Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Wendetangenten

Aufgabe: Zur ganz rationalen Funktion 3. Grades:

$$f(x) = \frac{1}{80}x^3 - \frac{3}{40}x^2 + 1{,}2$$

ist die Tangente im Wendepunkt zu bestimmen.

Lösung: I. Allgemein lässt sich ein <u>Wendepunkt</u> einer Funktion f(x) bestimmen vermittelst der 2. und 3. Ableitung f''(x) und f'''(x):

f''(x) = 0 => x_1, … als mögliche Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f'''(x_1) ≠ 0 => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) (hinreichende Bedingung)

bzw.:

f'''(x_1) > 0 => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) mit Übergang von einer Rechts- in eine Linkskrümmung
f'''(x_1) < 0 => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) mit Übergang von einer Links- in eine Rechtskrümmung usw.

Ist x_1 ein Wendepunkt der Funktion f(x), so ergibt sich die Gleichung der <u>Wendetangente</u> am einfachsten aus der Tangentenformel:

t_W: y = f'(x_1)(x–x_1) + f(x_1)

unter Bestimmung der Werte f(x_1) und f'(x_1). Im Wendepunkt hat zudem die Funktion f(x) den (lokal) kleinsten oder größten Ableitungswert f'(x_1), die Wendetangente schneidet dort berührend die Funktion.

II. Wir bestimmen den (einzigen) <u>Wendepunkt</u> der ganz rationalen Funktion 3. Grades $f(x) = \frac{1}{80}x^3 - \frac{3}{40}x^2 + 1{,}2$, indem wir zunächst die ersten drei Ableitungen bilden (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x) = \frac{3}{80}x^2 - \frac{3}{20}x$$

$$f''(x) = \frac{3}{40}x - \frac{3}{20}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{40}.$$

Nullsetzen der 2. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{40}x - \frac{3}{20} = 0 \Leftrightarrow 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2,$$

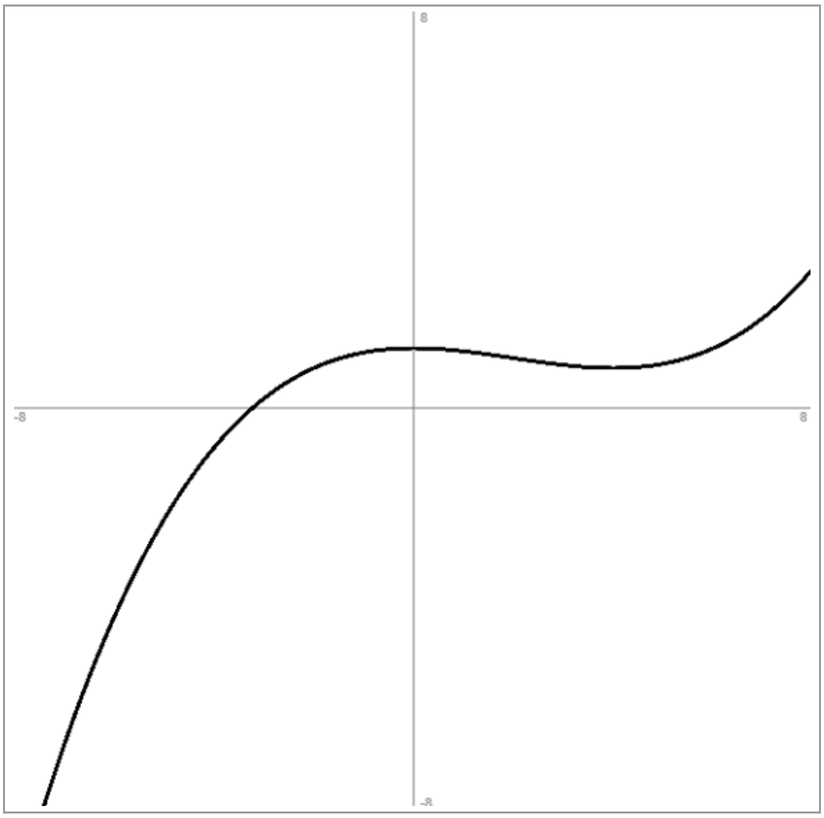
so dass die Stelle x=2 ein möglicher Wendepunkt der Funktion ist. Mit dem Einsetzen der gefundenen Stelle in die 3. Ableitung (hinreichende Bedingung):

$$f'''(2) = \frac{3}{40} \neq 0$$

lässt sich in der Tat dort ein Wendepunkt nachweisen. Wegen f(2) = $\frac{1}{80}\cdot 2^3 - \frac{3}{40}\cdot 2^2 + 1{,}2$ = 1 hat der Wendepunkt die Koordinaten W(2|1).

III. Wertetabelle, Zeichnung der Funktion f(x):

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	**Besondere Kurvenpunkte**
-3.22	0.005	0.8718	-0.3915	0.075	Nullstelle N(-3.22|0.01)
0	1.2	0	-0.15	0.075	Schnittpunkt S_y(0|1.2) = Hochpunkt H(0|1.2)
2	1	-0.15	0	0.075	Wendepunkt W(2|1)
4	0.8	0	0.15	0.075	Tiefpunkt T(4|0.8)

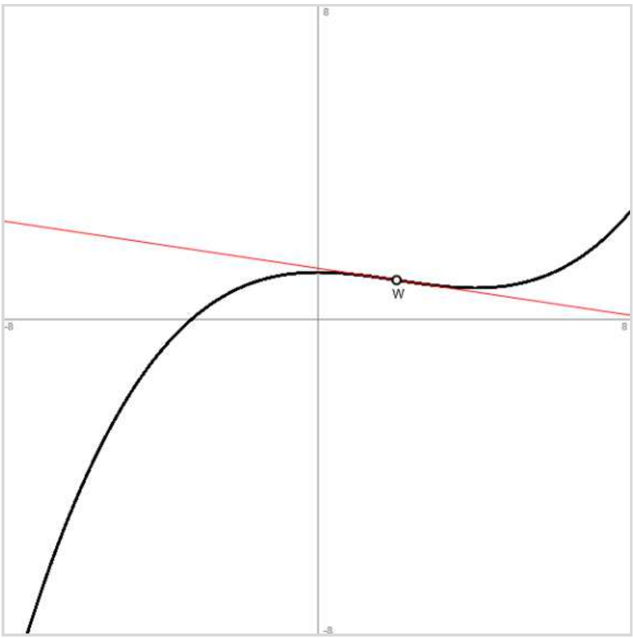


IV. Die Wendetangente ist die Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x= 2. Mithin gilt wegen

f'(2) = $\frac{3}{80}\cdot 2^2-\frac{3}{20}\cdot 2=-\frac{3}{20}$ und f(2) = 1:

t_W: y = f'(2)(x–2) + f(2) = $-\frac{3}{20}(x-2)+1$ = -0,15x + 0,3 + 1 = -0,15x+1,3

als Gleichung der gesuchten Wendetangente.



www.michael-buhlmann.de / 07.2018 / Aufgabe 593