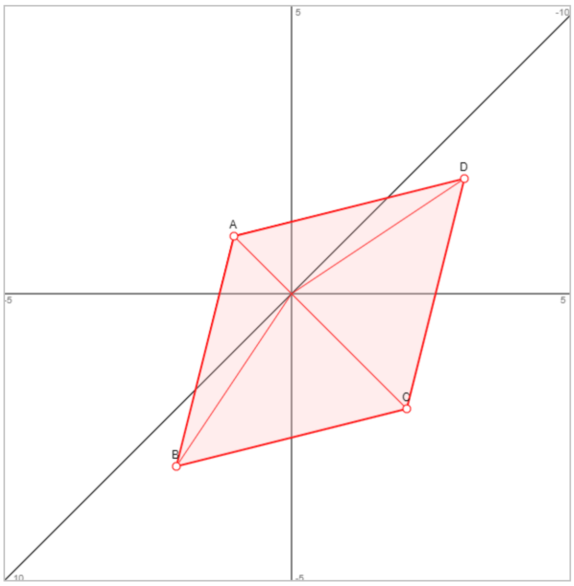
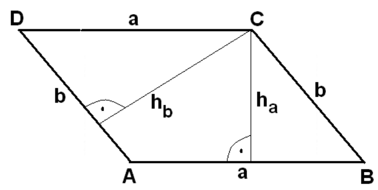
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Parallelogramm

Aufgabe: Die Punkte A(4|1|3), B(0|-2|-3), C(2|3|-1) und D(6|6|5) sind die Eckpunkte eines Vierecks. Zeige, dass das Viereck ein Parallelogramm ist, und berechne die Seitenlängen und die Innenwinkel sowie Umfang und Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD.



Lösung: I. Es gilt die folgende Übersicht zur Berechnung von Parallelogrammen:

Parallelogramm ABCD in der Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\vec{AB} + s\vec{AC}$ (PF) mit D∈E, Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: α, β, γ, δ.	
$\vec{AB} = \vec{DC}$ => Parallelogramm $\vec{BC} = \vec{AD}$ => Parallelogramm	
Seiten: $a = \left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{CD}\right\|$, $b = \left\|\vec{BC}\right\| = \left\|\vec{AD}\right\|$, Umfang: $u = 2\left\|\vec{AB}\right\| + 2\left\|\vec{BC}\right\|$	
Winkel: $\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{AD}\right\|}$, $\cos\beta = -\frac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{BC}\right\|}$ usw.	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360° α + β = 180°, γ + δ = 180° α = γ, β = δ
Höhen: h_a = d(C, g_{AB}) bzw. $h_a = \frac{\left\|\vec{AB}\times\vec{AD}\right\|}{\left\|\vec{AB}\right\|}$, h_b = d(C, g_{AD}) bzw. $h_b = \frac{\left\|\vec{AB}\times\vec{AD}\right\|}{\left\|\vec{AD}\right\|}$	
Fläche: $A = ah_a = bh_b$ bzw. $A = \vec{AB}\cdot d(C, g_{AB}) = \vec{AD}\cdot d(C, g_{AD})$ bzw. $A = \left\|\vec{AB}\times\vec{AD}\right\|$	Erläuterung: g_{PQ}: $\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{PQ}$ d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g

Parallelogramm

Für die Berechnung des Flächeninhalts eines Vierecks ΔABC kann das Kreuzprodukt (Vektorprodukt, äußeres Produkt) verwendet werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

II. Wir bilden aus den Ecken des Vierecks ABCD die Differenzvektoren $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ und haben:

Punkt: $A(a_1 \| a_2 \| a_3)$	A(4 | 1 | 3)
Punkt: $B(b_1 \| b_2 \| b_3)$	B(0 | -2 | -3)
Punkt: $C(c_1 \| c_2 \| c_3)$	C(2 | 3 | -1)
Punkt: $D(d_1 \| d_2 \| d_3)$	D(6 | 6 | 5)
Differenzvektor: $AB^{->}$ =	$\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $BC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $CD^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $AD^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
Seite: $a = \|AB^{->}\|$ =	7.81 LE
Seite: $b = \|BC^{->}\|$ =	5.745 LE
Höhe: h_a =	3.594 LE
Höhe: h_b =	4.887 LE
Umfang: u =	27.11 LE
	$u = 2\|AB^{->}\| + 2\|BC^{->}\| = 2a + 2b$
Innenwinkel: α =	141.269°
Innenwinkel: β =	38.731°
Winkelsumme	360°
	$2\alpha + 2\beta = 360°$
Bemerkung:	Parallelogramm ABCD
Ebene/Parallelogramm ABCD: E:	$12 \cdot x_1 + -2 \cdot x_2 + -7 \cdot x_3 = 25$
Flächeninhalt/Parallelogramm ABCD: A_P =	28.071 FE
	$A_P = \|AB^{->} \times AD^{->}\| = ah_a = bh_b$

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1660