Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Teilverhältnis

Aufgabe: a) Für zwei Punkte A und B sollen die Punkte P auf der Geraden durch A und B bestimmt werden, die von A doppelt so weit wie von B entfernt sind (Teilverhältnis 2:1).

b) Es sei nun A(2|-3|0) und B(3|2|0). Bestimme die Punkte P auf der Geraden durch A und B bestimmt werden, die von A doppelt so weit wie von B entfernt sind (Teilverhältnis 2:1).

c) Verallgemeinere: Für zwei Punkte A und B sollen die Punkte P auf der Geraden durch A und B bestimmt werden, die von A und B im Teilverhältnis r:s entfernt sind.

Lösung: a) Die Gerade g durch die Punkte A und B ist zunächst von der Form:

g: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB}$.

Nun muss für einen Punkt Pεg gelten:

g -> $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB}$

für ein gewisses t, das im Folgenden zu berechnen ist. Die Entfernungen zwischen A und P bzw. B und P berechnen sich mit:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \left(\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB}\right) - \overrightarrow{OA} = t\,\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = \left(\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB}\right) - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + t\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) - \overrightarrow{OB} = (t-1)\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA} =$$

$$(t-1)\overrightarrow{OB} - (t-1)\overrightarrow{OA} = (t-1)\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = (t-1)\,\overrightarrow{AB}$$

als:

d(A,P) = $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|t\,\overrightarrow{AB}\right|$

d(B,P) = $\left|\overrightarrow{BP}\right| = \left|(t-1)\,\overrightarrow{AB}\right|$.

Außerdem soll gelten, dass der Punkt P doppelt so weit von A wie von B entfernt ist, d.h.: d(A,P) ist doppelt so groß wie d(B,P) ist, also mit den anschließenden Umformungen:

d(A,P) = 2·d(B,P)

$\left|\overrightarrow{AP}\right| = 2\left|\overrightarrow{AP}\right|$ ($\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|t\,\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\overrightarrow{BP}\right| = \left|(t-1)\,\overrightarrow{AB}\right|$)

$\left|t\,\overrightarrow{AB}\right|$ = $2\left|(t-1)\,\overrightarrow{AB}\right|$ (Rechnen mit Beträgen)

$|t| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$ = $2|t-1| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$ | : $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

|t| = 2|t-1| (Beträge auflösen)

±t = 2(t-1) (Klammer auflösen)

±t = 2t – 2 | -2t

-2t ± t = -2.

Wir betrachten die beiden Fälle getrennt:

Fall 1:

-2t – t = -2

-3t = -2 | :(-3)

$t = 2/3 = t_1$

Fall 2:

-2t + t = -2

-t = -2 | :(-1)

$t = 2 = t_2$

Die Punkte P_1 (t_1=2/3), P_2 (t_2=2) mit

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} \quad (*)$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + 2\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = 2\,\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad (**)$$

sind damit die gesuchten Punkte (, die das Teilverhältnis 2:1 erfüllen).

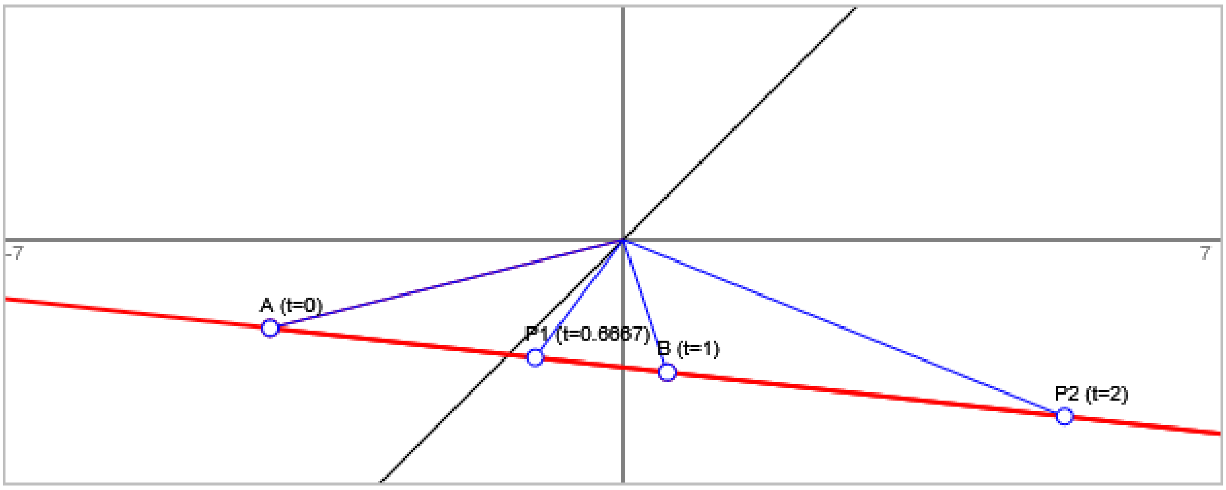
b) Gemäß den Beziehungen (*) und (**) errechnen sich die Punkte P als:

$$\overrightarrow{OP_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP_2} = 2\,\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit als:

$P_1(8/3|1/3|0)$, $P_2(4|7|0)$.



c) Wir gehen wie in a) vor und haben die Gerade g durch die Punkte A und B:

g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB}$

und den Punkt Pεg mit:

g -> $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB}$

für ein gewisses t, weiter die Entfernungen:

d(A,P) = $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|t\,\overrightarrow{AB}\right|$

d(B,P) = $\left|\overrightarrow{BP}\right| = \left|(t-1)\,\overrightarrow{AB}\right|$.

Das geforderte Teilverhältnis r:s wird nun verwendet:

d(A,P) = $\frac{r}{s}\cdot$d(B,P)

$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \frac{r}{s}\left|\overrightarrow{AP}\right|$ ($\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|t\,\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\overrightarrow{BP}\right| = \left|(t-1)\,\overrightarrow{AB}\right|$)

$\left|t\,\overrightarrow{AB}\right| = \frac{r}{s}\left|(t-1)\,\overrightarrow{AB}\right|$ (Rechnen mit Beträgen)

$|t|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{r}{s}\cdot|t-1|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|$ | : $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

|t| = $\frac{r}{s}\cdot$|t-1| (Beträge auflösen)

±t = $\frac{r}{s}$ (t-1) (Klammer auflösen)

±t = $\frac{r}{s}$t – $\frac{r}{s}$ | -$\frac{r}{s}$t

-$\frac{r}{s}$t ± t = -$\frac{r}{s}$

Wir betrachten die beiden Fälle getrennt:

Fall 1:

-$\frac{r}{s}$t + t = -$\frac{r}{s}$

-($\frac{r}{s}$+1)t = -$\frac{r}{s}$

-$\frac{r+s}{s}$ t = -$\frac{r}{s}$ | :(-$\frac{r+s}{s}$)

t = $\frac{r}{s} : \frac{r+s}{s} = \frac{r}{s}\cdot\frac{s}{r+s} = \frac{r}{r+s}$ = t_1

Fall 2:

-$\frac{r}{s}$t – t = -$\frac{r}{s}$

-($\frac{r}{s}$-1)t = -$\frac{r}{s}$

($\frac{s-r}{s}$)t = -$\frac{r}{s}$ | : $\frac{s-r}{s}$

t = -$\frac{r}{s} : \frac{s-r}{s} = \frac{r}{s}\cdot\frac{s}{r-s} = \frac{r}{r-s}$ = t_2

Die Punkte P_1 ($t_1=\frac{r}{r+s}$), P_2 ($t_2=\frac{r}{r-s}$) mit

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{r}{r+s}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{r}{r+s}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{r}{r+s}\overrightarrow{OB} + \frac{s}{r+s}\overrightarrow{OA} = \frac{s}{r+s}\overrightarrow{OA} + \frac{r}{r+s}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{r}{r-s}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{r}{r-s}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{r}{r-s}\overrightarrow{OB} + \frac{s}{s-r}\overrightarrow{OA} = \frac{s}{s-r}\overrightarrow{OA} + \frac{r}{r-s}\overrightarrow{OB}$$

sind damit die gesuchten Punkte, die das Teilverhältnis r:s erfüllen.

www.michael-buhlmann.de / 03.2020 / Aufgabe 1003