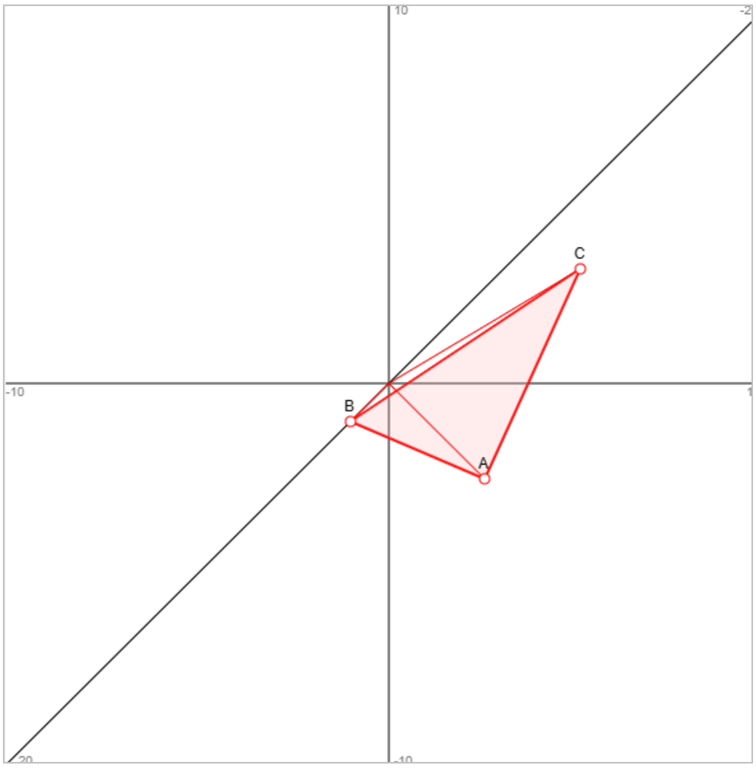
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Dreieck

Aufgabe: A(1|3|-2), B(4|1|1), C(4|7|5) sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Zeige, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig ist. Berechne seinen Umfang und seinen Flächeninhalt.



1. Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras, d.h. dass für die Seitenlängen des Dreiecks mit den Katheten p und q sowie der Hypotenuse r die Beziehung:

$$p^2 + q^2 = r^2$$

wahr ist. Die Hypotenuse ist die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck, also: p < r, q < r.

II. Der Betrag oder die Länge eines Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ errechnet sich mit:

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2} \; .$$

III. Aus den Eckpunkten A(1|3|-2), B(4|1|1), C(4|7|5) bilden wir die Differenzvektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \; \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und berechnen deren Beträge:

$$\left|\vec{AB}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{22} \; , \; \left|\vec{AC}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{74} \; ,$$

$$\left|\vec{BC}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{52} \; .$$

Wir bilden aus den so errechneten Seitenlängen des Dreiecks die Beziehung:

$\sqrt{22}^2 + \sqrt{52}^2 = \sqrt{74}^2$
22 + 52 = 74
74 = 74
und haben damit die Gültigkeit des Satzes des Pythagoras im Dreieck ΔABC nachgewiesen. Das Dreieck ΔABC ist somit rechtwinklig, seine Hypotenuse ist die Seite $\vec{AC}$, der rechte Winkel ist der Winkel β an der Ecke B.

IV. Der Umfang des Dreiecks ΔABC ist:

u = $\left|\vec{AB}\right| + \left|\vec{AC}\right| + \left|\vec{BC}\right| = \sqrt{22} + \sqrt{52} + \sqrt{74} =$ 20,504 LE.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC folgt mit Hilfe der Katheten $\vec{AB}$, $\vec{BC}$:

A = $\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{BC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{22} \cdot \sqrt{52} =$ 16,912 FE.

2. Lösung: I. Das Skalarprodukt ist ein Produkt von zwei Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ mit:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \; .$$

Stehen die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ senkrecht (orthogonal, im rechten Winkel) aufeinander, so verschwindet das Sklararprodukt (wird Null):

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 .$$

II. Der Betrag oder die Länge eines Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ errechnet sich mit:

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2} \ .$$

III. Es sind zur Feststellung der Rechtwinkligkeit im Dreieck ΔABC bis zu drei Skalarprodukte zu überprüfen. Zunächst bilden wir aber aus den Ecken des Dreiecks ΔABC die Differenzvektoren $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ und haben:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wir errechnen nun die (maximal) drei Skalarprodukte:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 22$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 0$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 4 = 52 .$$

Der rechte Winkel ist im Dreieck ΔABC also an der Ecke B zu finden und heiße daher β. Das Dreieck ΔABC ist somit rechtwinklig.

IV. Hinsichtlich der Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC sind die Beträge oder Längen der Differenzvektoren zu berechnen. Es gilt:

$$\left|\vec{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{22} \ , \ \left|\vec{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{74} \ ,$$

$$\left|\vec{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{52} \ .$$

Der Umfang des Dreiecks ΔABC ist:

u = $\left|\vec{AB}\right| + \left|\vec{AC}\right| + \left|\vec{BC}\right| = \sqrt{22} + \sqrt{52} + \sqrt{74} =$ 20,504 LE.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC folgt mit Hilfe der Katheten $\vec{AB}$, $\vec{BC}$:

A = $\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{BC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{22} \cdot \sqrt{52} =$ 16,912 FE.

V. Zusammenfassend seien die mathematischen Eigenschaften des Dreiecks ΔABC nachstehend angezeigt:

Punkt: $A(a_1 \mid a_2 \mid a_3)$	A(1 | 3 | -2)
Punkt: $B(b_1 \mid b_2 \mid b_3)$	B(4 | 1 | 1)
Punkt: $C(c_1 \mid c_2 \mid c_3)$	C(4 | 7 | 5)
Bereich:	x_2-, x_3-Wert: +/- 10 (-> x_1-Wert)
Differenzvektor: $AB^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $AC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $BC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$
Seite: $a = \|BC^{->}\|$ =	7.211 LE
Seite: $b = \|AC^{->}\|$ =	8.602 LE
Seite: $c = \|AB^{->}\|$ =	4.69 LE
Bemerkung:	Dreieck ist beliebig.
Umfang: u =	20.504 LE
	$u = a + b + c$
Winkel: α =	56.958°
Winkel: β =	90°
Winkel: γ =	33.042°
Bemerkung:	Dreieck ist rechtwinklig.
Winkelsumme =	180°
	$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Normalenvektor: $n^{->} = AB^{->} \times AC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} -26 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix}$
Flächeninhalt/ΔABC: A_Δ =	16.912 FE
	$A_\Delta = \|AB^{->} \times AC^{->}\|/2$

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)