Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Grundaufgaben zur Analysis II

Einleitung: Die Analysis ist die Lehre von den reellen Funktionen und kreist daher um Gleichungen, die Differential- und Integralrechnung, Funktionsuntersuchungen, Bestimmungsaufgaben sowie grafisches Ab- und Aufleiten.

Funktionen

Funktionen sind Abbildungen f: D_f -> **R** von reellen Zahlen in reelle Zahlen, d.h.: sie ordnen vermöge einer Zuordnung x -> f(x) = y (Funktionsterm) jedem reellen x des (maximalen) Definitionsbereichs D_f genau ein reelles y des Wertebereichs W_f zu. Funktionen können vervielfacht, addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert, potenziert, verknüpft werden, d.h. es gilt: r·f(x), f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)·g(x), f(x)/g(x), $f(x)^{g(x)}$ und g(f(x)) sind reguläre Funktionsterme. Funktionen erscheinen in der Analysis als ganz und gebrochen rationale Funktionen, Exponential- und trigonometrische Funktionen.

Gerade: $y = mx + c$
Allgemeine Parabel: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Ganz rationale Funktionen: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
Gebrochen rationale Funktionen: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$
Trigonometrische Funktionen: $f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$, $f(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d$
Natürliche Exponentialfunktionen: $f(x) = a \cdot e^{bx+c} + d$ o.ä.

Funktionen

Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0$			
a ≠ 0, b = 0	a ≠ 0, c = 0	a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0	a =1, b = p, c = q
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax+b) = 0$ $x = 0 \vee ax + b = 0$ $x = 0 \vee ax = -b$ $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$<0), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$>0)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung (Mitternachtsformel): D = $b^2 - 4ac$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)	Gemischt quadratische Gleichung (p-q-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)

	Quadratische Gleichung hat die Form: $ax(x-x_1)=0$ (bei 2 Lösungen $x=0$, $x=x_1=-\frac{b}{a}$)	Quadratische Gleichung hat die Form: $a(x-x_1)^2=0$ (bei 1 Lösung $x=x_1$), $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ (bei 2 Lsg. $x=x_1$, $x=x_2$)	Quadratische Gleichung hat die Form: $(x-x_1)^2=0$ (bei 1 Lösung $x=x_1$), $(x-x_1)(x-x_2)=0$ (bei 2 Lsg. $x=x_1$, $x=x_2$)

Quadratische Gleichungen

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
Ausklammern (und Satz vom Nullprodukt):
$ax^n+\ldots+bx^m = 0 \Leftrightarrow x^m(ax^{n-m}+\ldots+b) = 0 \Leftrightarrow x=0,\ ax^{n-m}+\ldots+b = 0$
Substitution:
$ax^4 + bx^2 + c = 0$ | Substitution: $z=x^2$
$az^2 + bz+c =0$
$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | (Rücksubstitution)
$x^2 = z_1,\ x^2 = z_2$ | √
$x = \pm\sqrt{z_1},\ x = \pm\sqrt{z_2}$ (falls $z_1, z_2 > 0$)

Polynomgleichungen

Einfache Exponentialgleichungen:
$ae^{bx+c} = d \Leftrightarrow x=\frac{\ln\left(\frac{d}{a}\right)-c}{b}$
Quadratische Exponentialgleichungen:
$ae^{2x} + be^x + c = 0$ | Substitution: $z=e^x$
$az^2 + bz+c =0$
$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | (Rücksubstitution)
$e^x = z_1,\ e^x = z_2$ | ln()
$x = \ln(z_1),\ x = \ln(z_2)$ (falls $z_1, z_2 > 0$)

Exponentialgleichungen

Einfache trigonometrische Gleichungen:	
$\sin(bx)=r$	$\cos(bx)=r$
r = -1: x=3π/2b usw. r = 0: x=0, x=π/b, x=2π/b usw. r = 1: x=π/2b usw.	r = -1: x=π/b usw. r = 0: x=π/2b, x=3π/2b usw. r = 1: x=0, x=2π/b usw.
	$b \neq 0,\ 0 \leq x \leq 2\pi$
Quadratische trigonometrische Gleichungen:	
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$ | Substitution: $z=\sin x$	$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$ | Substitution: $z=\cos x$
$az^2 + bz+c =0$	
$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | (Rücksubstitution)	
$\sin x = z_1,\ \sin x = z_2$	$\cos x = z_1,\ \cos x = z_2$
	$0 \leq x \leq 2\pi$

Trigonometrische Gleichungen

Integralgleichungen:
$\int_a^x f(t)dt = r \Leftrightarrow [F(t)]_a^x = r \Leftrightarrow F(x)-F(a)=r \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=$ (Lösung[en])

Integralgleichungen

Differentiation, Integration

Ableitungsregeln (Funktionen u(x), v(x)):	*Aufleitungsregeln* (Funktionen u(x), v(x)):
$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$ (Summenregel)	$\int(u(x)+v(x))dx=\int u(x)dx+\int v(x)dx$ (Summenr.)

$(u(x)+r)' = u'(x)$ (additive Konstante) $(ku(x))' = ku'(x)$ (multiplikative Konstante) $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ (Produktregel) $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ (Quotientenregel) $(u(v(x)))' = u'(v(x))\cdot v'(x)$ (Kettenregel) $(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel) $((ax+b)^n)' = na(ax+b)^{n-1}$ (Potenzregel) $(\sin x)' = \cos x$ (Sinusfunktion) $(\cos x)' = -\sin x$ (Kosinusfunktion) $(e^x)' = e^x$ (Exponentialfunktion) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (Natürlicher Logarithmus) $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$ (Sinusfunktion) $(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$ (Kosinusfunktion) $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$ (Exponentialfunktion) (reelle Konstanten a, b, k, n, r)	$\int (ku(x))dx = k\int u(x)dx$ (multiplikative Konstante) $\int (u'(x)\cdot v(x))dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx$ (Produktregel) $\int u(v(x))v'(x)dx = \int u(v(x))dv(x)$ (Substitutionsregel) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ (Potenzregel, n≠-1) $\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\|$ (Potenzregel) $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{n+1}$ (Potenzregel) $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\|ax+b\|$ (Potenzregel) $\int \sin x dx = -\cos x$ (Sinusfunktion) $\int \cos x dx = \sin x$ (Kosinusfunktion) $\int e^x dx = e^x$ (Exponentialfunktion) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ (Sinusfunktion) $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$ (Kosinusfunktion) $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}$ (Exponentialfunktion)

Regeln der Differentiation und Integration

Möglichkeit 1	**Möglichkeit 2**
Funktion f(x), Stelle x_0	Funktion f(x), Stelle x_0
1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)
Funktionswert $f(x_0)$, Steigung $f'(x_0)$	Ansatz: y = mx + c als Tangentenformel
Einsetzen in Tangentenformel	Steigung $m = f'(x_0)$
Tangente: t: $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	y-Achsen-Abschnitt $c = f(x_0) - mx_0$

Tangentengleichung

Möglichkeit 1	**Möglichkeit 2**
Funktion f(x), Stelle x_0	Funktion f(x), Stelle x_0
1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)
Funktionswert $f(x_0)$, Steigung $f'(x_0)$	Ansatz: y = mx + c als Normalenformel
Einsetzen in Normalenformel	Steigung $m = -\frac{1}{f'(x_0)}$
Normale: n: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$	y-Achsen-Abschnitt $c = f(x_0) - mx_0$

Normalengleichung

Vorgehensweise:
Funktion f(x) -> Integrationsregeln -> F(x) als eine Stammfunktion von f(x) mit. F‘(x) = f(x)
Vorgehensweise:
Zu einer Funktion f(x) ist die Menge der Stammfunktionen F(x) eine Schar paralleler Kurven, die sich durch eine Integrationskonstante C voneinander unterscheiden. Einer speziellen Stammfunktion F(x) durch einen Punkt $P(x_0\|y_0)$ entspricht eine Integrationskonstante C, bestimmbar über $F(x_0) = y_0$ und mit $F_0(x)$ als schon errechneter Stammfunktion zu f(x), so dass $C = y_0 – F_0(x_0)$ und $F(x) = F_0(x) + C$ gilt.

