

# Mathematikaufgaben

## > Vektorrechnung

### > Kugeln

**Aufgabe:** Gegeben ist eine Kugel K im dreidimensionalen kartesischen  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ -Koordinatensystem mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius  $r = 3$  LE (Längeneinheiten).

- Wie lauten Vektor- und Koordinatengleichung der Kugel K?
- Wo schneidet die Kugel die Achsen des Koordinatensystems? Wie lauten die Tangentialebenen zur Kugel K in den Achsenschnittpunkten?
- Zeige, dass der Punkt  $P(1|-2|2)$  auf der Kugel K liegt. Wie lautet die dazugehörige Tangentialebene?

d) Die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$  schneidet die Kugel K in zwei Punkten. Berechne diese!

- Bestimme die Schnittkreise der Kugel K mit den Grundebenen des  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ -Koordinatensystems.
- Bestimme Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises k zwischen der Kugel K und der Ebene  $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$ .
- Eine zweite Kugel besitze die Koordinatengleichung:  $K^*: x_1^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-1)^2 = 4$ . Gib den Mittelpunkt und den Radius der Kugel  $K^*$  an. Zeige, dass sich die Kugeln K und  $K^*$  schneiden. Bestimme den Mittelpunkt und Radius des Kreises k, der die Schnittmenge der beiden Kugeln darstellt.

**Lösung:** I. Eine Kugel K im dreidimensionalen kartesischen  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ -Koordinatensystem enthält alle Punkte  $X(x_1|x_2|x_3)$ , die denselben Abstand  $r$  zum vorgegebenen Kugelmittelpunkt  $M(m_1|m_2|m_3)$  haben. Die Vektorgleichung der Kugel mit Mittelpunkt M und positivem Radius  $r$  lautet (als Skalarprodukt mit dem Differenzvektor zwischen Kugelpunkt X und Kugelmittelpunkt):

$$K: \left( \vec{x} - \vec{OM} \right)^2 = r^2,$$

die Koordinatengleichung:

$$K: (x_1-m_1)^2 + (x_2-m_2)^2 + (x_3-m_3)^2 = r^2.$$

II. Es gelten die folgenden Lagebeziehungen zwischen Kugeln, Punkten, Geraden und Ebenen:

Ein Punkt  $P(p_1|p_2|p_3)$  liegt auf der Kugel, wenn die Gleichung  $(p_1-m_1)^2 + (p_2-m_2)^2 + (p_3-m_3)^2 = r^2$  erfüllt ist; er liegt innerhalb der Kugel, wenn  $(p_1-m_1)^2 + (p_2-m_2)^2 + (p_3-m_3)^2 < r^2$ , außerhalb, wenn  $(p_1-m_1)^2 + (p_2-m_2)^2 + (p_3-m_3)^2 > r^2$  gilt. Liegt der Punkt P außerhalb der Kugel, so lässt sich der Abstand

zwischen Punkt und Kugel berechnen als:  $d(P, K) = \left| \vec{MP} \right| - r$ .

Für eine Gerade  $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$  mit Stützvektor  $\vec{a}$  und Richtungsvektor  $\vec{u}$  lassen sich die eventuellen (maximal zwei) Schnittpunkte errechnen durch Einsetzen der Geradenkomponenten  $x_1 = a_1 + tu_1$ ,  $x_2 = a_2 + tu_2$ ,  $x_3 = a_3 + tu_3$  in die Koordinatengleichung der Kugel  $K: (x_1-m_1)^2 + (x_2-m_2)^2 + (x_3-m_3)^2 = r^2$ , Auflösen der entstehenden quadratischen Gleichung  $(a_1+tu_1-m_1)^2 + (a_2+tu_2-m_2)^2 + (a_3+tu_3-m_3)^2 = r^2$  (\*) nach  $t = t_{1,2}$  (keine, eine oder zwei Lösungen; abc-, pq-Formel zum Lösen der quadratischen Gleichung) und Einsetzen von  $t_{1,2}$  in die

Geradengleichung von g als:  $\vec{OS}_{1,2} = \vec{a} + t_{1,2} \vec{u}$ . Gibt es keine Schnittpunkte, hat also die quadratische Gleichung (\*) keine Lösung, so bestimmt sich der Abstand zwischen Gerade und Kugel als:  $d(g, K) = \left| \vec{MF} \right| - r$ , wobei F der Lotfußpunkt des Kugelmittelpunkts M auf der Geraden g ist (Lotfußpunktverfahren mit Orthogonalitätsbedingung, Hilfsebenenverfahren).

