

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Wendetangenten

Aufgabe: Zur ganz rationalen Funktion 3. Grades:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$$

ist die Tangente im Wendepunkt zu bestimmen.

Lösung: I. Allgemein lässt sich ein Wendepunkt einer Funktion $f(x)$ bestimmen mittelst der 2. und 3. Ableitung $f''(x)$ und $f'''(x)$:

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1, \dots$ als mögliche Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f'''(x_1) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ (hinreichende Bedingung)

bzw.:

$f'''(x_1) > 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Rechts- in eine Linkskrümmung

$f'''(x_1) < 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Links- in eine Rechtskrümmung usw.

Ist $W(x_1|f(x_1))$ ein Wendepunkt der Funktion $f(x)$, so ergibt sich die Gleichung der Wendetangente aus der allgemeinen Geradengleichung:

$t_W: y = mx + c$

mit Steigung $m = f'(x_1)$ und y-Achsenabschnitt $c = f(x_1) - mx_1$.

II. Wir bestimmen den (einzigen) Wendepunkt der ganz rationalen Funktion 3. Grades

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$, indem wir zunächst die ersten drei Ableitungen bilden (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x = 2x^2 + 4x$$

$$f''(x) = 2 \cdot 2x + 4 = 4x + 4$$

$$f'''(x) = 4.$$

Nullsetzen der 2. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1,$$

so dass die Stelle $x = -1$ ein möglicher Wendepunkt der Funktion ist. Mit dem Einsetzen der gefundenen Stelle in die 3. Ableitung (hinreichende Bedingung):

$$f'''(-1) = 4 \neq 0$$

lässt sich in der Tat dort ein Wendepunkt nachweisen. Wegen $f(-1) = \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$

hat der Wendepunkt die Koordinaten $W(-1|\frac{4}{3})$.

III. Die Wendetangente ist die Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = -1$. Mithin gilt der Ansatz:

$$t_w: y = mx + c$$

mit zu den bestimmenden Unbekannten m und c als Tangentensteigung und y -Achsenabschnitt.

Tangentensteigung m und Ableitung der Funktion im Wendepunkt $W(-1 | \frac{4}{3})$ stimmen überein, so

dass

$$m = f'(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = 2 - 4 = -2$$

erfüllt ist. Die Gleichung der Wendetangente hat also das Aussehen:

$$t_w: y = -2x + c$$

mit noch zu errechnendem c . Einsetzen der Koordinaten des Wendepunkts $W(-1 | \frac{4}{3})$ mit $x = -1$ und

$$y = \frac{4}{3} \text{ ergibt:}$$

$$\frac{4}{3} = -2 \cdot (-1) + c \Leftrightarrow \frac{4}{3} = 2 + c \Leftrightarrow -\frac{2}{3} = c$$

als y -Achsenabschnitt der Tangente. Damit ist die Wendetangente vollständig bestimmt und lautet:

$$t_w: y = -2x - \frac{2}{3}.$$



www.michael-buhlmann.de / 01.2026 / Aufgabe 2570