Stammfunktion

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
Vorgehensweise:
Bestimmung einer Stammfunktion F(x) zu f(x)
Einsetzen der oberen und der unteren Grenze b und a in die Stammfunktion
Stammfunktionswert der oberen Grenze minus Stammfunktionswert der unteren Grenze bilden

Bestimmtes Integral

Vorgehensweise:
Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f(x): f(x) = 0 (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Nullstellen sind: x_1, x_2, x_3, …
Bestimmung einer Stammfunktion F(x) zu f(x)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = [F(x)]_{x_2}^{x_3}$, $\cdots$
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + …$

Fläche zwischen Funktion und x-Achse

Vorgehensweise:
Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionen f(x) und g(x): f(x) = g(x) (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Schnittstellen sind: x_1, x_2, x_3, … (n Schnittstellen, n-1 Flächen)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu h(x) = f(x) – g(x) (Differenzfunktion h(x) vereinfachen)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx = [H(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} h(x)dx = [H(x)]_{x_2}^{x_3}$, $\cdots$
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + …$

Fläche zwischen zwei Funktionen

Funktionsuntersuchungen

Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: f‘(x), f‘‘(x), f‘‘‘(x)
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> $N(x_1\|0)$, $N(x_2\|0)$, …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung f‘(x) = 0 lösen, Lösungen in f‘‘(x) einsetzen): a) f‘(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) $f''(x_1) < 0$ -> $H(x_1\|f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0$ -> $T(x_1\|f(x_1))$; $f''(x_2) < 0$ -> $H(x_2\|f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0$ -> $T(x_2\|f(x_2))$; …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung f‘(x) = 0 lösen): f‘(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> $P_1(x_1\|f(x_1))$, $P_2(x_2\|f(x_2))$, …
IV. Wendepunkte (Gleichung f‘‘(x) = 0 lösen, Lösungen in f‘‘‘(x) einsetzen): a) f‘‘(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) $f'''(x_1) \neq 0$ -> $W(x_1\|f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0$ -> $W(x_2\|f(x_2))$; …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ -> $S(x_0\|f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) x->x_1, x>x_1: f(x) -> +∞, x->x_1, x<x_1: f(x) -> -∞ oder: x->x_1, x>x_1: f(x) -> -∞, x->x_1, x<x_1: f(x) -> +∞ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) x->x_2, x>x_2: f(x) -> +∞, x->x_2, x<x_2: f(x) -> +∞ oder: x->x_2, x>x_2: f(x) -> -∞, x->x_2, x<x_2: f(x) -> -∞ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) x->x_3: f(x) -> r => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r

VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0)>0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0)<0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0)>0$); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0)>0$) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0)>0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0)<0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.
VIII. Symmetrie: a) Achsensymmetrie zur y-Achse: f(-x) = f(x) (gerade) b) Punktsymmetrie zum Ursprung: f(-x) = -f(x) (ungerade) c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch. d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch. d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion. e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw. f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.
IX. Verhalten für betragsmäßig große x ($x \to \infty$, $x \to -\infty$): a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion): $a_n>0$ | n ungerade | n gerade $x \to \infty$ | $f(x) \to \infty$ | $f(x) \to \infty$ $x \to -\infty$ | $f(x) \to -\infty$ | $f(x) \to \infty$ $a_n<0$ | n ungerade | n gerade $x \to \infty$ | $f(x) \to -\infty$ | $f(x) \to -\infty$ $x \to -\infty$ | $f(x) \to \infty$ | $f(x) \to -\infty$ b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner): $x \to \pm\infty$: $f(x) \to 0 = y$ (n < m) $x \to \pm\infty$: $f(x) \to a/b = y$ (n = m; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner) $x \to \pm\infty$: $f(x) \to \pm\infty$ (n > m) mit y als waagerechter Asymptote. c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil: $x \to -\infty$: $e^x \to 0$, $x \to +\infty$: $e^x \to +\infty$ $x \to -\infty$: $f(x) = ae^{bx+c} + d \to \pm\infty$ (b<0), $\to d = y$ (b>0); $x \to +\infty$: $f(x) = ae^{bx+c} + d \to d = y$ (b<0), $\to \pm\infty$ (b>0) $x \to -\infty$: $f(x) = (a_nx^n+\ldots)e^{bx} \to \pm\infty$ (b<0), $\to 0 = y$ (b>0); $x \to +\infty$: $f(x) = (a_nx^n+\ldots)e^{bx} \to 0 = y$ (b<0), $\to \pm\infty$ (b>0) mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

Funktion: $f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$ (a = Amplitude, b = Streckung entlang x-Achse, c = Verschiebung entlang x-Achse, d = Verschiebung entlang y-Achse)
I. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): $f(x) = 0 \to x_1, x_2, \ldots \to N(x_1\|0), N(x_2\|0), \ldots$

II. Hochpunkte, Tiefpunkte: Periode p = 2π/b -> …, T(c+p/4|d+a), H(c+3p/4|d–a), … (a<0); …, H(c+p/4|d+a), T(c+3p/4|d–a), … (a>0)
III. Wendepunkte: Periode p = 2π/b -> …, W(c|d), W(c+p/2|d), W(c+p|d), …
Funktion: $f(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d$ (a = Amplitude, b = Streckung entlang x-Achse, c = Verschiebung entlang x-Achse, d = Verschiebung entlang y-Achse = Mittellinie)
I. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), …
II. Hochpunkte, Tiefpunkte: Periode p = 2π/b -> …, T(c|d+a), H(c+p/2|d–a), … (a<0); …, H(c|d+a), T(c+p/2|d–a), … (a>0)
III. Wendepunkte: Periode p = 2π/b -> …, W(c+p/4|d), W(c+3p/4|d), …

Funktionsuntersuchung von trigonometrischen Funktionen

Bestimmungsaufgaben

Funktion: y = mx + c (m als Steigung, c als y-Achsen-Abschnitt)	
Punkt P(x_1|y_1), Steigung m	Punkte P(x_1|y_1), Q(x_2|y_2)
<u>Punktsteigungsform</u>: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$	<u>Zweipunkteform</u>: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Umstellen zu: $y = m(x-x_1) + y_1$	Umstellen zu: $y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1$
	Steigung: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
<u>Ursprungsgerade</u> y = mx (durch den Ursprung): $y = \frac{y_1}{x_1}x$ mit: $m = \frac{y_1}{x_1}$	

Bestimmungsaufgabe für Geraden

Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
	Funktion und Ableitungen:	
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
3 Unbekannte a, b, c-> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen	4 Unbekannte a, b, c, d -> 4 Funktionseigenschaften -> 4 Gleichungen	5 Unbekannte a, b, c, d, e -> 5 Funktionseigenschaften -> 5 Gleichungen
	Lineare Gleichungen vom Typ:	
$f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 + b = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + 2bx_2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 + 2b = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 3bx_1^3 + 2cx_2 + d = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 6bx_3 + 2c = y_3$
	für bestimmte x- und y-Werte	
Funktion 2. Grades **(Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades** **(Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades** **(Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
$f(x) = ax^2 + c$ $f'(x) = 2ax$	$f(x) = ax^3 + cx$ $f'(x) = 3ax^2 + c$ $f''(x) = 6ax$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2c$
2 Unbekannte a, c-> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	2 Unbekannte a, c -> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	3 Unbekannte a, c, e -> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen

Lineare Gleichungen vom Typ:		
$f(x_1)=ax_1^2+c=y_1$ $f'(x_2)=2ax_2=y_2$	$f(x_1)=ax_1^3+cx_1=y_1$ $f'(x_2)=3ax_2^2+c=y_2$ $f''(x_3)=6ax_3=y_3$	$f(x_1)=ax_1^4+cx_1^2+e=y_1$ $f'(x_2)=4ax_2^3+2cx_2=y_2$ $f''(x_3)=12ax_3^2+2c=y_3$
für bestimmte x- und y-Werte		
Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
Funktion 2. Grades **(Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades** **(Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades** **(Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))

Aufstellen des linearen Gleichungssystems:

Gleichungen mit Unbekannten a, b, … bzw. a, c, … gemäß den Funktionseigenschaften:

Punkt P(x_1|y_1):	$f(x_1) = y_1$
Nullstelle x_0 bzw. N(x_0|0):	$f(x_0) = 0$
Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt:	$f(0) = 0$
y-Achsenabschnittspunkt S_y(0|y_0):	$f(0) = y_0$
Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$
Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$
Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$
Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt H/T(x_E|$y_€$):	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$
Krümmung k in x_1:	$f''(x_1) = k$
Wendepunkt x_W:	$f''(x_W) = 0$
Wendepunkt W(x_W|y_W):	$f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$
Wendetangente y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$
Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$
Sattelpunkt x_S:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$
Sattelpunkt S(x_S|y_S)::	$f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$

Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, b, … ->		
Funktion 2. Grades **(Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades** **(Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades** **(Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, c, … ->		
Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
Aufstellen der Funktionsgleichung:		
$f(x)=ax^2+bx+c$	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
Funktion 2. Grades **(Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades** **(Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades** **(Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
Aufstellen der Funktionsgleichung:		
$f(x)=ax^2+c$	$f(x)=ax^3+cx$	$f(x)=ax^4+cx^2+e$

Bestimmungsaufgabe für ganz rationale (symmetrische) Funktionen (2.-4. Grades)

Ganz rationale Funktion f(x) vom Grad n
Vorgegebene Nullstellen x_1, x_2, … x_k der Funktion f(x) mit Vielfachheiten n_1, n_2, … n_k, $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$: N(x_1|0), N(x_2|0), … N(x_k|0) -> $f(x)=a(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}...(x-x_k)^{n_k}$
Vorgegebener Punkt P(x_0|y_0): $f(x_0) = y_0$ -> a
Aufstellen der Funktionsgleichung: $f(x)=a(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}...(x-x_k)^{n_k}$

Bestimmungsaufgabe für ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades, Produktdarstellung)

Grafisches Ab- und Aufleiten

Bzgl. der Null-, Extrem- und Wendestellen sowie der Monotonie und Krümmung ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen Funktionen f(x), Ableitungen f'(x), f''(x) und Stammfunktionen F(x) und bei asymptotischem Verhalten:

Stammfunktion F(x)	**Funktion f(x)**
Hochpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von + nach -
Tiefpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von - nach +
steigende Monotonie in x	$f(x) \geq 0$
fallende Monotonie in x	$f(x) \leq 0$
Wendestelle bei x_W	Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Wendestelle als Sattelpunkt bei x_W	(doppelte) Nullstelle bei x_W Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Linkskrümmung in x	steigende Monotonie in x
Rechtskrümmung in x	fallende Monotonie in x
$x \to \pm\infty$: $F(x) \to ax + C$	$x \to \pm\infty$: $f(x) \to a$
$x \to \pm\infty$: $F(x) \to C$	$x \to \pm\infty$: $f(x) \to 0$

Funktion f(x)	**Ableitung f'(x)**
Hochpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von + nach -
Tiefpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von - nach +
steigende Monotonie in x	$f'(x) \geq 0$
fallende Monotonie in x	$f'(x) \leq 0$
Wendestelle bei x_W	Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Wendestelle als Sattelpunkt bei x_W	(doppelte) Nullstelle bei x_W Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Linkskrümmung in x	steigende Monotonie in x, $[f''(x) \geq 0]$
Rechtskrümmung in x	fallende Monotonie in x, $[f''(x) \leq 0]$
$x \to \pm\infty$: $f(x) \to ax + C$	$x \to \pm\infty$: $f'(x) \to a$
$x \to \pm\infty$: $f(x) \to C$	$x \to \pm\infty$: $f'(x) \to 0$

Es gilt also im Allgemeinen beim Ableiten:

$$\mathit{Wendestelle} \xrightarrow{\;'\;} \mathit{Extremstelle} \xrightarrow{\;'\;} \mathit{Nullstelle}\ ,$$

beim Aufleiten:

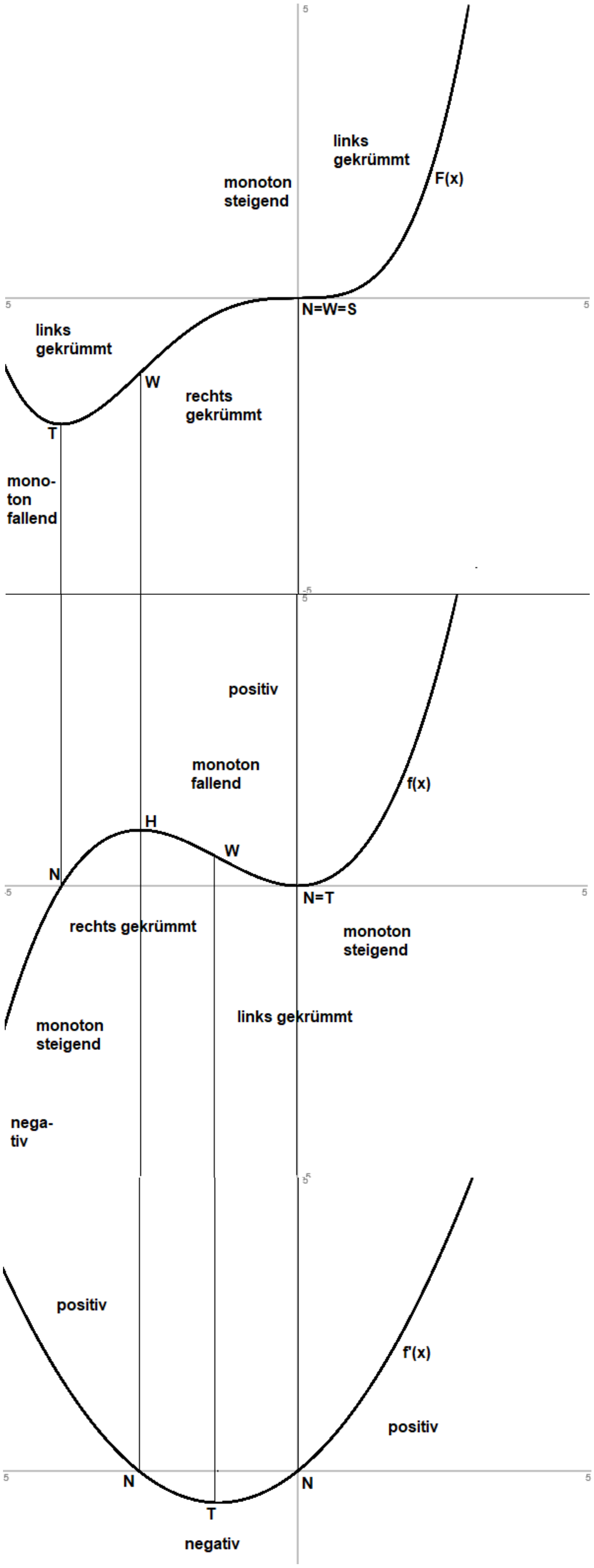
$$\mathit{Nullstelle} \xrightarrow{\int} \mathit{Extremstelle} \xrightarrow{\int} \mathit{Wendestelle}$$

oder die NEW-Regel:

```
F(x)    N E W
f(x)      N E W
f'(x)       N E W
```

Symmetrieeigenschaften (zur y-Achse, zum Ursprung) spielen auch eine Rolle:

a) Die Ableitung f'(x) einer achsensymmetrischen Funktion f(x) ist punktsymmetrisch. b) Die Ableitung f'(x) einer punktsymmetrischen Funktion f(x) ist achsensymmetrisch. c) Für eine punktsymmetrische Funktion f(x) ist jede Stammfunktion F(x) achsensymmetrisch. d) Für eine achsen-symmetrische Funktion f(x) existiert eine punktsymmetrische Stammfunktion mit F(0) = 0.



H = Hochpunkt, N = Nullstelle, S = Sattelpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion f(x) mit:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 5\,.$$

a) Welche Art von Symmetrie hat die Funktion f(x)?

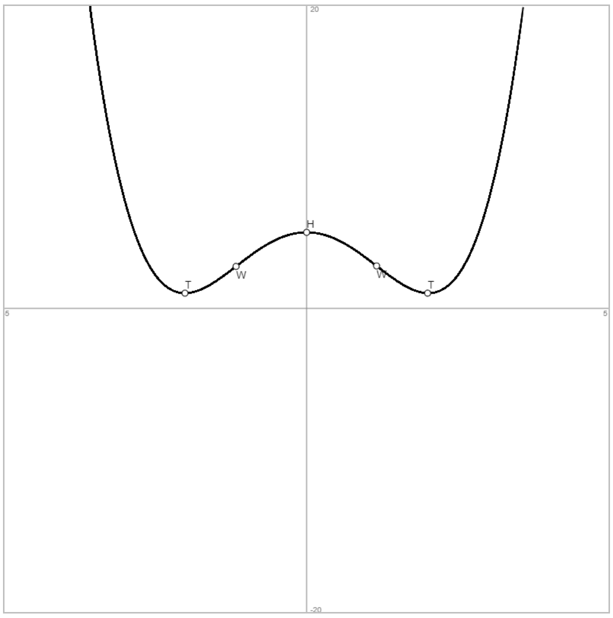
b) Bestimme die Extrempunkte der Funktion f(x) als Tief- und Hochpunkte.

c) Wo ist die Funktion f(x) monoton fallend, wo monoton steigend?