Eine Ebene besitze die Koordinatengleichung E:  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ . Ist F( $f_1|f_2|f_3$ ) der Lotfußpunkt bzgl. des Kugelmittelpunkts M auf der Ebene E, so schneiden sich Ebene E und Kugel K in einer Kreisfläche k mit dem Lotfußpunkt F als Kreismittelpunkt, wenn  $(f_1 - m_1)^2 + (f_2 - m_2)^2 + (f_3 - m_3)^2 < r^2$  gilt; sie berühren sich im Lotfußpunkt F, wenn  $(f_1 - m_1)^2 + (f_2 - m_2)^2 + (f_3 - m_3)^2 = r^2$  erfüllt ist; sie schneiden sich nicht, wenn  $(f_1 - m_1)^2 + (f_2 - m_2)^2 + (f_3 - m_3)^2 > r^2$  gilt. Im Fall, dass Ebene und Kugel sich in einer Kreisfläche schneiden, liegt die Kreisfläche auf der Ebene und ist der Lotfußpunkt F der Mittelpunkt des Kreises k; der Kreisradius  $r_k$

bestimmt sich vermöge der Beziehung:  $r_k = \sqrt{r^2 - \left| \vec{MF} \right|^2}$ . Liegt die Ebene außerhalb der Kugel, so berech-

net sich der Abstand zwischen Ebene und Kugel als:  $d(E, K) = \left| \vec{MF} \right| - r$ .

Für zwei Kugeln K:  $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$  und K\*:  $(x_1 - n_1)^2 + (x_2 - n_2)^2 + (x_3 - n_3)^2 = r_1^2$  mit den Mittelpunkten M( $m_1|m_2|m_3$ ) und N( $n_1|n_2|n_3$ ) sowie den Radien r und  $r_1$  gilt hinsichtlich ihrer Lage zueinander: Die Kugeln schneiden sich, wenn  $\left| \vec{MN} \right| < r + r_1$  gilt; sie berühren sich, wenn  $\left| \vec{MN} \right| = r + r_1$  gilt; sie schneiden sich

nicht, wenn  $\left| \vec{MN} \right| > r + r_1$  gilt. Im Fall, dass sich die Kugeln berühren, ergibt sich der Berührungspunkt B auf der

Strecke zwischen den Mittelpunkten M und N gemäß:  $\vec{OB} = \vec{OM} + \frac{r}{r+r_1} \vec{MN} = \frac{r_1}{r+r_1} \vec{OM} + \frac{r}{r+r_1} \vec{ON}$ . Im

Fall, dass sich die zwei Kugeln schneiden, ergibt sich ein Kreis k, der auf beiden Kugeln liegt. Der Kreis k ist Teilmenge einer Schnittebene E, die sich als Differenz der Koordinatengleichungen der Kugeln ergibt, also: E:  $[(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2] - [(x_1 - n_1)^2 + (x_2 - n_2)^2 + (x_3 - n_3)^2] = r^2 - r_1^2$ . Der Kreismittelpunkt ist der Lotfußpunkt F etwa des Kugelmittelpunkts M auf der Ebene E. Der Kreisradius  $r_k$  bestimmt sich als:  $r_k =$

$$\sqrt{r^2 - \left| \vec{MF} \right|^2}.$$

III. Ist P( $p_1|p_2|p_3$ ) ein Punkt auf einer Kugel K:  $\left( \vec{x} - \vec{OM} \right)^2 = r^2$  (VF, M( $m_1|m_2|m_3$ )) als Kugelmittelpunkt, r als Kugelradius) bzw. K:  $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$  (KF), so ergibt sich mit:

$$E: \vec{MP} \cdot \left( \vec{x} - \vec{OM} \right) = r^2 \text{ (NF) bzw.}$$

$$E: (p_1 - m_1)(x_1 - m_1) + (p_2 - m_2)(x_2 - m_2) + (p_3 - m_3)(x_3 - m_3) = r^2$$

die Tangentialebene der Kugel K im Punkt P, also die Ebene E, die die Kugel im Punkt P berührt.

