

Mathematikaufgaben

> Zahlentheorie

> Primzahlen

Aufgabe: Primzahlen sind natürliche Zahlen, die genau zwei Teiler besitzen, nämlich die Zahl 1 und sich selbst. Hinsichtlich der Verteilung von Primzahlen sind für die Bereiche von 1 bis 10, 1 bis 100, ..., 1 bis 100000000 von natürlichen Zahlen folgende Daten bekannt:

Bereich 1-10:

Primzahlen (Bereich: 1-10)	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
	4	0.4
Primzahllücken/ -differenzen	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
1	1	0.25
2	2	0.5
4	1	0.25

Bereich 1-100:

Primzahlen (Bereich: 1-100)	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
	25	0.25
Primzahllücken/ -differenzen	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
1	1	0.04
2	8	0.32
4	8	0.32
6	7	0.28
8	1	0.04

Bereich 1-1000:

Primzahlen (Bereich: 1-1000)	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
	168	0.168
Primzahllücken/ -differenzen	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
1	1	0.005952381
2	35	0.2083333333
4	40	0.2380952381
6	44	0.2619047619
8	15	0.0892857143
10	16	0.0952380952
12	8	0.0476190476
14	7	0.0416666667
18	1	0.005952381
20	1	0.005952381

Bereich 1-10000:

Primzahlen (Bereich: 1-10000)	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
	1229	0.1229
Primzahlücken/-differenzen	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
1	1	0.0008136697
2	205	0.1668022783
4	202	0.1643612693
6	299	0.2432872254
8	101	0.0821806347
10	119	0.0968266884
12	105	0.0854353133
14	54	0.0439381611
16	33	0.0268510985
18	40	0.032546786
20	15	0.0122050448
22	16	0.0130187144
24	15	0.0122050448
26	3	0.002441009
28	5	0.0040683483
30	11	0.0089503662
32	1	0.0008136697
34	3	0.002441009
36	1	0.0008136697

Bereich 1-100000:

Primzahlen (Bereich: 1-100000)	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
	9592	0.09592
Primzahlücken/-differenzen	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
1	1	0.0001042535
2	1224	0.1276063386
4	1215	0.1266680567
6	1940	0.2022518766
8	773	0.08058799
10	916	0.0954962469
12	965	0.1006046706
14	484	0.0504587156
16	339	0.0353419516
18	514	0.0535863219
20	238	0.0248123436
22	223	0.0232485405
24	206	0.0214762302
26	88	0.0091743119
28	98	0.0102168474
30	146	0.0152210175
32	32	0.0033361134
34	33	0.003440367
36	54	0.0056296914
38	19	0.0019808173
40	28	0.0029190992
42	19	0.0019808173
44	5	0.0005212677
46	4	0.0004170142

48	3	0.0003127606
50	5	0.0005212677
52	7	0.0007297748
54	4	0.0004170142
56	1	0.0001042535
58	4	0.0004170142
60	1	0.0001042535
62	1	0.0001042535
64	1	0.0001042535
72	1	0.0001042535

Bereich 1-1000000:

Primzahlen (Bereich: 1-1000000)	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
	78498	0.078498
Primzahlücken/ -differenzen	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
1	1	0.0000127392
2	8169	0.1040663456
4	8143	0.103735127
6	13549	0.1726031236
8	5569	0.0709444827
10	7079	0.0901806415
12	8005	0.1019771204
14	4233	0.0539249408
16	2881	0.036701572
18	4909	0.0625366251
20	2402	0.0305995057
22	2172	0.0276694948
24	2682	0.0341664756
26	1175	0.0149685342
28	1234	0.0157201457
30	1914	0.0243827868
32	550	0.0070065479
34	557	0.0070957222
36	767	0.0097709496
38	330	0.0042039288
40	424	0.0054014115
42	476	0.0060638488
44	202	0.002573314
46	155	0.0019745726
48	196	0.0024968789
50	106	0.0013503529
52	77	0.0009809167
54	140	0.0017834849
56	53	0.0006751764
58	54	0.0006879156
60	96	0.0012229611
62	16	0.0002038268
64	24	0.0003057403
66	48	0.0006114805
68	13	0.0001656093
70	22	0.0002802619
72	13	0.0001656093
74	12	0.0001528701
76	6	0.0000764351

78	13	0.0001656093
80	3	0.0000382175
82	5	0.0000636959
84	6	0.0000764351
86	4	0.0000509567
88	1	0.0000127392
90	4	0.0000509567
92	1	0.0000127392
96	2	0.0000254784
98	1	0.0000127392
100	2	0.0000254784
112	1	0.0000127392
114	1	0.0000127392

Bereich 1-10000000:

Primzahlen (Bereich: 1-10000000)	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
	664579	0.0664579
Primzahlücken/ -differenzen	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
1	1	0.0000015047
2	58980	0.0887479141
4	58621	0.0882077225
6	99987	0.1504516393
8	42352	0.0637275629
10	54431	0.0819029792
12	65513	0.0985781976
14	35394	0.0532577767
16	25099	0.0377667666
18	43851	0.0659831262
20	22084	0.0332300599
22	19451	0.0292681532
24	27170	0.0408830252
26	12249	0.0184312174
28	13256	0.0199464623
30	21741	0.0327139437
32	6364	0.0095759872
34	6721	0.0101131694
36	10194	0.0153390342
38	4498	0.0067681946
40	5318	0.0080020584
42	7180	0.0108038322
44	2779	0.0041815947
46	2326	0.0034999601
48	3784	0.0056938302
50	2048	0.0030816502
52	1449	0.0021803277
54	2403	0.0036158229
56	1072	0.0016130513
58	1052	0.001582957
60	1834	0.0027596418
62	543	0.0008170586
64	559	0.000841134
66	973	0.0014640848
68	358	0.0005386869
70	524	0.0007884691