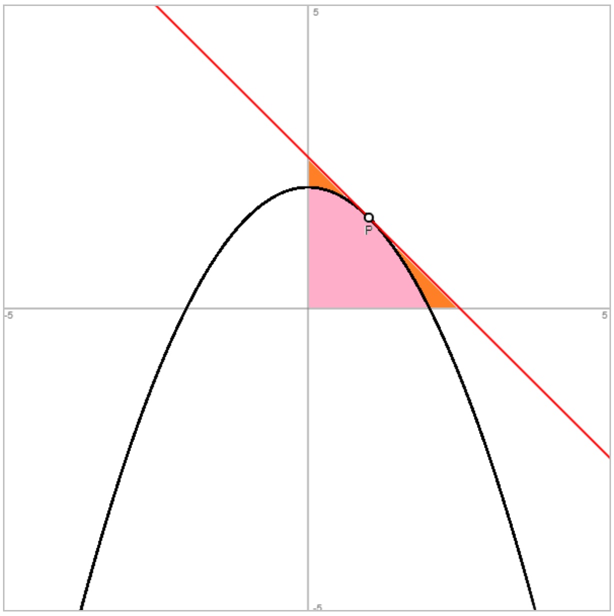
d) Besitzt die Funktion f(x) Nullstellen?

Vorgehensweise: Symmetrie, Differentiation/Integration, Funktionsuntersuchung, Gleichungen.

Lösung: a) Gerade Hochzahlen -> Achsensymmetrie zur y-Achse; b) $f'(x) = x^3 – 4x = 0$ -> Tiefpunkte T(-2|1), T(2|1), Hochpunkt H(0|5); c) Tiefpunkte, Hochpunkt -> (-∞; -2): f(x) monoton fallend, (-2; 0): f(x) monoton steigend, (0; 2): f(x) monoton fallend, (2; +∞): f(x) monoton steigend; d) f(x): +∞ -> +∞, Tiefpunkte mit f(±2) = 1 > 0 -> f(x) > 0 -> keine Nullstellen.



1|2



Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion f(x) mit:

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2\,.$$

a) Berechne die Tangente im Punkt P(1|f(1)) an die Funktion f(x).

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das die Tangente mit den Achsen des x-y-Koordinatensystems bildet.

c) Bestimme den prozentualen Anteil der Fläche zwischen der Funktion f(x) und den nichtnegativen Abschnitten der Achsen des x-y-Koordinatensystems an der Dreiecksfläche.

Vorgehensweise: Differentiation/Integration, Tangentengleichung, Flächenberechnung.

Lösung: a) Tangente t: y = -x+2,5; b) Tangente t -> S_y(0|2,5), N(2,5|0) -> Dreiecksfläche A_Δ = 2,5·2,5/2 = 3,125 FE; c) Funktion f(x) -> S_y(0|2), N(2|0) -> Fläche A = $\int_0^2 f(x)\,dx$ = 8/3 FE; prozentualer Anteil: A/A_Δ = 8/3/3.125 = 64/75 ≈ 0,853 = 85,3 %.

Aufgabe 3: Vorausgesetzt wird die Exponentialfunktion:

$$f(x) = 2e^{-0,5x} - 6\,.$$

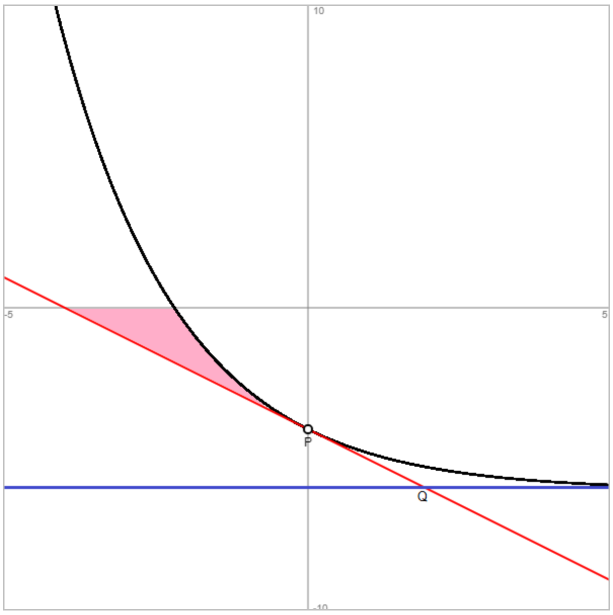
a) Bestimme die Tangente zur Funktion f(x) im Schnittpunkt P der Funktion mit der y-Achse. Unter welchem Winkel schneidet die Funktion die Achse?

b) Gib die zur Funktion f(x) gehörende waagerechte Asymptote an. In welchem Punkt Q schneiden sich Tangente und Asymptote?

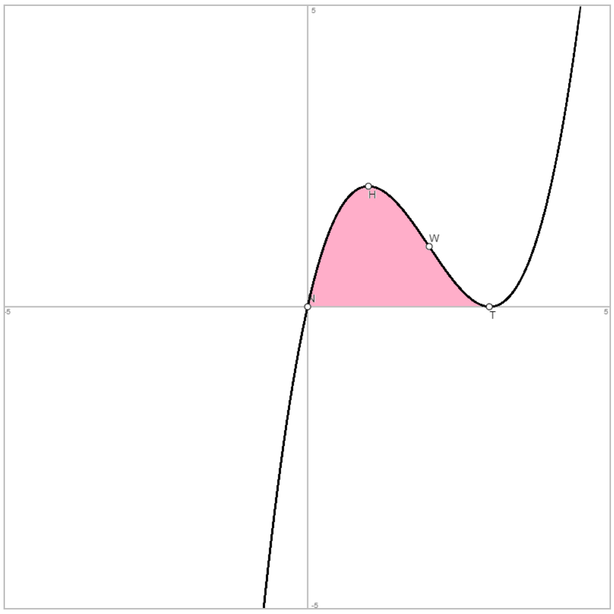
c) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen Funktion f(x), Tangente und x-Achse.

Vorgehensweise: Differentiation/Integration, Tangentengleichung, Flächenberechnung.

Lösung: a) P(0|-4), Tangente t: $y = -x-4$, Winkel $\varphi = 45°$; b) waagerechte Asymptote y mit: $x \to +\infty$: $f(x) \to -6 = y$; Schnittpunkt Q(2|-6); c) Funktion f(x): N(-ln(9)|0), Tangente t: N(-4|0) -> Fläche: $A = 4 \cdot 4/2 - \left|\int_{-\ln(9)}^{0} f(x)\,dx\right| = 8 - 5{,}183 = 2{,}817$ FE.



3|4



Aufgabe 4: a) Gesucht ist eine ganz rationale Funktion 3. Grades, deren Kurve die x-Achse des Koordinatensystems im Ursprung schneidet, durch den Punkt P(2|1) verläuft sowie den Tiefpunkt T(3|0) besitzt. Berechne den Funktionsterm f(x).

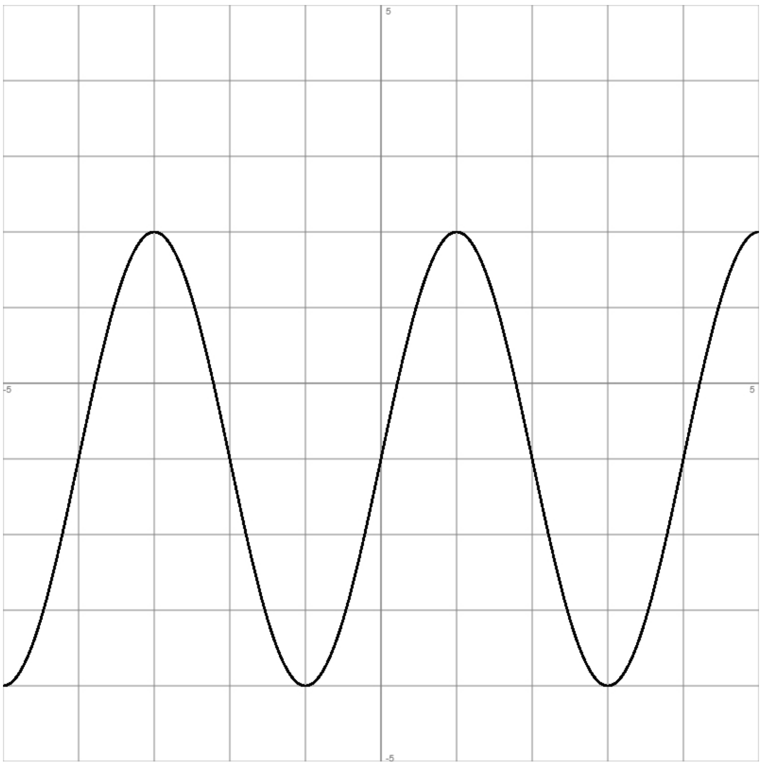
b) Bestimme den Hoch- und Wendepunkt der Funktion f(x).

c) Berechne den Inhalt der von Funktion f(x) und x-Achse eingeschlossenen Fläche.