a) Mit dem Kugelmittelpunkt O(0|0|0) und dem Kugelradius  $r = 3$  ergeben sich sofort:

$$K: \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow K: \vec{x}^2 = 9 \text{ (VF) bzw.}$$

$$K: (x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 + (x_3 - 0)^2 = 3^2 \Leftrightarrow K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9 \text{ (KF)}$$

als Vektor- und Koordinatengleichung.

b) Achsenschnittpunkte und dazugehörige Tangentialebenen zur Kugel K sind:

$x_1$ -Achse:  $S_{11}(3|0|0)$ ,  $E_{11}: x_1 = 3$ ;  $S_{12}(-3|0|0)$ ,  $E_{12}: x_1 = -3$ ;

$x_2$ -Achse:  $S_{21}(0|3|0)$ ,  $E_{21}: x_2 = 3$ ;  $S_{22}(0|-3|0)$ ,  $E_{22}: x_2 = -3$ ;

$x_3$ -Achse:  $S_{31}(0|0|3)$ ,  $E_{31}: x_3 = 3$ ;  $S_{32}(0|0|-3)$ ,  $E_{32}: x_3 = -3$ .

c) I. Punktprobe mit dem Punkt  $P(1|-2|2)$  und der Koordinatengleichung:  $K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$  ergibt:

$$1^2 + (-2)^2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$$

und damit den Nachweis, dass der Punkt P auf der Kugel K liegt.

II. Die Tangentialebene im Punkt P zur Kugel K hat den Vektor  $\vec{n} = \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  als

Normalenvektor und den Punkt  $P(1|-2|2)$  als Stützvektor, so dass wegen  $E: \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{OP}$  folgt:

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow E: x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \Leftrightarrow E: x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9.$$

d) Für die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$  und die Kugel  $K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$  ergibt das Einsetzen

der Geradenkomponenten  $x_1 = 1+t$ ,  $x_2 = 3-4t$ ,  $x_3 = -2$  in die Koordinatenform der Kugel:

$$(1+t)^2 + (3-4t)^2 + (-2)^2 = 9.$$

Umformungen führen auf eine quadratische Gleichung in t:

$$(1+t)^2 + (3-4t)^2 + (-2)^2 = 9 \quad (\text{Klammern auflösen, binomische Formeln})$$

$$1+2t+t^2 + 9-24t+16t^2 + 4 = 9 \quad (\text{Zusammenfassen})$$

$$17t^2 - 22t + 14 = 9 \quad | -9$$

$$17t^2 - 22t + 5 = 0 \quad (\text{abc-Formel})$$

$$t_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot 17 \cdot 5}}{2 \cdot 17} = \frac{22 \pm \sqrt{144}}{34} = \frac{22 \pm 12}{34}$$

$$t_1 = \frac{22-12}{34} = \frac{10}{34} = \frac{5}{17}, \quad t_2 = \frac{22+12}{34} = \frac{34}{34} = 1.$$

Als Schnittpunkte P, Q zwischen Gerade und Kugel ergeben sich damit:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{5}{17} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 22 \\ 31 \\ -34 \end{pmatrix} \Rightarrow P(22/17|31/17|-2)$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(2|-1|-2).$$

e) Die Grundebenen des  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ -Koordinatensystems enthalten den Koordinatenursprung und damit den Mittelpunkt  $O(0|0|0)$  der Kugel K, der gleichzeitig Mittelpunkt der drei Schnittkreise ist (Kugelmittelpunkt als Lotfußpunkt auf der jeweiligen Grundebene). Es ergeben sich als Schnittkreise:

$$x_1$$
- $x_2$ -Grundebene ( $E_{12}: x_3 = 0$ ):  $x_1^2 + x_2^2 = 9$ ;

$$x_1$$
- $x_3$ -Grundebene ( $E_{13}: x_2 = 0$ ):  $x_1^2 + x_3^2 = 9$ ;

$$x_2$$
- $x_3$ -Grundebene ( $E_{23}: x_1 = 0$ ):  $x_2^2 + x_3^2 = 9$ .