72	468	0.0007042052
74	218	0.0003280272
76	194	0.0002919141
78	362	0.0005447057
80	165	0.0002482775
82	100	0.0001504712
84	247	0.0003716639
86	66	0.000099311
88	71	0.0001068346
90	141	0.0002121644
92	37	0.0000556743
94	39	0.0000586838
96	65	0.0000978063
98	29	0.0000436366
100	36	0.0000541696
102	34	0.0000511602
104	21	0.000031599
106	12	0.0000180565
108	26	0.0000391225
110	11	0.0000165518
112	11	0.0000165518
114	11	0.0000165518
116	7	0.000010533
118	4	0.0000060188
120	10	0.0000150471
122	3	0.0000045141
124	4	0.0000060188
126	8	0.0000120377
128	2	0.0000030094
130	1	0.0000015047
132	5	0.0000075236
134	1	0.0000015047
136	2	0.0000030094
138	2	0.0000030094
140	2	0.0000030094
146	1	0.0000015047
148	2	0.0000030094
152	1	0.0000015047
154	1	0.0000015047

Bereich 1-100000000:

Primzahlen (Bereich: 1-100000000)	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
	5761455	0.05761455
Primzahlücken/ -differenzen	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
1	1	1.736e-7
2	440312	0.0764237506
4	440257	0.0764142044
6	768752	0.1334301839
8	334180	0.0580027094
10	430016	0.074636702
12	538382	0.0934454925
14	293201	0.0508900963
16	215804	0.0374565106
18	384739	0.0667780969

20	202922	0.035220617
22	175945	0.0305382928
24	257548	0.0447019026
26	119465	0.0207352136
28	129567	0.0224885901
30	222847	0.0386789448
32	68291	0.0118530823
34	71248	0.0123663207
36	114028	0.0197915284
38	51756	0.0089831475
40	60761	0.0105461207
42	86637	0.0150373473
44	34881	0.0060541999
46	29327	0.0050902072
48	49824	0.0086478155
50	27522	0.0047769183
52	20595	0.0035746179
54	33593	0.0058306452
56	16595	0.0028803488
58	14611	0.0025359913
60	28439	0.0049360795
62	8496	0.0014746275
64	8823	0.001531384
66	15579	0.0027040045
68	6200	0.0010761171
70	8813	0.0015296483
72	8453	0.0014671641
74	4316	0.0007491163
76	3580	0.0006213708
78	6790	0.0011785217
80	3281	0.0005694742
82	2362	0.0004099659
84	4668	0.000810212
86	1597	0.0002771869
88	1637	0.0002841296
90	3337	0.000579194
92	1083	0.0001879734
94	971	0.0001685338
96	1641	0.0002848239
98	851	0.0001477057
100	878	0.0001523921
102	1059	0.0001838077
104	494	0.0000857422
106	404	0.0000701212
108	711	0.0001234063
110	454	0.0000787995
112	330	0.0000572772
114	487	0.0000845273
116	191	0.0000331513
118	181	0.0000314157
120	433	0.0000751546
122	131	0.0000227373
124	145	0.0000251673
126	204	0.0000354077
128	76	0.0000131911

130	78	0.0000135382
132	132	0.0000229109
134	50	0.0000086784
136	40	0.0000069427
138	93	0.0000161418
140	57	0.0000098933
142	30	0.000005207
144	51	0.0000088519
146	22	0.0000038185
148	34	0.0000059013
150	37	0.000006422
152	20	0.0000034713
154	13	0.0000022564
156	23	0.000003992
158	10	0.0000017357
160	11	0.0000019092
162	8	0.0000013885
164	5	8.678e-7
166	1	1.736e-7
168	8	0.0000013885
170	6	0.0000010414
172	1	1.736e-7
174	3	5.207e-7
176	5	8.678e-7
178	4	6.943e-7
180	4	6.943e-7
182	1	1.736e-7
184	1	1.736e-7
196	1	1.736e-7
198	1	1.736e-7
210	2	3.471e-7
220	1	1.736e-7

- a) Ermittle im Bereich von 1 bis 100 die unter den natürlichen Zahlen auftretenden Primzahlen durch Feststellung der Teileranzahl für jede natürliche Zahl.
- b) Die Häufigkeit von Primzahlen im Bereich von natürlichen Zahlen 1 bis n , $n \in \mathbf{N}$, wird beschrieben durch die Primzahlfunktion $\pi(n) = |\{p \text{ Primzahl} \mid p \leq n\}|$, die die Anzahl der Primzahlen kleiner gleich n zählt. Ermittle für den Bereich von 1 bis 100 die Werte der Primzahlfunktion (Wertetabelle, Graph der dazugehörigen Folge von Häufigkeiten).
- c) Die (auch auf den reellen Zahlen definierte) Primzahlfunktion $\pi(x) = |\{p \text{ Primzahl} \mid p \leq x\}|$, $x \in \mathbf{R}$, kann (asymptotisch) angenähert werden durch die Funktion:

$$\pi^*(x) = \frac{x}{\ln x - 1,08366}.$$

Mit dem Ansatz $\pi^*(x) = \frac{x}{a \ln x + b}$ sollen für die oben angegebenen Bereiche jeweils die Koeffizienten a , b so bestimmt werden, dass dort $\pi^*(x)$ eine Näherung für $\pi(x)$ darstellt.

- d) Die Primzahldichte wird definiert als $\delta(x) = \pi(x)/x$ und gibt die relative Häufigkeit, den Anteil der Primzahlen auf einem Intervall $[0; x]$ an. Skizziere eine Näherung zur Funktion der Primzahldichte.
- e) Primzahllücken sind (Primzahl-) Differenzen zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Primzahlen. Alle Differenzen – außer der zwischen den Primzahlen 2 und 3 – sind gerade; Primzahlzwillinge haben eine Differenz von 2, „sexy“ Primzahlen eine von 6. Die Primzahllücken 2, 4, 6 kommen in den oben aufgeführten Tabellen am häufigsten vor. Stelle diesen Sachverhalt durch geeignete Diagramme dar.

Lösung: a) Für jede natürliche Zahl $n = 1, \dots, 100$ sind nachfolgend die Teiler und deren Anzahl aufgeführt. Natürliche Zahlen mit zwei Teilern heißen Primzahlen.