Vorgehensweise: Bestimmungsaufgaben, Funktionsuntersuchung, Schnittstellen- und Flächenberechnung.

Lösung: a) Nullstellen N(0|0) einfach, N(3|0) doppelt, P(2|1) -> $f(x) = 0{,}5x(x-3)^2 = 0{,}5x^3-3x^2+4{,}5x$; b) $f'(x) = 1{,}5x^2-6x+4{,}5$, $f''(x) = 3x-6$ -> Hochpunkt H(1|2), Wendepunkt W(2|1); c) $A = \int_0^3 f(x)\,dx = 3{,}375$ FE.

Aufgabe 5: Gegeben ist der nachstehend gezeichnete Graph einer Sinusfunktion f(x):



a) Bestimme den Funktionsterm der Sinusfunktion f(x).
b) Wie entsteht die Funktion f(x) aus der Sinusfunktion y = sin(x)?

c) Gib alle Extrem- und Wendepunkte der Funktion f(x) im Intervall [0; 4] an.

d) Berechne die Nullstelle der Funktion f(x), die den kleinsten positiven x-Wert hat.

e) Berechne exakt die Tangente des auf der y-Achse liegenden Wendepunktes.

Vorgehensweise: Bestimmungsaufgaben, Funktionsuntersuchung, Gleichungen.

Lösung: a) Periode p = 4, Mittellinie d = -1, Amplitude a = 3 -> f(x) = 3·sin(πx/2) – 1; b) y = sin(x) -> Stauchung entlang der x-Achse -> y = sin(πx/2) -> Streckung entlang der y-Achse -> y = 3·sin(πx/2) -> Verschiebung um 1 LE nach unten -> f(x); c) Funktion f(x) auf Intervall [0; 4] -> Hochpunkt H(1|2), Tiefpunkt T(3|-4), Wendepunkte W(0|-1), W(2|-1), W(4|-1); d) f(x) = 0 -> N(0,21|0); e) W(0|-1), Tangente t: y = 1,5πx – 1.

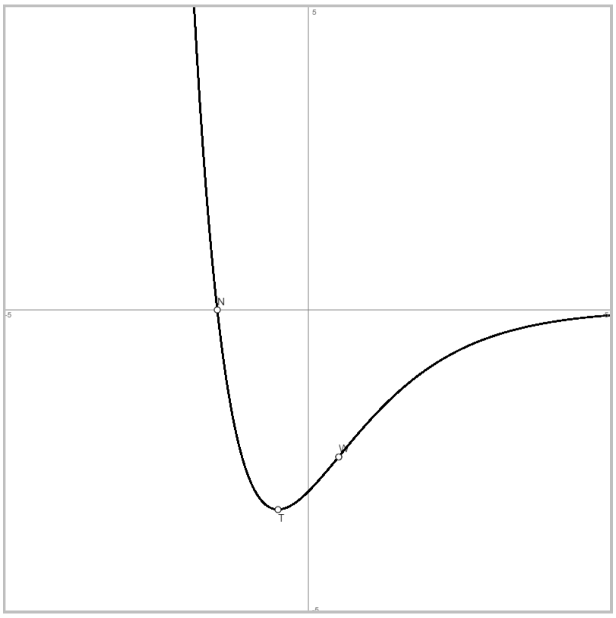
Aufgabe 6: a) Zeige, dass $F(x) = (2x+5)e^{-x}$ eine Stammfunktion zu $f(x) = -(2x+3)e^{-x}$ ist.

b) Bestimme zur Funktion $f(x) = -(2x+3)e^{-x}$ die Stammfunktion, deren Graph durch den Punkt P(0|8) verläuft.

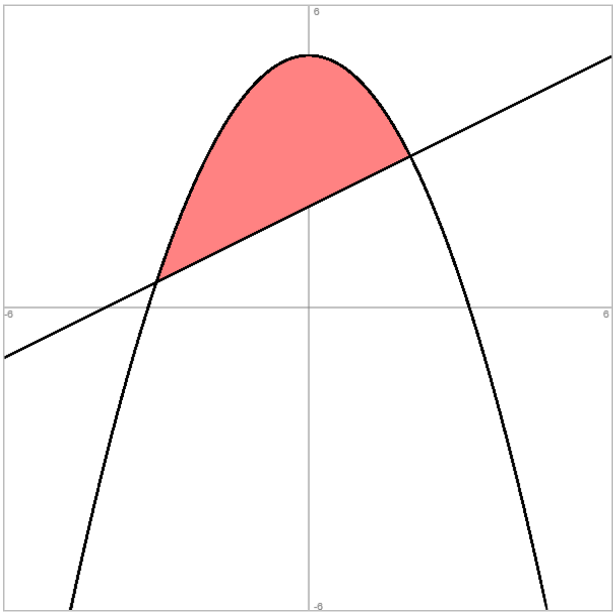
c) Bestimme die Nullstelle, den Extrem- und den Wendepunkt der Funktion $f(x) = -(2x+3)e^{-x}$.

Vorgehensweise: Differentiation/Integration, Kurvendiskussion.

Lösung: a) F'(x) = f(x) nach der Produkt- und Kettenregel; b) Ansatz: F(x) = $(2x+5)e^{-x}$ + C mit F(0) = 8 -> C = 3 -> F(x) = $(2x+5)e^{-x}$ + 3; c) Funktion f(x): Nullstelle N(-1,5|0), Tiefpunkt T(-0,5|-2√e), Wendepunkt W(0,5|-4/√e).



6|7



Aufgabe 7: a) Eine zur y-Achse des Koordinatensystems achsensymmetrische Parabel 2. Grades schneidet die Achse bei y = 5 und verläuft durch den Punkt P(4|-3). Bestimme den Funktionsterm der Parabel f(x).

b) Berechne die Schnittpunkte zwischen der Parabel f(x) und der Geraden y = 0,5x + 2.

c) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen f(x) und y.

Vorgehensweise: Bestimmungsaufgaben, Gleichungen, Flächenberechnung.

Lösung: a) H(0|5), P(4|-3), Ansatz: f(x) = ax^2 + c -> f(x) = $-0{,}5x^2+5$; b) Gleichung: f(x) = y -> x=-3, x=2 -> Schnittpunkte S_1(-3|0,5), S_2(2|3); c) Fläche: A = $\int_{-3}^{2}$ (f(x)–y) dx = 125/12 FE.

Aufgabe 8: Löse die Gleichungen:

a) $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$

b) $(x^2+2x-3)\cdot(e^{3x-2}-1) = 0$

c) $\sin^2(x) - 3\cdot\sin(x) + 2 = 0$, $0 \le x \le 2\pi$

d) $\int_{2}^{x} t^3 dt = \frac{609}{4}$

e) $\int_{1}^{x} \frac{4}{t^2} dt = 2$

Vorgehensweise: Gleichungen, Integration.

Lösung: Lösungsmenge L =: a) {-3, 3}; b) {-3, 2/3, 1}; c) {π/2}; d) {-5; 5}; e) {2}.

Aufgabe 9: Bilde die 1. Ableitungen f'(x) von f(x):

a) $f(x) = \frac{7}{2x^2} + \frac{\sqrt{x}}{4}$

b) $f(x) = \frac{2}{15}(7-4x)^5$

c) $f(x) = (x^2+3)e^{-2x}$

d) $f(x) = \sin^3(2x)$

e) $f(x) = \pi^2 \cos(\frac{\pi}{2}x) - e^{2x+2} + e^2$

f) Welche mathematische Regeln finden beim Ableiten Verwendung?

Vorgehensweise: Differentiation.

Lösung: f'(x) =: a) $-7x^{-3}+1/\sqrt{x}/8$; b) $-8(7-4x)^4/3$; c) $(-2x^2+2x-6)e^{-2x}$; d) $6\cdot\sin^2(2x)$; e) $-\pi^3\sin(\pi x/2)/2-2e^{2x+2}$; f) Ableitungsregeln -> Regeln mit additiver, multiplikativer Konstante, Summen-, Produkt-, Kettenregel, Regeln für Potenzen, Sinus, Kosinus, natürliche Exponentialfunktion.

