Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Bruchgleichungen (p-q-Formel) II

Einleitung: Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variablen umgeformt bzw. aufgelöst werden.

Bruchgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die Brüche enthalten. Bruchgleichungen einfacher Art können auf lineare Gleichungen zurückgeführt werden durch: 1) Definitionsbereich, Umstellen/Vereinfachen der Bruchgleichung (Kürzen von Brüchen, Addition/Division/Multiplikation von Zahlen), 2) Multiplikation der Bruchgleichung mit Nennern bzw. Hauptnenner der vorkommenden Brüche, 3) Ausmultiplizieren der mit Nennern bzw. Hauptnenner malgenommenen Terme (Summen, Differenzen), 4) Sortieren nach x und einfachen Zahlen, 6) Auflösen der so erhaltenen linearen oder quadratischen Gleichung nach x.

Lineare Gleichungen sind innerhalb der mathematischen Algebra Gleichungen mit der Variablen x, die folgenden einfachen Formen mit rationalen oder reellen Zahlen a, b, c, d genügen:

1) ax = b ⇔ x = b/a -> L = {b/a}
2) ax + b = c ⇔ ax = c–b ⇔ x = (c-b)/a -> L = {(c-b)/a}
3) ax + b = cx + d ⇔ (a-c)x + b = d ⇔ (a-c)x = d–b ⇔ x = (d-b)/(a-c) -> L = {(d-b)/(a-c)}

Die Lösung der linearen Gleichung ax + b = 0 ist für a ≠ 0 dann: $x = -\frac{b}{a}$; ist a = 0, so besitzt die Gleichung keine Lösung (L = {}; b≠0) oder unendlich viele Lösungen (L = **Q** oder **R**; b=0) (L als Lösungsmenge). Bei den Gleichungsumformungen gelten die algebraischen Gesetzmäßigkeiten (Punkt- vor Strichrechnung, Auflösen von Klammern in Termen, Vorzeichenregeln, Rechnen mit negativen und positiven Zahlen, Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen, Addition bzw. Subtraktion, Multiplikation bzw. Division in Gleichungen u.a.).

Quadratische Gleichungen sind innerhalb der mathematischen Algebra Gleichungen mit der Variablen x, die letztlich der Form: $ax^2 + bx + c = 0$ mit reellen Zahlen a, b, c genügen. Ist b=0, so liegt eine rein quadratische Gleichung vor, ansonsten eine gemischt quadratische.

a) Bei einer rein quadratischen Gleichung ergeben sich als (keine bis zwei) Lösungen: $ax^2+c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

b) Bei einer gemischt quadratischen Gleichung (mit Koeffizient vor x^2 als 1) ergeben sich als (keine bis zwei) Lösungen:

$x^2+px+q = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel).

c) Bei einer gemischt quadratischen Gleichung vom Typ $x^2+px = 0$ ergeben sich (eine bis zwei) Lösungen: $x_1 = 0$, $x_2 = -p$ durch Ausklammern vermöge $x^2+px = x(x+p)$ und nach dem Satz vom Nullprodukt.

Komplexere quadratische Gleichungen sind dann durch Term- (Auflösen von Klammern, binomische Formeln; Zusammenfassen von x^2, x und Zahlen) und Gleichungsumformungen (Addition, Subtraktion von Summanden; Division, Multiplikation von Faktoren) auf die vorerwähnten Grundformen der rein oder gemischt quadratischen Gleichung zu bringen, so dass die oben genannten Vorgehensweisen greifen.

Aufgabe 1: Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Bruchgleichungen.

a) $\frac{15}{2x} = 3$

b) $\frac{2}{x+1} = -4$

c) $\frac{5x}{2x+1} = 2$

d) $\frac{2x+3}{x} = 3$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichung ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen:

a) $\frac{15}{2x} = 3$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·2x

(Nebenrechnung: 2x = 0 -> x = 0) -> Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$\frac{15}{2x} \cdot 2x = 3 \cdot 2x$ (Kürzen, Zusammenfassen)

15 = 6x | :6

x = 2,5 Lösungsmenge: L = {2,5}

b) $\frac{2}{x+1} = -4$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·(x+1)

(Nebenrechnung: x+1 = 0 -> x = -1) ->
Definitionsmenge: D = **R**\{-1}

$\frac{2}{x+1}(x+1) = -4(x+1)$ (Kürzen, Klammern auflösen)