Natürliche Zahl	Teiler (Primzahl)	Teileranzahl
1	1	1
2	1, 2 - Primzahl	2
3	1, 3 - Primzahl	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5 - Primzahl	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7 - Primzahl	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11 - Primzahl	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6
13	1, 13 - Primzahl	2
14	1, 2, 7, 14	4
15	1, 3, 5, 15	4
16	1, 2, 4, 8, 16	5
17	1, 17 - Primzahl	2
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6
19	1, 19 - Primzahl	2
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	6
21	1, 3, 7, 21	4
22	1, 2, 11, 22	4
23	1, 23 - Primzahl	2
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8
25	1, 5, 25	3
26	1, 2, 13, 26	4
27	1, 3, 9, 27	4
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	6
29	1, 29 - Primzahl	2
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	8
31	1, 31 - Primzahl	2
32	1, 2, 4, 8, 16, 32	6
33	1, 3, 11, 33	4
34	1, 2, 17, 34	4
35	1, 5, 7, 35	4
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	9
37	1, 37 - Primzahl	2
38	1, 2, 19, 38	4
39	1, 3, 13, 39	4
40	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40	8
41	1, 41 - Primzahl	2
42	1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42	8

43	1, 43 - Primzahl	2
44	1, 2, 4, 11, 22, 44	6
45	1, 3, 5, 9, 15, 45	6
46	1, 2, 23, 46	4
47	1, 47 - Primzahl	2
48	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48	10
49	1, 7, 49	3
50	1, 2, 5, 10, 25, 50	6
51	1, 3, 17, 51	4
52	1, 2, 4, 13, 26, 52	6
53	1, 53 - Primzahl	2
54	1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54	8
55	1, 5, 11, 55	4
56	1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56	8
57	1, 3, 19, 57	4
58	1, 2, 29, 58	4
59	1, 59 - Primzahl	2
60	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60	12
61	1, 61 - Primzahl	2
62	1, 2, 31, 62	4
63	1, 3, 7, 9, 21, 63	6
64	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64	7
65	1, 5, 13, 65	4
66	1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66	8
67	1, 67 - Primzahl	2
68	1, 2, 4, 17, 34, 68	6
69	1, 3, 23, 69	4
70	1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70	8
71	1, 71 - Primzahl	2
72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72	12
73	1, 73 - Primzahl	2
74	1, 2, 37, 74	4
75	1, 3, 5, 15, 25, 75	6
76	1, 2, 4, 19, 38, 76	6
77	1, 7, 11, 77	4
78	1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78	8
79	1, 79 - Primzahl	2
80	1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80	10
81	1, 3, 9, 27, 81	5
82	1, 2, 41, 82	4
83	1, 83 - Primzahl	2
84	1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84	12
85	1, 5, 17, 85	4
86	1, 2, 43, 86	4
87	1, 3, 29, 87	4

88	1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88	8
89	1, 89 - Primzahl	2
90	1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90	12
91	1, 7, 13, 91	4
92	1, 2, 4, 23, 46, 92	6
93	1, 3, 31, 93	4
94	1, 2, 47, 94	4
95	1, 5, 19, 95	4
96	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96	12
97	1, 97 - Primzahl	2
98	1, 2, 7, 14, 49, 98	6
99	1, 3, 9, 11, 33, 99	6
100	1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100	9

b) Die Primzahlfunktion $\pi(n) = |\{p \text{ Primzahl} \mid p \leq n\}|$ zählt die Anzahl der Primzahlen kleiner gleich einer natürlichen Zahl $n = 1, \dots, 100$.

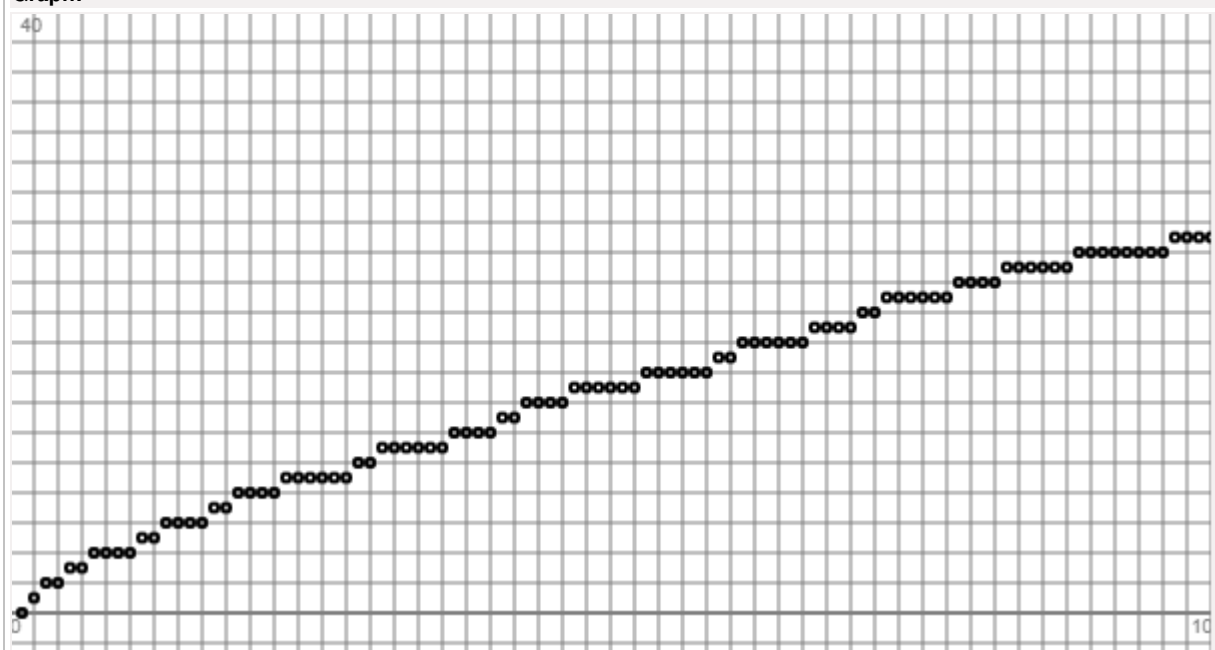
Wertetabelle:

n	$\pi(n)$
1	0
*2	1
*3	2
4	2
*5	3
6	3
*7	4
8	4
9	4
10	4
*11	5
12	5
*13	6
14	6
15	6
16	6
*17	7
18	7
*19	8
20	8
21	8
22	8
*23	9
24	9
25	9
26	9
27	9