Aufgabe 10: Bestimme eine Stammfunktion F(x) zu f(x):

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{x^3} + 5$

b) $f(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} + 4$

c) $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{4}x) - 1$

d) $f(x) = (11x+1)^3$

e) Bewerte die Aussage: „Zwei verschiedene Stammfunktionen haben nie dieselbe Ableitung."

Vorgehensweise: Integration.

Lösung: F(x) =: a) $x^4/12+1/x^2+5x$; b) $-e^{-2x}/6+4x$; c) $-8\cos(\pi x/4)/\pi-x$; d) $(11x+1)^4/44$; e) Gegenbeispiel: $F_1(x) = x^3/3$, $F_2(x) = x^3/3 + 6$ -> $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) = x^2$ -> Aussage ist falsch.

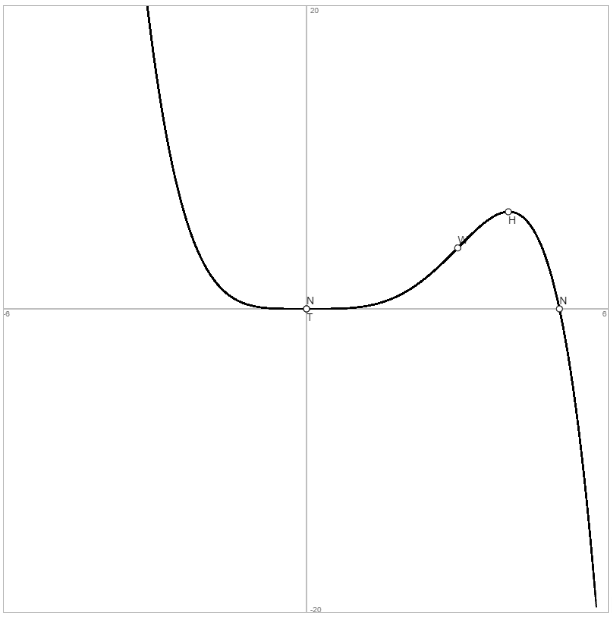
Aufgabe 11: a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4$. Ermittle die Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte der Funktion. Skizziere den Graphen von f(x).

b) Welche Aussagen lassen sich bzgl. der Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte der Ableitungsfunktion f'(x) treffen? Skizziere den Graphen von f'(x).

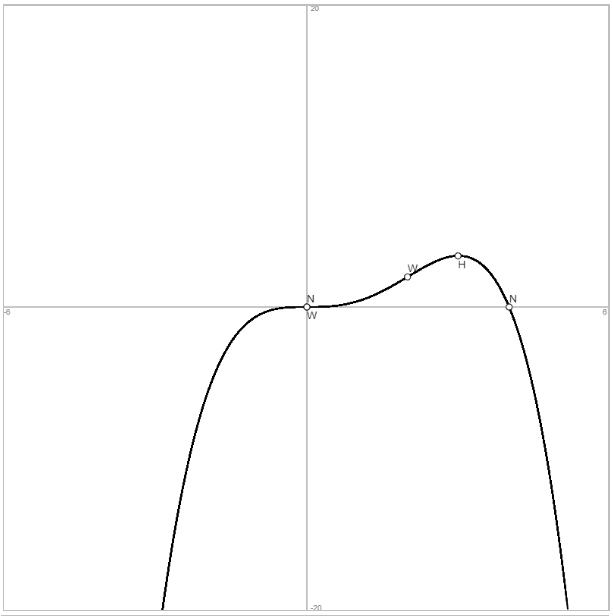
c) Welche Aussagen lassen sich bzgl. der Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte der Stammfunktion treffen? Skizziere den Graphen von F(x).

Vorgehensweise: Funktionsuntersuchung, NEW-Regel.

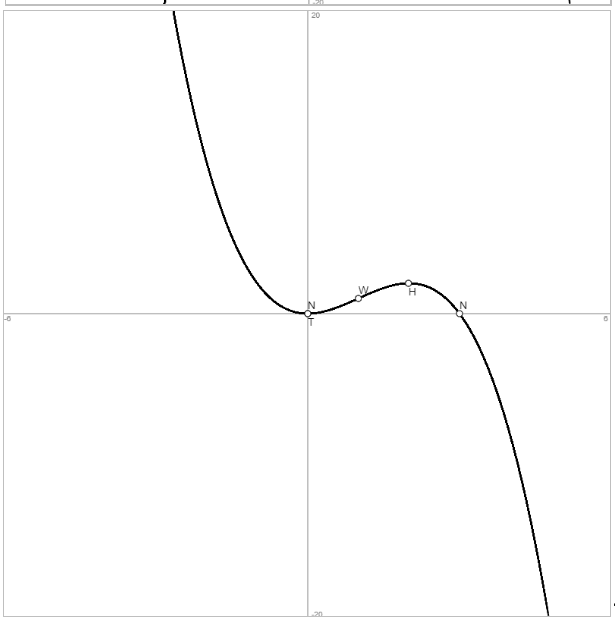
Lösung: a) Funktion f(x): $f'(x) = 1{,}5x^2-0{,}5x^3$, $f''(x) = 3x-1{,}5x^2$, $f'''(x) = 3-3x$ -> Nullstellen N(0|0), N(4|0), Hochpunkt H(3|3,375), Wendepunkt W(2|2), Sattelpunkt S(0|0); b) Funktion f'(x): Nullstellen N(0|0), N(3|0), Tiefpunkt T(0|0), Hochpunkt H(2|2), Wendepunkt W(1|1); c) Funktion $F(x) = x^4/8–x^5/40$: [Nullstellen N(0|0), N(5|0)], Tiefpunkt T(0|0), Hochpunkt H(4|6,4), Wendepunkt W(3|4).



F(x)

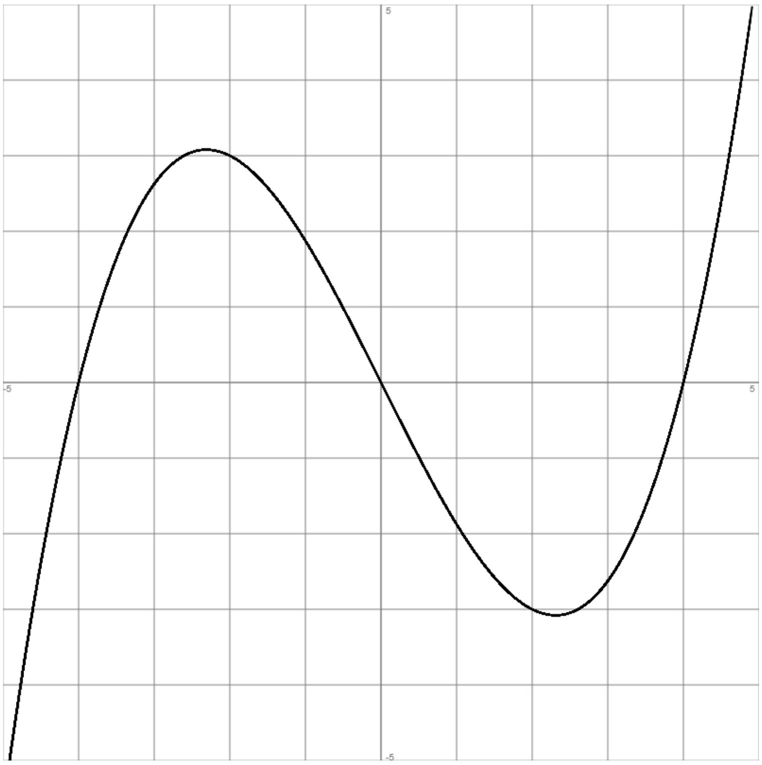


f(x)



f‘(x)

Aufgabe 12: Die Abbildung zeigt die Funktion f(x) auf dem Intervall [-5; 5].



Begründe, welche der folgenden Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar sind.

a) Die Stammfunktion F(x) ist symmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems.
b) Der Graph der Stammfunktion F(x) besitzt vier Nullstellen.
c) Die Stammfunktion F(x) verfügt über zwei Tiefpunkte.

d) $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$.

e) $\int_{-2}^{0} f'(x)dx = -3$.

f) Der Graph der 1. Ableitung f'(x) hat an der Stelle x = 0 einen Hochpunkt.
g) Der Graph der 2. Ableitung f''(x) ist symmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

Vorgehensweise: Grafisches Ab- und Aufleiten u.a. nach der NEW-Regel und unter Berücksichtigung der Symmetrie.

