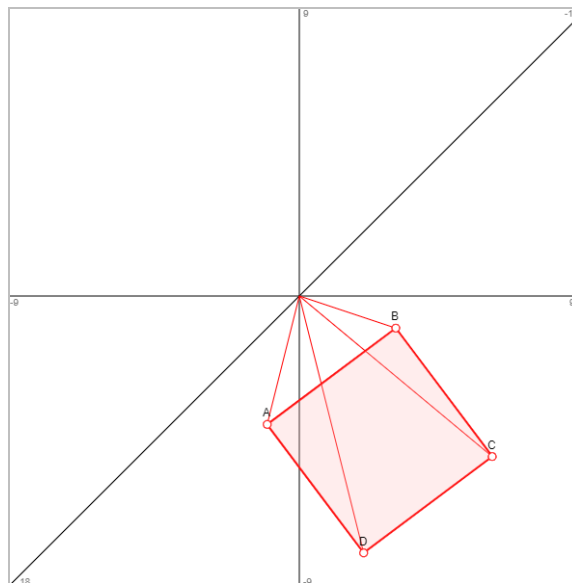


Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Parallelogramm

Aufgabe: Die Punkte $A(2|0|-3)$, $B(2|4|0)$, $C(2|7|-4)$ und $D(2|3|-7)$ sind die Eckpunkte eines Vierecks. Zeige, dass das Viereck ein Parallelogramm und sogar ein Quadrat ist, und berechne die Seitenlängen und die Innenwinkel sowie Umfang und Flächeninhalt des Quadrats ABCD.



Lösung: I. Es gilt die folgende Übersicht zur Berechnung von Parallelogrammen:

Parallelogramm ABCD in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r\vec{AB} + s\vec{AC}$ (PF) mit $D \in E$, Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.	
$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow$ Parallelogramm $\vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow$ Parallelogramm	
Seiten: $a = \vec{AB} = \vec{CD} , b = \vec{BC} = \vec{AD} $, Umfang: $u = 2 \vec{AB} + 2 \vec{BC} $	
Winkel: $\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{ \vec{AB} \cdot \vec{AD} }, \cos \beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \cdot \vec{BC} }$ usw.	Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ $\alpha + \beta = 180^\circ, \gamma + \delta = 180^\circ$ $\alpha = \gamma, \beta = \delta$
Höhen: $h_a = d(C, g_{AB})$ bzw. $h_a = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AD} }{ \vec{AB} }, h_b = d(C, g_{AD})$ bzw. $h_b = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AD} }{ \vec{AD} }$	
Fläche: $A = ah_a = bh_b$ bzw. $A = \vec{AB} \cdot d(C, g_{AB}) = \vec{AD} \cdot d(C, g_{AD})$ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AD} $	Erläuterung: $g_{PQ}: \vec{x} = \vec{OP} + t\vec{PQ}$ $d(R, g) =$ Abstand Punkt R – Gerade g

Parallelogramm

Für die Berechnung des Flächeninhalts eines Vierecks ΔABC kann das Kreuzprodukt (Vektorprodukt, äußeres Produkt) verwendet werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

II. Es gilt die folgende Übersicht zur Berechnung von Quadraten:

Quadrat ABCD als rechtwinkliges Parallelogramm mit gleich langen Seiten in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r\vec{AB} + s\vec{AC}$ (PF) mit $D \in E$, Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.	
$\vec{AB} = \vec{DC}, \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0, \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Quadrat $\vec{BC} = \vec{AD}, \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0, \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Quadrat	
Seiten: $a = \vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \vec{AD} $, Umfang: $u = 4 \vec{AB} $	
Fläche: $A = \vec{AB} ^2$ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AD} $	Winkel: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$

Quadrat

Quadrate sind also Parallelogramme, in denen es einen rechten Winkel gibt (und damit alle vier Winkel rechte Winkel sind; Rechteck) und zwei in einer Ecke aneinanderstoßende Seiten gleich lang sind (womit alle Seiten gleich lang sind; Raute).

III. Wir bilden aus den Ecken des Vierecks ABCD die Differenzvektoren \vec{AB} , \vec{AD} , \vec{BC} , \vec{CD} und haben:

Punkt: A(a ₁ a ₂ a ₃)	A(2 0 -3)
Punkt: B(b ₁ b ₂ b ₃)	B(2 4 0)
Punkt: C(c ₁ c ₂ c ₃)	C(2 7 -4)
Punkt: D(d ₁ d ₂ d ₃)	D(2 3 -7)
Differenzvektor: $\vec{AB} =$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $\vec{BC} =$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $\vec{CD} =$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $\vec{AD} =$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
Seite: a = $ \vec{AB} =$	5 LE
Seite: b = $ \vec{BC} =$	5 LE
Höhe: h _a =	5 LE
Höhe: h _b =	5 LE
Umfang: u =	20 LE
	$u = 2 \vec{AB} + 2 \vec{BC} = 2a + 2b$
Innenwinkel: α =	90°
Innenwinkel: β =	90°
Winkelsumme	360°
	$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$
Bemerkung:	Parallelogramm ABCD als Quadrat
Ebene/Parallelogramm ABCD: E:	$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2$
Flächeninhalt/Parallelogramm ABCD: A _p =	25 FE
	$A_p = \vec{AB} \times \vec{AD} = ah_a = bh_b$

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1662