28	9
*29	10
30	10
*31	11
32	11
33	11
34	11
35	11
36	11
*37	12
38	12
39	12
40	12
*41	13
42	13
*43	14
44	14
45	14
46	14
*47	15
48	15
49	15
50	15
51	15
52	15
*53	16
54	16
55	16
56	16
57	16
58	16
*59	17
60	17
*61	18
62	18
63	18
64	18
65	18
66	18
*67	19
68	19
69	19
70	19
*71	20
72	20

	*73	21
	74	21
	75	21
	76	21
	77	21
	78	21
	*79	22
	80	22
	81	22
	82	22
	*83	23
	84	23
	85	23
	86	23
	87	23
	88	23
	*89	24
	90	24
	91	24
	92	24
	93	24
	94	24
	95	24
	96	24
	*97	25
	98	25
	99	25
	100	25

Graph:



c) I. Für den Bereich 1, ... 100 bestimmen wir zur Primzahlfunktion $\pi(x)$ eine Näherungsfunktion

$\pi^*(x)$ durch die zwei Punkte $P(10|4) = P(10^1|4)$ und $Q(100|25) = Q(10^2|25)$ mit: $\pi(10) = 4$ und $\pi(100) = 25$. Wir erhalten mit dem Ansatz $\pi^*(x) = \frac{x}{a \ln x + b}$ ein lineares Gleichungssystem:

$$P(10|4): \frac{10}{a \ln(10) + b} = 4 \Leftrightarrow 10 = 4(a \cdot \ln(10) + b) \Leftrightarrow a \cdot \ln(10) + b = 2,5$$

$$Q(100|25): \frac{100}{a \ln(100) + b} = 25 \Leftrightarrow 100 = 25(a \cdot \ln(100) + b) \Leftrightarrow a \cdot \ln(100) + b = 4.$$

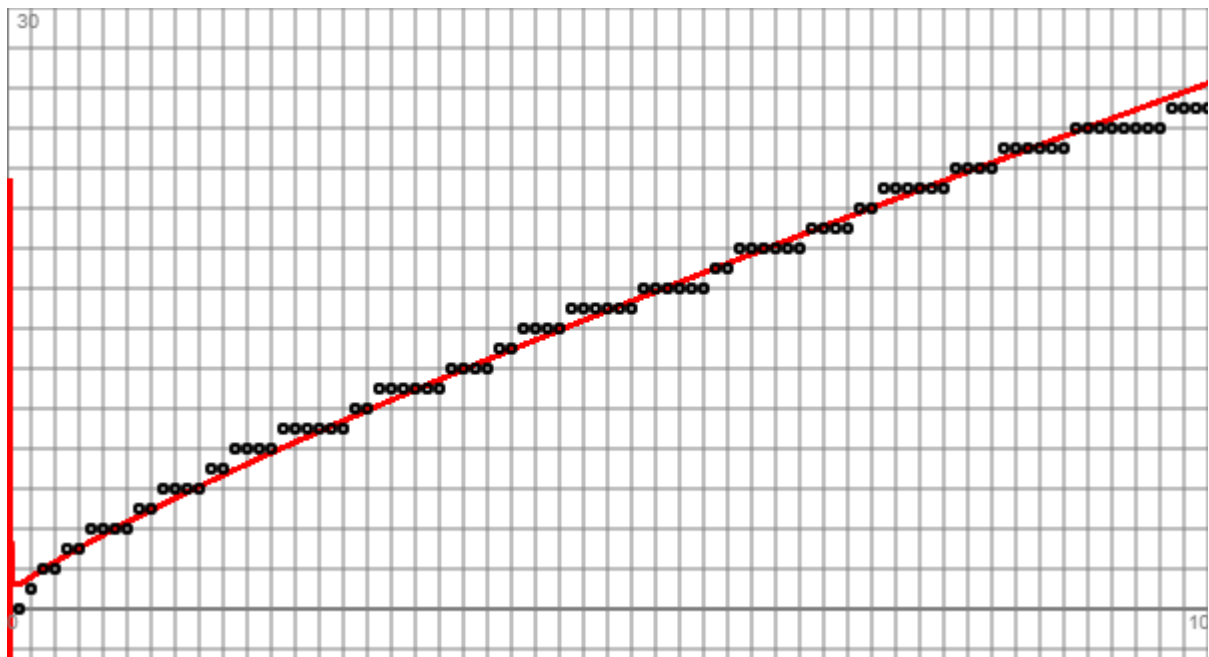
Subtraktion der Gleichungen des linearen Gleichungssystems ergibt:

$$a(\ln(100) - \ln(10)) = 4 - 2,5 = 1,5 \Rightarrow a = 0,6514,$$

woraus:

$$b = 4 - a \cdot \ln(100) = 4 - 0,6514 \cdot \ln(100) = 1$$

folgt. Die Näherungsfunktion lautet mithin: $\pi^*(x) = \frac{x}{0,6514 \ln x + 1}$.