f) I. Wir bestimmen zunächst den Lotfußpunkt F auf der Ebene  $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$  zum Kugelmit-

telpunkt  $O(0|0|0)$  und erhalten mit dem Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  der Ebene E zunächst die zur

Ebene senkrechte Lotgerade h durch den Kugelmittelpunkt O als:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt von der Lotgeraden h und der Ebene E ist der Lotfußpunkt F gemäß:

Gerade h -> Geradenkomponenten:  $x_1 = 2t$ ,  $x_2 = t$ ,  $x_3 = 2t$  -> Einsetzen in Ebene E -> Gleichung:  $2 \cdot 2t + t + 2 \cdot 2t = 3 \Leftrightarrow 9t = 3 \Leftrightarrow t = 1/3$

$$\text{und: } \vec{OF} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ also: } F(2/3|1/3|2/3).$$

II. Der Lotfußpunkt F liegt wegen:  $(2/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2 = 9/9 = 1 < 9$  innerhalb der Kugel K, so dass sich Kugel K und Ebene E schneiden. Mittelpunkt von Schnittkreis k und Schnittfläche ist der Lotfußpunkt  $F(2/3|1/3|2/3)$ . Der Schnittkreisradius berechnet sich auf der Grundlage der Abstandes

$$\text{zwischen Lotfußpunkt und Ursprung: } \left| \vec{OF} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(2/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2} = \sqrt{1} = 1 \text{ LE als:}$$

$$r_k = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ LE.}$$

g) I. Aus der Koordinatengleichung  $K^*: x_1^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-1)^2 = 4 = 2^2$  ist sofort der Kugelmittelpunkt  $N(0|2|1)$  und der Kugelradius  $r_1 = 2$  abzulesen.

$$\text{II. Wegen } r = 3, r_1 = 2 \text{ und } \left| \vec{ON} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ ist: } \sqrt{5} < 3 + 2 = 5, \text{ so dass sich die}$$

zwei Kugeln K und  $K^*$  schneiden (Schnittkreis k).

III. Die Schnittebene E, auf der sich der Schnittkreis k befindet, erhalten wir durch Differenzbildung im (nicht linearen) Gleichungssystem:

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$$

$$(2) \quad x_1^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 + 4 + x_3^2 - 2x_3 + 1 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 - 2x_3 = -1,$$

so dass (1)-(2) ergibt:

$$E: 4x_2 + 2x_3 = 10 \Leftrightarrow E: 2x_2 + x_3 = 5.$$

IV. Der Mittelpunkt des Schnittkreises k errechnet sich als Lotfußpunkt F auf der Ebene E zum Mittelpunkt  $O(0|0|0)$  der Kugel K. Die senkrecht auf der Ebene stehende, durch den Koordinaten-

