Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Spiegelungen an Gerade und Ebene

Aufgabe: Der Punkt P(2|0|-4) soll gespiegelt werden an

a) der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

b) der Ebene E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 19$.

Berechne jeweils die Bildpunkte P'.

Lösung: a) I. Wir verwenden als Methode zur Spiegelung eines Punktes P an einer Geraden g z.B. das Hilfsebenenverfahren. Dazu sei die Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ mit Stütz- und Richtungsvektor, $\vec{OP}$ der Ortsvektor zum Punkt P, der nicht auf der Geraden liegt. Die Konstruktion einer Hilfsebene E_H, die senkrecht zur Geraden g steht und den Punkt P enthält, führt mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u}$ auf: E_H: $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{OP}$. Der Schnittpunkt F von der Geraden g und der Ebene E_H ist der sog. Lotfußpunkt zum Punkt P auf der Geraden g. Um den Lotfußpunkt F kann der Punkt P zum Bildpunkt P' gespiegelt werden vermöge der Spiegelgleichung:

$$\vec{OP'} = \vec{OP} + 2\,\vec{PF} = \vec{OF} + \vec{PF} = 2 \cdot \vec{OF} - \vec{OP}.$$

II. Zur Bestimmung des Lotfußpunkts F auf der Geraden g „gegenüber" des Punktes P bilden wir zunächst die Hilfsebene E_H mit Hilfe des Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und des Stützvektors $\vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ als:

E_H: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ ⇔ E_H: $-x_1 + x_2 = -2 + 0 + 0$ ⇔ E_H: $-x_1 + x_2 = -2$.

III. Der Schnittpunkt zwischen Gerade g und Hilfsebene E_H ist der Lotfußpunkt F. Dieser errechnet sich gemäß:

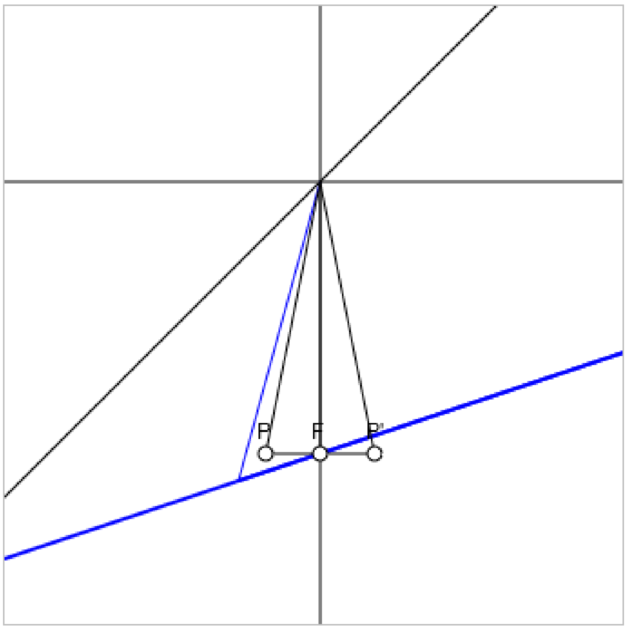
g -> $x_1 = 5-t$, $x_2 = 1+t$, $x_3 = -3$ -> E_H -> $-(5-t) + (1+t) = -2$ ⇔ $-4 + 2t = -2$ ⇔ $2t = 2$ ⇔ $t = 1$ ->

$\vec{OF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ -> F(4|2|-3).

IV. Der Bildpunkt P‘ errechnet sich nach der Spiegelgleichung mit:

$$\vec{OP'} = 2 \cdot \vec{OF} - \vec{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

als P‘(6|4|-2).



b) I. Wir verwenden als Methode zur Spiegelung eines Punktes P an einer Ebene E das Hilfsgeradenverfahren (Lotgeradenverfahren). Dazu sei die Ebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ in der Koordinatenform gegeben; $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist folglich der Normalenvektor der Ebene. Die Hilfs- und Lotgerade h senkrecht zur Ebene E bestimmt sich somit als h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n}$ mit dem Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{n}$, wobei $\vec{OP}$ der Ortsvektor zum Punkt P ist, der nicht auf der Ebene liegt. Der Schnittpunkt F von der Ebenen E und der Lotgeraden h ist der sog. Lotfußpunkt zum Punkt P auf der Ebenen E. Um den Lotfußpunkt F kann der Punkt P zum Bildpunkt P‘ gespiegelt werden vermöge der Spiegelgleichung:

$$\vec{OP'} = \vec{OP} + 2\,\vec{PF} = \vec{OF} + \vec{PF} = 2 \cdot \vec{OF} - \vec{OP}.$$

II. Mit dem Punkt P(2|0|-4) und der Ebene E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 19$ ergibt sich wegen $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Ebene die Hilfs- und Lotgerade:

h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

III. Der Schnittpunkt zwischen Ebene E und Lotgerade h ist der Lotfußpunkt F. Dieser errechnet sich gemäß:

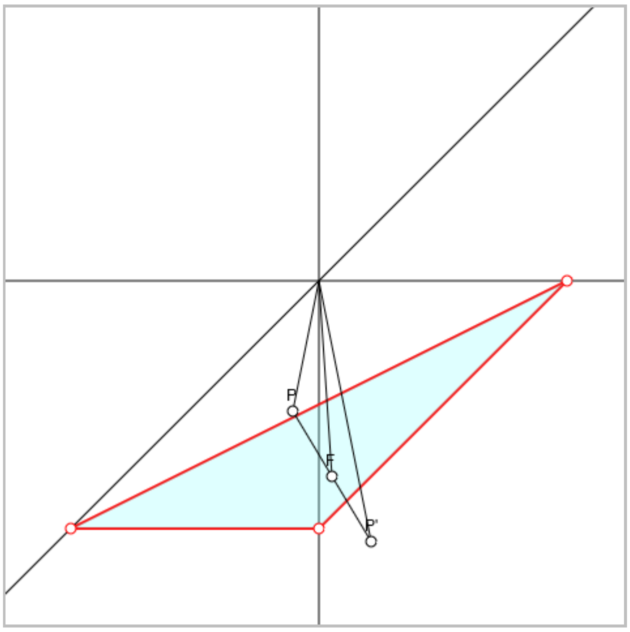
h -> x_1 = 2+t, x_2 = 2t, x_3 = -4–2t -> E -> (2+t) +2·2t – 2(-4–2t) = 19 ⇔ 10 + 9t = 19 ⇔ 9t = 9 ⇔ t = 1

-> $\vec{OF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ -> F(3|2|-6).

IV. Der Bildpunkt P‘ errechnet sich nach der Spiegelgleichung mit:

$$\vec{OP'} = 2 \cdot \vec{OF} - \vec{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

als P‘(4|4|-8).



www.michael-buhlmann.de / 03.2020 / Aufgabe 995