II. Allgemein ergibt sich für einen Bereich 1 bis 10^k von natürlichen Zahlen mit den Punkten $P(10^j|\pi(j))$ und $Q(10^k|\pi(k))$, $j, k \in \mathbf{N}$, $j < k$, das lineare Gleichungssystem:

$$P(10^j|\pi(j)): \frac{10^j}{a \ln(10^j) + b} = \frac{10^j}{aj \ln(10) + b} = \pi(j) \Leftrightarrow aj \ln(10) + b = \frac{10^j}{\pi(j)}$$

$$Q(10^k|\pi(k)): \frac{10^k}{a \ln(10^k) + b} = \frac{10^k}{ak \ln(10) + b} = \pi(k) \Leftrightarrow ak \ln(10) + b = \frac{10^k}{\pi(k)}$$

mit den Lösungen:

$$ak \ln(10) - aj \ln(10) = a(k - j) \ln(10) = \frac{10^k}{\pi(k)} - \frac{10^j}{\pi(j)} \Rightarrow a = \frac{\frac{10^k}{\pi(k)} - \frac{10^j}{\pi(j)}}{(k - j) \ln(10)}$$

$$b = \frac{10^k}{\pi(k)} - ak \ln(10) = \frac{10^k}{\pi(k)} - k \ln(10) \cdot \frac{\frac{10^k}{\pi(k)} - \frac{10^j}{\pi(j)}}{(k - j) \ln(10)} = \frac{10^k}{\pi(k)} - \frac{k}{k - j} \left(\frac{10^k}{\pi(k)} - \frac{10^j}{\pi(j)} \right)$$

$$= \frac{k}{k - j} \cdot \frac{10^j}{\pi(j)} - \frac{j}{k - j} \cdot \frac{10^k}{\pi(k)} = \frac{10^j k}{\pi(j)} - \frac{10^k j}{\pi(k)},$$

so dass

$$\pi^*(x) = \frac{x}{\frac{10^k - 10^j}{\pi(k) - \pi(j)} \cdot \ln x - \frac{10^k j - 10^j k}{k - j}} = \frac{(k - j)x}{\left(\frac{10^k - 10^j}{\pi(k) - \pi(j)}\right) \cdot \ln x - \frac{10^k j - 10^j k}{k - j}}$$

die Näherungsfunktion der Primzahlfunktion $\pi(x)$ durch die Punkte $P(10^j|\pi(j))$ und $Q(10^k|\pi(k))$ ist.

III. Für die Bereiche 1 bis 100, ..., 1 bis 100000000 von natürlichen Zahlen erhalten wir gemäß II. die folgende Übersicht:

k	Primzahlfunktion $\pi(x)$ -> Punkte	a =	b =	Näherung $\pi^*(x)$ =
2	$\pi(10)=4, \pi(100)=25 \rightarrow$ $P(10^1 4), Q(10^2 25)$	0,6514	1	$\frac{x}{0,6514 \ln x + 1}$
3	$\pi(10)=4, \pi(1000)=168 \rightarrow$ $P(10^1 4), Q(10^3 168)$	0,7497	0,7738	$\frac{x}{0,7497 \ln x + 0,7738}$
3	$\pi(100)=25, \pi(1000)=168 \rightarrow$ $P(10^2 25), Q(10^3 168)$	0,8479	0,0952	$\frac{x}{0,8479 \ln x + 0,0952}$
4	$\pi(100)=25, \pi(10000)=1229 \rightarrow$ $P(10^2 25), Q(10^4 1229)$	0,8983	-0,1367	$\frac{x}{0,8983 \ln x - 0,1367}$
5	$\pi(100)=25, \pi(100000)=9592 \rightarrow$ $P(10^2 25), Q(10^5 9592)$	0,9302	-0,2836	$\frac{x}{0,9302 \ln x - 0,2836}$
5	$\pi(1000)=168, \pi(100000)=9592 \rightarrow$ $P(10^3 168), Q(10^5 9592)$	0,9713	-0,7571	$\frac{x}{0,9713 \ln x - 0,7571}$
6	$\pi(1000)=168, \pi(1000000)=78498 \rightarrow$ $P(10^3 168), Q(10^6 78498)$	0,9825	-0,8344	$\frac{x}{0,9825 \ln x - 0,8344}$
7	$\pi(1000)=168, \pi(10000000)=664579 \rightarrow$ $P(10^3 168), Q(10^7 664579)$	0,9874	-0,8687	$\frac{x}{0,9874 \ln x - 0,8687}$
7	$\pi(10000)=1229, \pi(10000000)=664579 \rightarrow$ $P(10^4 1229), Q(10^7 664579)$	1,0004	-1,0772	$\frac{x}{1,0004 \ln x - 1,0772}$
8	$\pi(10000)=1229, \pi(100000000)=5761455 \rightarrow$ $P(10^4 1229), Q(10^8 5761455)$	1,0011	-1,0833	$\frac{x}{1,0011 \ln x - 1,0833}$
10	$\pi(100000)=9592, \pi(1000000000)=455052511 \rightarrow$ $P(10^5 9592), Q(10^{10} 455052511)$	1,0032	-1,1240	$\frac{x}{1,0032 \ln x - 1,1240}$
12	$\pi(1000000)=78498, \pi(10000000000)=37607912018 \rightarrow$ $P(10^6 78498), Q(10^{12} 37607912018)$	1,0026	-1,1118	$\frac{x}{1,0026 \ln x - 1,1118}$
14	$\pi(10000000)=664579, \pi(10^{14})=3204941750802 \rightarrow$ $P(10^7 664579), Q(10^{14} 3204941750802)$	1,0023	-1,1076	$\frac{x}{1,0023 \ln x - 1,1076}$
16	$\pi(100000000)=5761455, \pi(10^{16})=279238341033925 \rightarrow$ $P(10^8 5761455), Q(10^{16} 279238341033925)$	1,0019	-1,0982	$\frac{x}{1,0019 \ln x - 1,0982}$

Zugrunde liegt der Übersicht auch die nachstehende Tabelle über die Werte der Primzahlfunktion $\pi(x)$:

n	$\pi(n)$
10	4
10^2	25
10^3	168
10^4	1229
10^5	9592
10^6	78498
10^7	664579
10^8	5761455

10^9	50847534
10^{10}	455052511
10^{11}	4118054813
10^{12}	37607912018
10^{13}	346065536839
10^{14}	3204941750802
10^{15}	29844570422669
10^{16}	279238341033925
10^{17}	2623557157654233
10^{18}	24739954287740860
10^{19}	234057667276344607
10^{20}	2220819602560918840