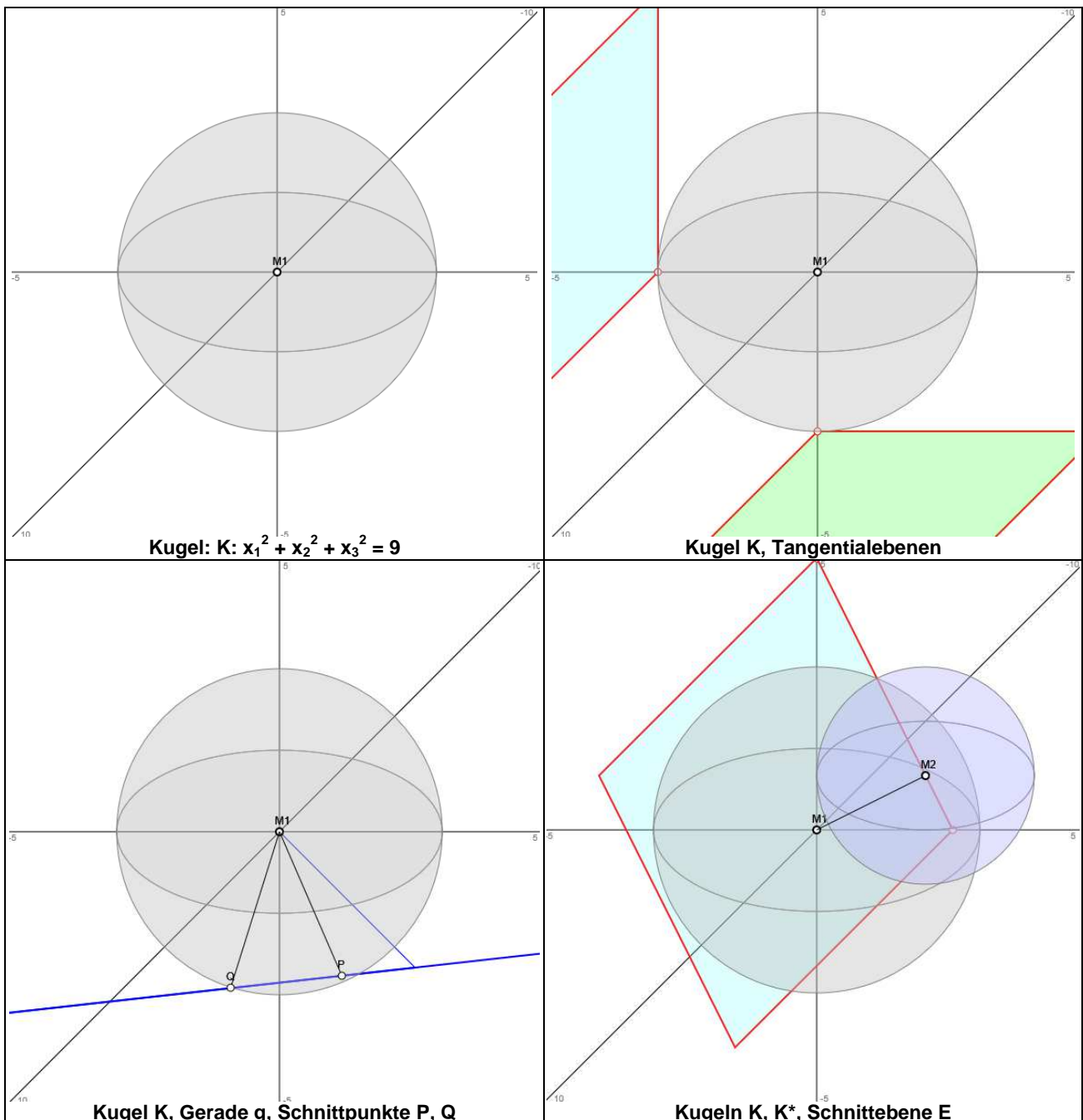
$$\text{ursprung O laufende Lotgerade } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ schneidet die Ebene E auf Grund von:}$$

Gerade h -> Geradenkomponenten:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2t$ ,  $x_3 = t$  -> Einsetzen in Ebene E -> Gleichung:  $2 \cdot 2t + t = 5 \Leftrightarrow 5t = 5 \Leftrightarrow t = 1$

$$\text{im Lotfußpunkt: } \vec{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } F(0|2|1), \text{ der damit gleichzeitig der Mittelpunkt N der Kugel } K^* \text{ ist.}$$

Der Radius des Schnittkreises  $k$  ist wegen  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{5}$

$r_k = \sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$  und damit identisch mit dem Radius der Kugel  $K^*$ . Die Fläche des Schnittkreises  $k$  halbiert damit die Kugel  $K^*$ .



Abkürzungen: KF = Koordinatenform, NF = Normalenform, VF = Vektorform.

[www.michael-buhlmann.de](http://www.michael-buhlmann.de) / 07.2018 / Aufgabe 617