2 = -4x – 4 | +4

6 = -4x | :(-4)

x = -1,5 Lösungsmenge: L = {-1,5}

c) $\frac{5x}{2x+1} = 2$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·(2x+1)

(Nebenrechnung: 2x+1 = 0 -> 2x = -1 -> x = -0,5) ->
Definitionsmenge: D = **R**\{-0,5}

$\frac{5x}{2x+1}(2x+1) = 2(2x+1)$ (Kürzen, Klammern auflösen)

5x = 4x + 2 | -4x

x = 2 Lösungsmenge: L = {2}

d) $\frac{2x+3}{x} = 3$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·x

(Nebenrechnung: x = 0) ->
Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$\frac{2x+3}{x} \cdot x = 3x$ (Kürzen)

2x+3 = 3x | -2x

3 = x Lösungsmenge: L = {3}

Aufgabe 2: Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Bruchgleichungen.

a) $\frac{16}{x} = 4x$ b) $\frac{2x}{x+3} = 5x$

c) $\frac{x+5}{x-4} = 2x$ d) $2 - x = \frac{x-11}{4x}$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichung ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen:

a) $\frac{16}{x} = 4x$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·x

(Nebenrechnung: x = 0) ->
Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$\frac{16}{x} \cdot x = 4x \cdot x$ (Kürzen, Zusammenfassen)

16 = $4x^2$ | :4

4 = x^2 | √

x = ±2 Lösungsmenge: L = {-2; 2}

b) $\frac{2x}{x+3} = 5x$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·(x+3)

(Nebenrechnung: x+3 = 0 -> x = -3) ->
Definitionsmenge: D = **R**\{-3}

$\frac{2x}{x+3}(x+3) = 5x(x+3)$ (Kürzen, Klammern auflösen)

2x = $5x^2$ + 15x | -2x

0 = $5x^2$ + 13x | :5

0 = x^2 + 2,6x (p-q-Formel: p = 2,6, q = 0)

$x_{1,2} = -1{,}3 \pm \sqrt{1{,}3^2 - 0} = -1{,}3 \pm 1{,}3$

x_1 = -1,3+1,3 = 0, x_2 = -1,3–1,3 = -2,6 — Lösungsmenge: L = {-2,6; 0}

c) $\frac{x+5}{x-4} = 2x$ — | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·(x–4)

(Nebenrechnung: x–4 = 0 -> x = 4) -> Definitionsmenge: D = **R**\{4}

$\frac{x+5}{x-4}(x-4) = 2x(x-4)$ — (Kürzen, Klammern auflösen)

$x+5 = 2x^2 - 8x$	| -x
$5 = 2x^2 - 9x$	| -5
$0 = 2x^2 - 9x - 5$	| :2
$0 = x^2 - 4{,}5x - 2{,}5$	(p-q-Formel: p = -4,5, q = -2,5)

$x_{1,2} = 2{,}25 \pm \sqrt{2{,}25^2 + 2{,}5} = 2{,}25 \pm \sqrt{7{,}5625} = 2{,}25 \pm 2{,}75$

x_1 = 2,25+2,75 = 5, x_2 = 2,25–2,75 = -0,5 — Lösungsmenge: L = {-0,5; 5}

d) $2 - x = \frac{x-11}{4x}$ — | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·4x

(Nebenrechnung: 4x = 0 -> x = 0) -> Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$(2-x)\cdot 4x = \frac{x-11}{4x}\cdot 4x$ — (Kürzen, Klammern auflösen)

$8x - 4x^2 = x - 11$	| -8x
$-4x^2 = -7x - 11$	| +4x²
$0 = 4x^2 - 7x - 11$	| :4
$0 = x^2 - 1{,}75x - 2{,}75$	(p-q-Formel: p = -1,75, q = -2,75)

$x_{1,2} = 0{,}875 \pm \sqrt{0{,}875^2 + 2{,}75} = 0{,}875 \pm \sqrt{3{,}515625} = 0{,}875 \pm 1{,}875$

x_1 = 0,875+1,875 = 2,75, x_2 = 0,875–1,875 = -1 — Lösungsmenge: L = {-1; 2,75}

Aufgabe 3: Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Bruchgleichungen.

a) $\frac{7}{x} = 4x+3$ b) $2x+3 = \frac{4x+15}{x}$

c) $x-3 = -\frac{8x+9}{x+3}$ d) $2x-1 = \frac{23-x}{x-3}$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichung ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen:

a) $\frac{7}{x} = 4x+3$ — | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·x