IV. Für große 10er-Potenzen zeigen die hier auf den einzelnen Zahlbereichen erzeugten Näherungsfunktionen $\pi^*(x)$ durch zwei Punkte P und Q eine gute Übereinstimmung mit der allgemein bekannten Näherung $\pi^*(x) = \frac{x}{\ln x - 1,08366}$ für die Primzahlfunktion $\pi(x)$, d.h.: für die jeweils er-

mittelten Koeffizienten a und b kann wohl in der Tat $a = 1$, $b = -1,08366$ angenommen werden. Die Näherung $\pi^*(x)$ kann von $\pi(x)$ als Primzahlfunktion um maximal 5 Prozent nach oben oder unten abweichen.

d) Als Näherung der Dichtefunktion $\delta(x) = \pi(x)/x$ verwenden wir mit $\pi^*(x) = \frac{x}{\ln x - 1,08366}$:

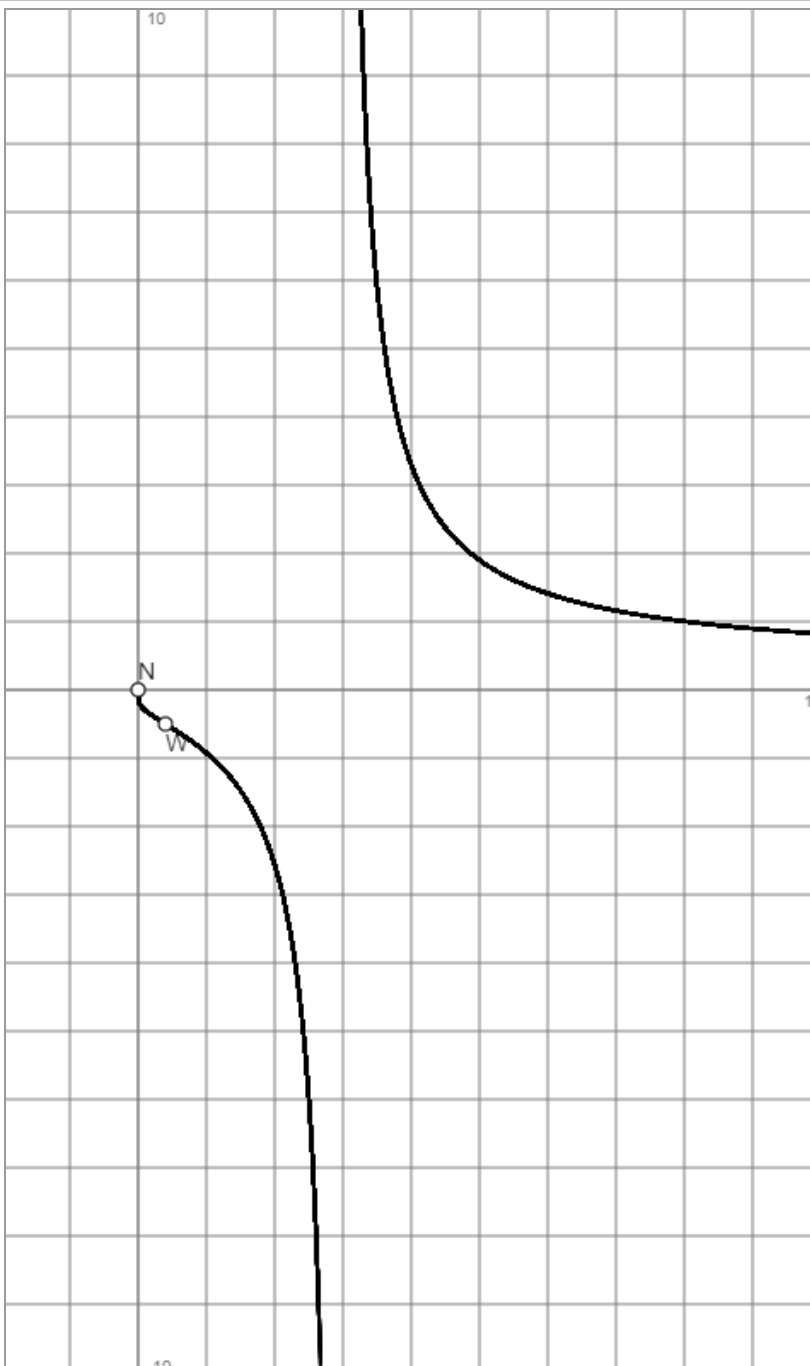
$$\delta^*(x) = \pi^*(x)/x = \frac{\frac{x}{\ln x - 1,08366}}{x} = \frac{1}{\ln x - 1,08366}$$

mit Definitionsmenge $D_{\delta^*} = (0; +\infty) \setminus \{2,955\}$. Wertetabellen und Graphen sind dann nachstehend aufgeführt:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	-	-	[Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt $S_y(0 0)$]
0.398	-0.4988	-0.63	0	Wendepunkt W(0.4 -0.5)
0.5	-0.5629	-0.63	-0.16	
1	-0.9231	-0.85	-0.72	
1.5	-1.4752	-1.45	-1.89	
2	-2.5627	-3.28	-6.77	
2.5	-5.9855	-14.33	-62.89	
2.955	-	-	-	Pol $x = 2.955$
3	65.5639	-1435.66	63230.28	
3.5	5.9031	-9.96	36.43	
4	3.301	-2.72	5.18	
4.5	2.3769	-1.26	1.61	
5	1.9009	-0.72	0.69	
5.5	1.6093	-0.47	0.36	
6	1.4116	-0.33	0.21	
6.5	1.2683	-0.25	0.13	

7	1.1594	-0.19	0.09	
7.5	1.0735	-0.15	0.06	
8	1.0039	-0.13	0.05	
8.5	0.9463	-0.11	0.04	
9	0.8978	-0.09	0.03	
9.5	0.8562	-0.08	0.02	
10	0.8202	-0.07	0.02	