Lösung: a) richtig, b) unentscheidbar, c) falsch; d) richtig; e) richtig; f) falsch; g) richtig.

Aufgabe 13: Welche mathematischen Aussagen sind für genügend oft differenzierbare Funktionen f(x) wahr, welche falsch? Begründe:

a) Ganz rationale Funktionen f(x) vom Grad 4 haben vier Nullstellen.

b) Ganz rationale Funktionen f(x) ungeraden Grades haben mindestens eine Nullstelle.

c) An den Nullstellen einer Funktion f(x) besitzt die Stammfunktion F(x) Extrempunkte.

d) Für jede Funktion f(x) sind Hoch-, Sattel- oder Tiefpunkte Punkte mit waagerechten Tangenten.

e) Eine steigende negative Ableitung f'(x) bedeutet, dass die Funktion f(x) streng monoton fallend ist.

f) Die Wendetangente schneidet die Funktion f(x) immer.

g) Zur y-Achse symmetrische, nicht konstante Funktionen f(x) besitzen auf der y-Achse, falls dort definiert, immer einen Extrempunkt.

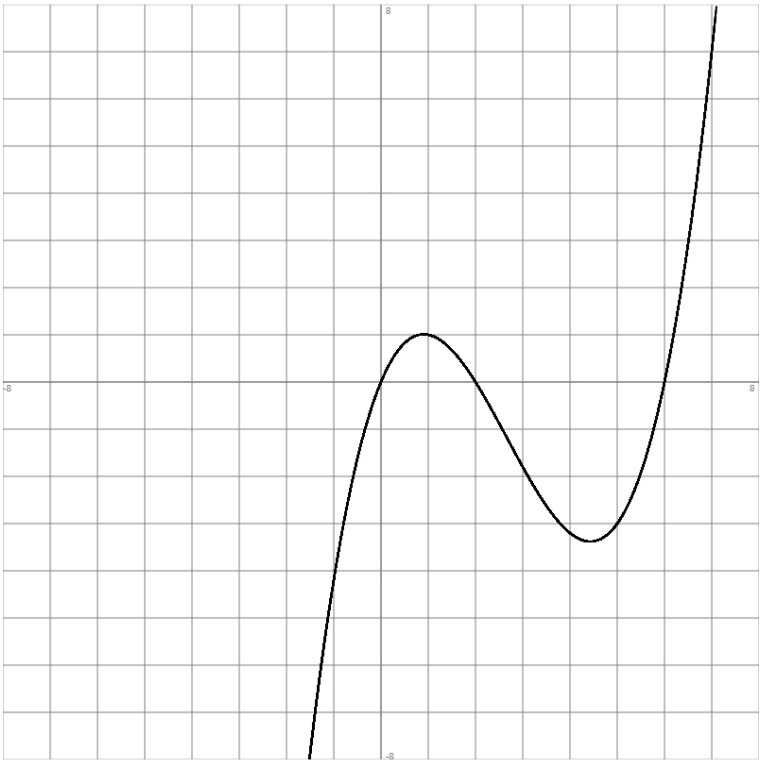
h) Die Ableitungsfunktion f'(x) einer zum Ursprung punktsymmetrischen Funktion f(x) ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

i) Die Stammfunktion F(x) eine zur y-Achse achsensymmetrischen Funktion f(x) zum Ursprung punktsymmetrisch.

Vorgehensweise: NEW-Regel, Symmetrie.

Lösung: a) falsch, b) richtig, c) falsch, d) richtig, e) richtig, f) richtig, g) falsch, h) richtig, i) falsch.

Aufgabe 14: a) Der Graph einer ganz rationalen Funktion f(x) 3. Grades hat das folgende Aussehen (Abbildung: x-Werte: [-8; 8], y-Werte: [-8; 8]):



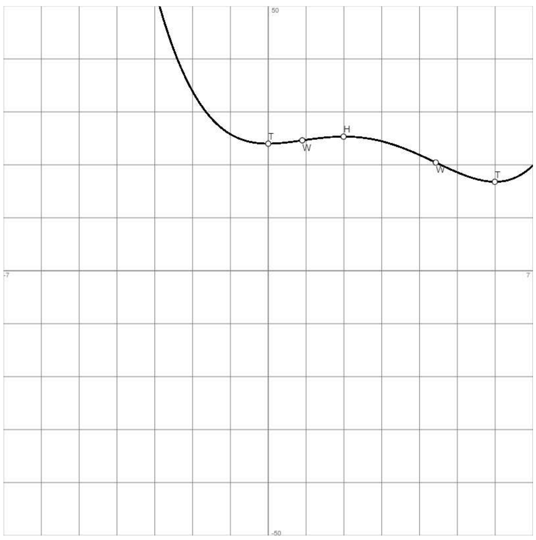
Ermittle unter Verwendung des Kurvenpunktes P(1|1) den Funktionsterm von f(x).

b) Die Funktion $f(t) = \frac{1}{5}\left(t^3 - 8t^2 + 12t\right)$ (siehe a)) beschreibt die Rate des Wasserzuflusses und -abflusses in eine bzw. aus einer Zisterne (t: Monate, f(t): Kubikmeter; $0 \le t \le 7$). Bestimme die Zeiträume, in denen Wasser in die bzw. aus der Zisterne fließt. Zu welchen Zeitpunkten fließt am meisten Wasser in die bzw. aus der Zisterne?

c) Die Zisterne ist ein quaderförmiger Hohlraum mit den Innenmaßen 4 Meter mal 3 Meter als Grundfläche und 5 Meter als Höhe. Zu Beginn betrage der Wasserstand in der Zisterne 2 Meter. Ermittle die Stammfunktion F(t), $0 \le t \le 7$, an, die das Wasservolumen in der Zisterne beschreibt. Auf wie viel Kubikmeter Wasser sinkt der Bestand in der Zisterne ab? Bestimme den höchsten Wasserstand im angegebenen Zeitraum; wie viel Prozent des Zisternenvolumens macht dann das Wasservolumen aus?

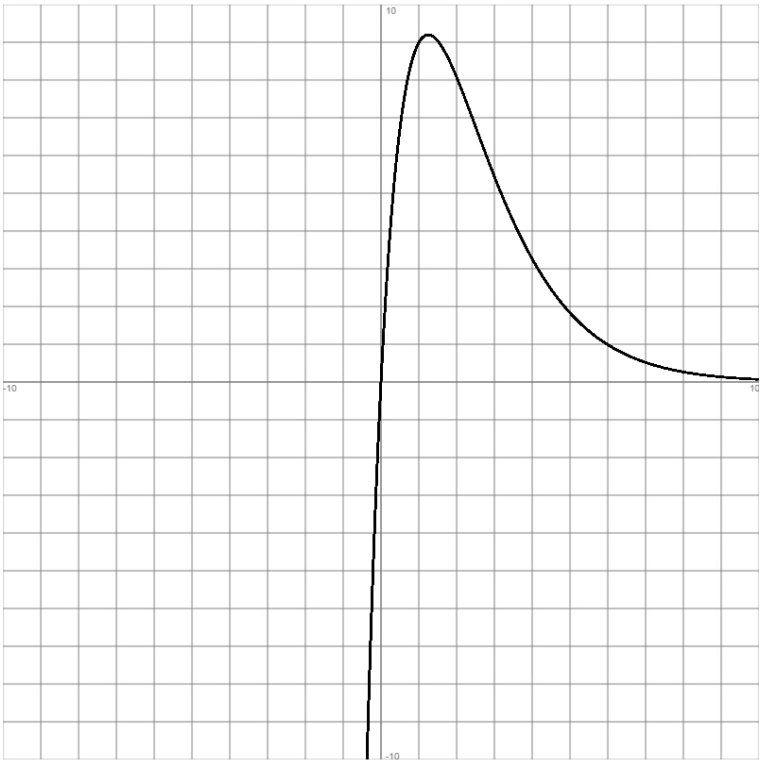
Vorgehensweise: Bestimmungsaufgaben, Differentiation/Integration.

Lösung: a) N(0|0), N(2|0), N(6|0), P(1|1) -> f(x) = x(x–2)(x–6)/5;
b) Funktion f(t) = t(t–2)(t–6)/5: f(t)≥0 -> [0; 2], [6; 7]: Wasserzufluss, f(t)≤0 -> [2; 6]: Wasserabfluss; Hochpunkt H(0,9|1,01), Tiefpunkt T(4,43|-3,38); c) Rate: f(t) = $0,2t^3–1,6t^2+2,4t$ -> Bestand: F(t) = $0,05t^4–8t^3/15+1,2t^2+24$, minimaler Bestand: F(6) = 16,8 m^3, maximaler Bestand (globales Maximum): F(2) = 25,33 m^3 (F(0)=24, F(7)=19,92) -> höchster Wasserstand: 2,11 m, Prozentsatz: 25,33/60 = 0,422 = 42,2%.