(Nebenrechnung: x = 0) -> Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$\frac{7}{x}\cdot x = (4x+3)\cdot x$ — (Kürzen, Klammern auflösen)

$7 = 4x^2 + 3x$	| -7
$0 = 4x^2 + 3x - 7$	| :4
$0 = x^2 + 0{,}75x - 1{,}75$	(p-q-Formel: p = 0,75, q = -1,75)

$x_{1,2} = -0{,}375 \pm \sqrt{0{,}375^2 + 1{,}75} = -0{,}375 \pm \sqrt{1{,}890625} = -0{,}375 \pm 1{,}375$

x_1 = -0,375+1,375 = 1, x_2 = -0,375–1,375 = -1,75 — Lösungsmenge: L = {-1,75; 1}

b) $2x+3 = \frac{4x+15}{x}$ — | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·x

(Nebenrechnung: x = 0) -> Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$(2x+3)\cdot x = \frac{4x+15}{x}\cdot x$ — (Kürzen, Klammern auflösen)

$2x^2 + 3x = 4x + 15$	| -4x
$2x^2 - x = 15$	| -15
$2x^2 - x - 15 = 0$	| :2

$x^2 - 0,5x - 7,5$ (p-q-Formel: p = -0,5, q = -7,5)

$$x_{1,2} = 0,25 \pm \sqrt{0,25^2 + 7,5} = 0,25 \pm \sqrt{7,5625} = 0,25 \pm 2,75$$

$x_1 = 0,25+2,75 = 3$, $x_2 = 0,25–2,75 = -2,5$ Lösungsmenge: L = {-2,5; 3}

c) $x - 3 = -\frac{8x+9}{x+3}$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·(x+3)

(Nebenrechnung: x+3 = 0 -> x = -3) -> Definitionsmenge: D = **R**\{-3}

$$(x-3)(x+3) = -\frac{8x+9}{x+3}(x+3)$$ (Kürzen, 3. binomische Formel)

$x^2 - 9 = -(8x+9)$ (Klammern auflösen)
$x^2 - 9 = -8x - 9$ | +8x
$x^2 + 8x - 9 = -9$ | +9
$x^2 + 8x = 0$ (p-q-Formel: p = 8, q = 0)

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{4^2 - 0} = -4 \pm 4$$

$x_1 = -4+4 = 0$, $x_2 = -4–4 = -8$ Lösungsmenge: L = {-8; 0}

d) $2x - 1 = \frac{23-x}{x-3}$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·(x–3)

(Nebenrechnung: x–3 = 0 -> x = 3) -> Definitionsmenge: D = **R**\{3}

$$(2x-1)(x-3) = \frac{23-x}{x-3}(x-3)$$ (Kürzen, Klammern auflösen)

$2x^2 - 6x - x + 3 = 23 - x$ | +x
$2x^2 - 6x + 3 = 23$ | -23
$2x^2 - 6x - 20 = 0$ | :2
$x^2 - 3x - 10 = 0$ (p-q-Formel: p = -3, q = -10)

$$x_{1,2} = 1,5 \pm \sqrt{1,5^2 + 10} = 1,5 \pm \sqrt{12,25} = 1,5 \pm 3,5$$

$x_1 = 1,5+3,5 = 5$, $x_2 = 1,5–3,5 = -2$ Lösungsmenge: L = {-2; 5}

Aufgabe 4: Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Bruchgleichungen.

a) $x + 2 - \frac{1}{x-4} = \frac{2x-13}{x-4}$

b) $x + \frac{13}{x+7} = \frac{5x+3}{x+7}$

c) $2x = \frac{5x-9}{4x+3} + 3$

d) $7x + \frac{3}{5x} = 8 - \frac{2}{5x}$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichung ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen:

a) $x + 2 - \frac{1}{x-4} = \frac{2x-13}{x-4}$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·(x–4)

(Nebenrechnung: x–4 = 0 -> x = 4) -> Definitionsmenge: D = **R**\{4}

$$(x+2)(x-4) - \frac{1}{x-4}(x-4) = \frac{2x-13}{x-4}(x-4)$$ (Kürzen, Klammern auflösen)

$x^2 + 2x - 4x - 8 - 1 = 2x - 13$ | -2x, (Zusammenfassen)
$x^2 - 4x - 9 = -13$ | +13
$x^2 - 4x + 4 = 0$ (2. binomische Formel)
$(x-2)^2 = 0$ | √
$x - 2 = 0$ | +2
$x = 2$ Lösungsmenge: L = {2}

b) $x + \frac{13}{x+7} = \frac{5x+3}{x+7}$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·(x+7)