Graph:



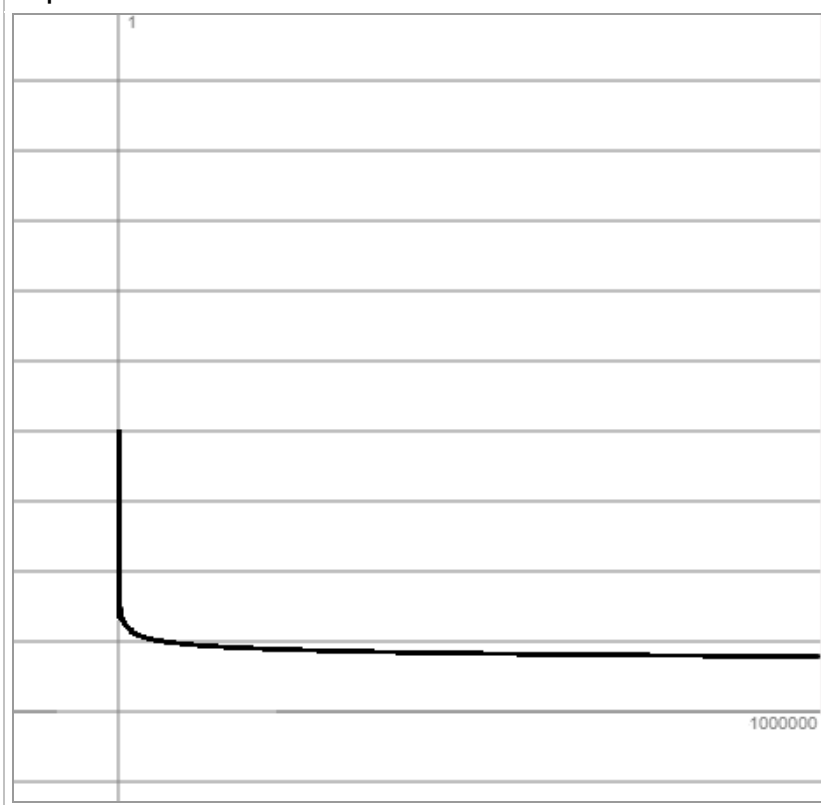
x	f(x)	Besondere Kurvenpunkte
10	0.4	
100	0.25	
1000	0.168	
10000	0.123	

20000	0.1134	
30000	0.1084	
40000	0.1051	
50000	0.1027	
60000	0.1008	
70000	0.0993	
80000	0.098	
90000	0.0969	
100000	0.0959	
110000	0.095	
120000	0.0942	
130000	0.0935	
140000	0.0929	
150000	0.0923	
160000	0.0917	
170000	0.0912	
180000	0.0908	
190000	0.0903	
200000	0.0899	
210000	0.0895	
220000	0.0891	
230000	0.0888	
240000	0.0885	
250000	0.0881	
260000	0.0878	
270000	0.0875	
280000	0.0873	
290000	0.087	
300000	0.0867	
310000	0.0865	
320000	0.0863	
330000	0.086	
340000	0.0858	
350000	0.0856	
360000	0.0854	
370000	0.0852	
380000	0.085	
390000	0.0848	
400000	0.0846	
410000	0.0845	
420000	0.0843	
430000	0.0841	
440000	0.084	
450000	0.0838	

460000	0.0836	
470000	0.0835	
480000	0.0833	
490000	0.0832	
500000	0.0831	
510000	0.0829	
520000	0.0828	
530000	0.0827	
540000	0.0825	
550000	0.0824	
560000	0.0823	
570000	0.0822	
580000	0.0821	
590000	0.0819	
600000	0.0818	
610000	0.0817	
620000	0.0816	
630000	0.0815	
640000	0.0814	
650000	0.0813	
660000	0.0812	
670000	0.0811	
680000	0.081	
690000	0.0809	
700000	0.0808	
710000	0.0807	
720000	0.0806	
730000	0.0805	
740000	0.0804	
750000	0.0804	
760000	0.0803	
770000	0.0802	
780000	0.0801	
790000	0.08	
800000	0.0799	
810000	0.0799	
820000	0.0798	
830000	0.0797	
840000	0.0796	
850000	0.0796	
860000	0.0795	
870000	0.0794	
880000	0.0793	
890000	0.0793	

900000	0.0792	
910000	0.0791	
920000	0.0791	
930000	0.079	
940000	0.0789	
950000	0.0789	
960000	0.0788	
970000	0.0787	
980000	0.0787	
990000	0.0786	
1000000	0.0785	

