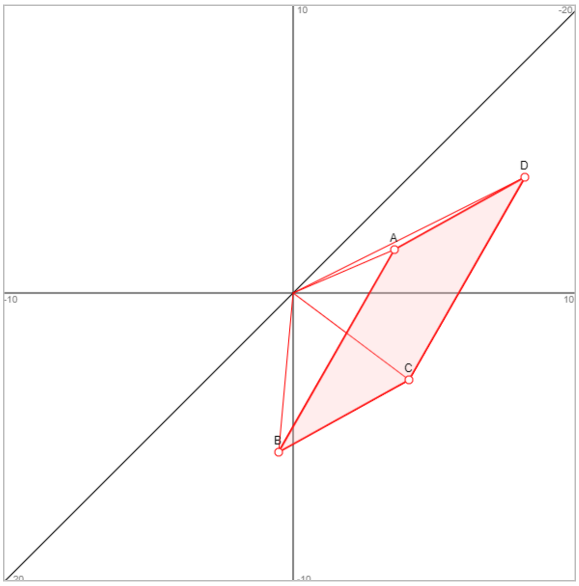
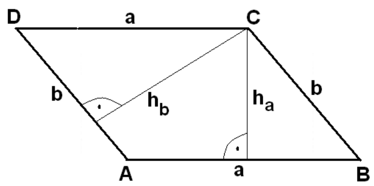
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Parallelogramm

Aufgabe: Die Punkte A(-3|2|0), B(1|0|-5), C(0|4|-3) sind die Eckpunkte eines Parallelogramms ABCD. Ergänze die fehlende Ecke D und berechne die Seitenlängen und die Innenwinkel sowie Umfang und Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD.



Lösung: I. Es gilt die folgende Übersicht zur Berechnung von Parallelogrammen:

Parallelogramm ABCD in der Ebene: E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF) mit DεE, Seiten als Differenzvektoren: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: α, β, γ, δ.	
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ => Parallelogramm $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ => Parallelogramm	
Seiten: $a = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$, $b = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$, Umfang: $u = 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\| + 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$	
Winkel: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}$, $\cos\beta = -\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$ usw.	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360° α + β = 180°, γ + δ = 180° α = γ, β = δ
Höhen: h_a = d(C, g_{AB}) bzw. $h_a = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$, h_b = d(C, g_{AD}) bzw. $h_b = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}$	
Fläche: $A = ah_a = bh_b$ bzw. $A = \overrightarrow{AB}\cdot d(C, g_{AB}) = \overrightarrow{AD}\cdot d(C, g_{AD})$ bzw. $A = \left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|$	Erläuterung: g_{PQ}: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}$ d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g

Parallelogramm

Für die Berechnung des Flächeninhalts eines Vierecks ΔABC kann das <u>Kreuzprodukt</u> (Vektorprodukt, äußeres Produkt) verwendet werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Der fehlende Eckpunkt eines Parallelogramms ergibt sich aus den Formeln:

$$\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{CD},\ \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{DA},\ \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{AB},\ \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}\ \text{o.ä.}$$

II. Wir bilden mit der errechneten Ecke D(-4|6|2) aus den Ecken des Parallelogramms ABCD die <u>Differenzvektoren</u> $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ und haben:

Punkt: $A(a_1\|a_2\|a_3)$	A(-3 | 2 | 0)
Punkt: $B(b_1\|b_2\|b_3)$	B(1 | 0 | -5)
Punkt: $C(c_1\|c_2\|c_3)$	C(0 | 4 | -3)
Punkt: $D(d_1\|d_2\|d_3)$	D(-4 | 6 | 2)
Differenzvektor: AB^-> =	$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: BC^-> =	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: CD^-> =	$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: AD^-> =	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
Seite: a = |AB^->| =	6.708 LE
Seite: b = |BC^->| =	4.583 LE
Höhe: h_a =	3.201 LE
Höhe: h_b =	4.685 LE
Umfang: u =	22.582 LE
	u = 2|AB^->| + 2|BC^->| = 2a + 2b
Innenwinkel: α =	135.697°
Innenwinkel: β =	44.303°
Winkelsumme	360°
	2α + 2β = 360°
Bemerkung:	Parallelogramm ABCD
Ebene/Parallelogramm ABCD: E:	-16 $*x_1$ + 3 $*x_2$ + -14 $*x_3$ = 54
Flächeninhalt/Parallelogramm ABCD: A_P =	21.471 FE
	A_P = |AB^-> x AD^->| = ah_a = bh_b

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1663