkel: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}$, $\cos\beta = -\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}$, $\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}$	Winkelsumme: α + β + γ = 180°
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
Satz des Pythagoras: $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2 + \lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert^2$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2 + \lvert\overrightarrow{BC}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2 + \lvert\overrightarrow{BC}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
Höhen: $h_a = d(A, g_{BC})$, $h_b = d(B, g_{AC})$, $h_c = d(C, g_{AC})$ bzw. $h_a = \frac{\lvert\overrightarrow{AB}\cdot\times\overrightarrow{AC}\rvert}{\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}$, $h_b = \frac{\lvert\overrightarrow{AB}\cdot\times\overrightarrow{BC}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}$, $h_c = \frac{\lvert\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}$ usw.	
Fläche: $A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ bzw. $A = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot d(A, g_{BC})}{2} = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot d(B, g_{AC})}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot d(C, g_{AB})}{2}$ bzw. $A = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\rvert = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\rvert = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}\rvert$	

Dreieck

Für die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks ΔABC kann das Kreuzprodukt (Vektorprodukt, äußeres Produkt) verwendet werden:

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

II. Wir bilden aus den Ecken des Dreiecks ΔABC die <u>Differenzvektoren</u> $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ und haben:

Punkt: $A(a_1 \mid a_2 \mid a_3)$	A(2 | 0 | 4)
Punkt: $B(b_1 \mid b_2 \mid b_3)$	B(3 | 4 | 0)
Punkt: $C(c_1 \mid c_2 \mid c_3)$	C(0 | 2 | 6)
Differenzvektor: $AB^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $AC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $BC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$
Seite: $a = \lvert BC^{->} \rvert$ =	7 LE
Seite: $b = \lvert AC^{->} \rvert$ =	3.464 LE
Seite: $c = \lvert AB^{->} \rvert$ =	5.745 LE
Bemerkung:	Dreieck ist beliebig.
Umfang: u =	16.209 LE
	$u = a + b + c$
Winkel: α =	95.768°
Winkel: β =	29.496°
Winkel: γ =	54.736°
Bemerkung:	Dreieck ist stumpfwinklig.
Winkelsumme =	180°
	$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Normalenvektor: $n^{->} = AB^{->} \times AC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$
Flächeninhalt/ΔABC: A_Δ =	9.899 FE
	$A_\Delta = \lvert AB^{->} \times AC^{->} \rvert / 2$

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1656