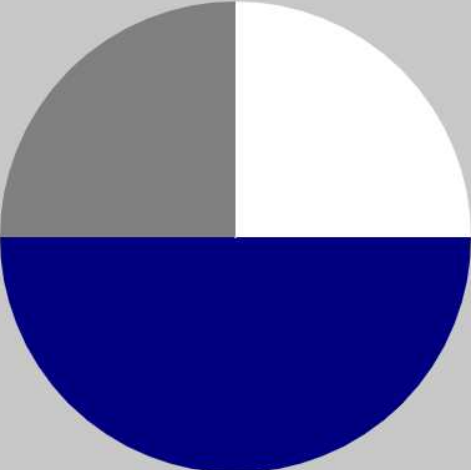
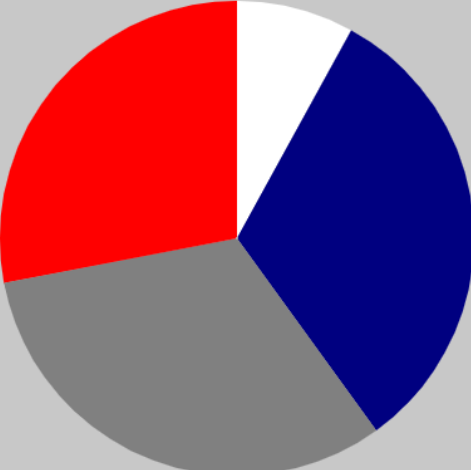
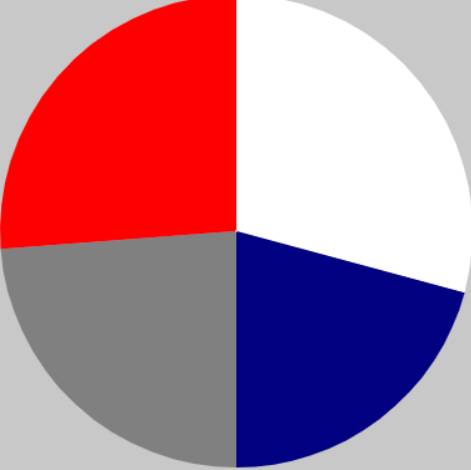
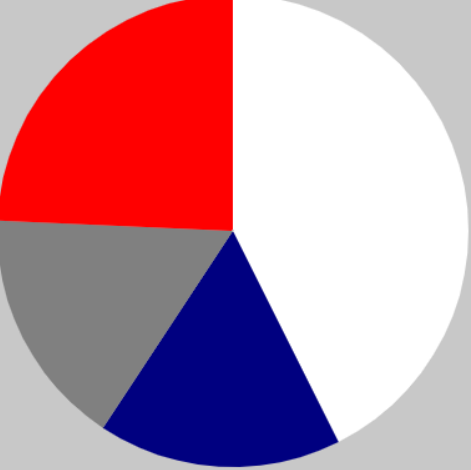
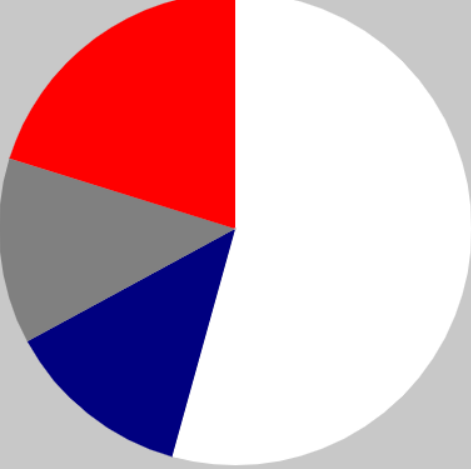
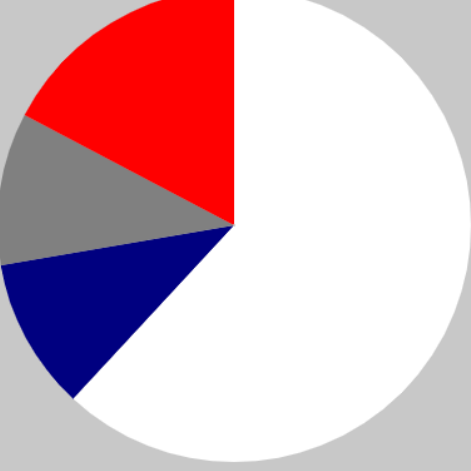
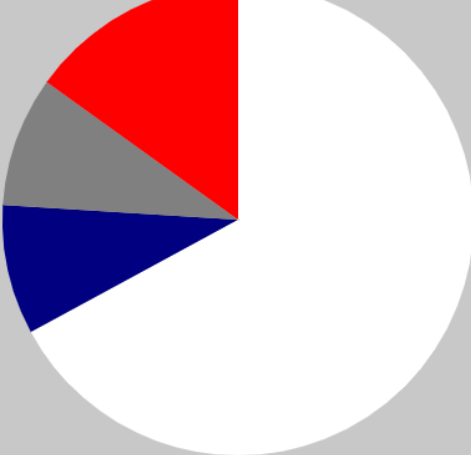
Graph:



e) Aus den in der Aufgabenstellung aufgeführten Tabellen über die Bereiche 1 bis 10, 1 bis 100, ..., 1 bis 1000000000 ergibt sich die folgende Tabelle hinsichtlich einiger Primzahlücken:

Bereich (n)	Primzahlfunktion $\pi(n)$	Primzahlücke 2	Primzahlücke 4	Primzahlücke 6	Größte Primzahlücke
1 bis 10	4	2 – 50%	1 – 25%	-	4
1 bis 10^2	25	8 – 32%	8 – 32%	7 – 28%	8
1 bis 10^3	168	35 – 20,83%	40 – 23,81%	44 – 26,19%	20
1 bis 10^4	1229	205 – 16,68%	202 – 16,44%	299 – 24,33%	36
1 bis 10^5	9592	1224 – 12,76%	1215 – 12,67%	1940 – 20,23%	72
1 bis 10^6	78498	8169 – 10,41%	8143 – 10,37%	13549 – 17,26%	114
1 bis 10^7	664579	58980 – 8,87%	58621 – 8,88%	99987 – 15,05%	154
1 bis 10^8	5761455	440312 – 7,64%	440257 – 7,64%	768752 – 13,34%	220

Die Daten der Primzahlücken 2, 4, 6 in der vorstehenden Liste werden nachstehend als Kreisdiagramme für die Bereiche 1 bis 10, 1 bis 100, ..., 1 bis 1000000000 umgesetzt:

<p>1-10: 2: 50% 4: 25% sonst: 25%</p>		<p>1-10²: 2: 32% 4: 32% 6: 28% sonst: 8%</p>	
<p>1-10³: 2: 20,8% 4: 23,8% 6: 26,2% sonst: 29,2%</p>		<p>1-10⁴: 2: 16,7% 4: 16,4% 6: 24,3% sonst: 42,6%</p>	
<p>1-10⁵: 2: 12,8% 4: 12,7% 6: 20,2% sonst: 54,3%</p>		<p>1-10⁶: 2: 10,4% 4: 10,4% 6: 17,3% sonst: 61,9%</p>	
<p>1-10⁷: 2: 8,9% 4: 8,9% 6: 15,1% sonst: 67,1%</p>		<p>1-10⁸: 2: 7,6% 4: 7,6% 6: 13,3% sonst: 71,5%</p>	