F(t)

Aufgabe 15: a) Die Ausbreitungswelle einer Virusinfektion vom Typ C in einem Land D kann anhand des folgenden Graphen der Funktion $f(t) = 20te^{-0,8t}$, 0≤t≤10 (t: Monate, f(t): Tausend Neuinfizierte) beschrieben werden:



Interpretiere den Verlauf der Infektionsrate. Achte auf Hoch- und Wendepunkt der Funktion.

b) Weise nach, dass $F(t) = -(25t + 31,25)e^{-0,8t}$ eine Stammfunktion von $f(t) = 20te^{-0,8t}$ ist.

c) Wie lautet die Stammfunktion der Infektionsrate f(t), die die (kumulierte) Gesamtanzahl der bis zu einem bestimmten Zeitpunkt t Infizierten wiedergibt? Wie viel Personen insgesamt sind zum Zeitpunkt t = 2, t = 5, t = 8 infiziert worden? Wie viel Personen sind maximal von der Virusinfektion betroffen?

d) Die Gesamteinwohnerzahl im Land D betrage 5 Millionen Personen. Die 7-Tage-Inzidenz I zum Zeitpunkt t ist die auf 100000 Einwohner bezogene Zahl der Neuinfektionen innerhalb der sieben dem Zeitpunkt vorangegangenen Tage (7 Tage entsprechen rund ein Viertel eines Monats). Berechne die Werte der 7-Tage-Inzidenz zum Zeitpunkt, als die Virusausbreitung ihren Höchststand hat, und zum Zeitpunkt t = 6.

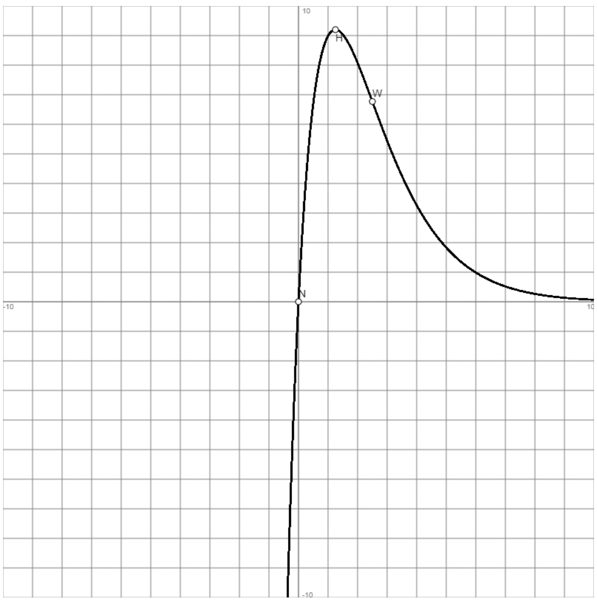
e) Bei der Virusinfektion bleibt ein Infizierter vom Zeitpunkt seiner Ansteckung an für andere Personen rund sieben Tage ansteckend. Der (hier also mit der Ansteckungszeit eines Infizierten korrespondierende) 7-Tage-Reproduktionswert R zum Zeitpunkt t ist das Verhältnis der Zahl der vom Zeitpunkt t weniger 7 Tage bis zum Zeitpunkt t Infizierten zur Zahl der vom Zeitpunkt t weniger 7 Tage weniger 14 Tage bis zum Zeitpunkt t weniger 7 Tage Infizierten. Betrachte den Reproduktionswert für die Zeitpunkte t = 1 und t = 4. Der Reproduktionswert gibt also an, wie viel Personen sich im Durchschnitt durch eine schon infizierte Person mit dem Virus anstecken.

Vorgehensweise: Funktionsuntersuchung, Differentiation/Integration.

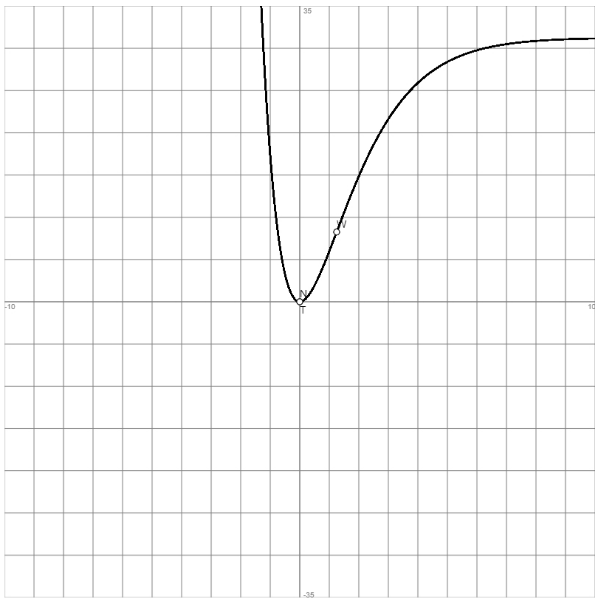
Lösung: a) Funktion f(t): Hochpunkt H(1,25|9,2) (9200 Personen) als Zeitpunkt des Höchststands der Virusausbreitung, des Wechsels von Zunahme zu Abnahme der Infektionsrate, Wendepunkt W(2,5|6,8) (6800 Personen) als Zeitpunkt stärkster Abnahme der Infektionsrate; b) F'(t) = f(t) nach Produkt- und Kettenregel; c) Stammfunktion mit F(0) = 0 -> $F(t) = -(25t+31,25)e^{-0,8t} + 31,25$ -> F(2) = 14,846 (14846 Personen), F(5) = 28,388 (28388 Personen), F(8) = 30,866 (30866 Personen); maximale Personenanzahl: 31250; d) t=1,25: I = (F(1,25)-F(1))*1000/50 = 45,65, t=6: I = (F(6)-F(5,75))*20 = 5,35; e) t=1: R = (F(1)-F(0,75))/(F(0,75)-F(0,5)) = 1,15, t=4: R = (F(4)-F(3,75))/(F(3,75)-F(3,5)) = 0,882, c) bis e) auch auf Grund von:

Wertetabelle:				
t	**F(t)**	**f(t)**	**f'(t)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	0	20	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt $S_y(0\|0)$ = Tiefpunkt T(0|0)
0.25	0.5476	4.09	13.1	
0.5	1.9235	6.7	8.04	

0.75	3.8094	8.23	4.39	
1	5.9752	8.99	1.8	
1.25	8.2575	9.2	0	Wendepunkt W(1.25|8.26)
1.5	10.5429	9.04	-1.2	
1.75	12.7552	8.63	-1.97	
2	14.8459	8.08	-2.42	
2.25	16.7863	7.44	-2.64	
2.5	18.5623	6.77	-2.71	
2.75	20.1697	6.09	-2.66	
3	21.6112	5.44	-2.54	
3.25	22.8942	4.83	-2.38	
3.5	24.0288	4.26	-2.19	
3.75	25.0266	3.73	-1.99	
4	25.9	3.26	-1.79	
4.25	26.6612	2.84	-1.6	
4.5	27.3222	2.46	-1.42	
4.75	27.8944	2.13	-1.25	
5	28.3882	1.83	-1.1	
5.25	28.8132	1.57	-0.96	
5.5	29.1782	1.35	-0.83	
5.75	29.4909	1.16	-0.72	
6	29.7584	0.99	-0.63	
6.25	29.9866	0.84	-0.54	
6.5	30.1812	0.72	-0.46	
6.75	30.3467	0.61	-0.4	
7	30.4873	0.52	-0.34	
7.25	30.6066	0.44	-0.29	
7.5	30.7078	0.37	-0.25	
7.75	30.7934	0.31	-0.21	
8	30.8658	0.27	-0.18	
8.25	30.9269	0.22	-0.15	
8.5	30.9785	0.19	-0.13	
8.75	31.022	0.16	-0.11	
9	31.0587	0.13	-0.09	
9.25	31.0895	0.11	-0.08	
9.5	31.1155	0.1	-0.07	
9.75	31.1373	0.08	-0.06	
10	31.1557	0.07	-0.05	



f(t)|F(t)



Abkürzungen: FE = Flächeneinheit; LE = Längeneinheit; Lsg. = Lösung(en); m = Meter; **R** = reelle Zahlen.