(Nebenrechnung: x+7 = 0 -> x = -7) -> Definitionsmenge: D = **R**\{-7}

$$x(x+7) + \frac{13}{x+7}(x+7) = \frac{5x+3}{x+7}(x+7)$$ (Kürzen, Klammern auflösen)

$x^2 + 7x + 13 = 5x + 3$ | -5x
$x^2 + 2x + 13 = 3$ | -3

$x^2 + 2x + 10 = 0$ (p-q-Formel: p = 2, q = 10)

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 - 10} = 1 \pm \sqrt{-9}$ (keine Lösung)

Lösungsmenge: L = {}

c) $2x = \frac{5x-9}{4x+3} + 3$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·(4x+3)

(Nebenrechnung: 4x+3 = 0 -> 4x = -3 -> x = -0,75) -> Definitionsmenge: D = **R**\{-0,75}

$2x(4x+3) = \frac{5x-9}{4x+3}(4x+3) + 3(4x+3)$ (Kürzen, Klammern auflösen)

$8x^2 + 6x = 5x - 9 + 12x + 9$ (Zusammenfassen)

$8x^2 + 6x = 17x$ | -17x

$8x^2 - 11x = 0$ | :8

$x^2 - \frac{11}{8}x = 0$ (Ausklammern)

$x(x - \frac{11}{8}) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{11}{8}$ Lösungsmenge: L = {0; $\frac{11}{8}$}

d) $7x + \frac{3}{5x} = 8 - \frac{2}{5x}$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | ·5x

(Nebenrechnung: 5x = 0 -> x = 0) -> Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$7x \cdot 5x + \frac{3}{5x} \cdot x = 8 \cdot 5x - \frac{2}{5x} \cdot 5x$ (Kürzen, Zusammenfassen)

$35x^2 + 3 = 40x - 2$ | -40x

$35x^2 - 40x + 3 = -2$ | +2

$35x^2 - 40x + 5 = 0$ | :35

$x^2 - \frac{8}{7}x + \frac{1}{7} = 0$ (p-q-Formel: p = $-\frac{8}{7}$, q = $\frac{1}{7}$

$x_{1,2} = \frac{4}{7} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2 - \frac{1}{7}} = \frac{4}{7} \pm \sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{4}{7} \pm \frac{3}{7}$

$x_1 = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1$, $x_2 = \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$ Lösungsmenge: L = {$\frac{1}{7}$; 1}

Aufgabe 5: Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Bruchgleichungen.

a) $\frac{5}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{7}{2}$

b) $\frac{20}{3x} + \frac{4}{3} = \frac{12}{x}$

c) $\frac{8}{5x} + 3 = \frac{9}{5} + x$

d) $\frac{x}{5} + \frac{2x-3}{5x} = \frac{12}{3x} + \frac{x-3}{5x}$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichung ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen:

a) $\frac{5}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{7}{2}$ | ·Hauptnenner, d.h.: | ·2x (Nenner: 2x, x)

(Nebenrechnung: 2x = 0 -> x = 0) -> Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$\frac{5}{2x} \cdot 2x + \frac{1}{x} \cdot 2x = \frac{7}{2} \cdot 2x$ (Kürzen)

5 + 2 = 7x (Zusammenfassen)

7 = 7x | :7

x = 1 Lösungsmenge: L = {1}

b) $\frac{20}{3x}+\frac{4}{3}=\frac{12}{x}$ | ·Hauptnenner, d.h.: | ·3x (Nenner: 3x, 3, x)

(Nebenrechnung: 3x = 0 -> x = 0) ->
Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$\frac{20}{3x}\cdot 3x+\frac{4}{3}\cdot 3x=\frac{12}{x}\cdot 3x$ (Kürzen)

20 + 4x = 36 | -20
4x = 16 | :4
x = 4 Lösungsmenge: L = {4}

c) $\frac{8}{5x}+3=\frac{9}{5}+x$ | ·Hauptnenner, d.h.: | ·5x (Nenner: 5x, 5)

(Nebenrechnung: 5x = 0 -> x = 0) ->
Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$\frac{8}{5x}\cdot 5x+3\cdot 5x=\frac{9}{5}\cdot 5x+x\cdot 5x$ (Kürzen, Zusammenfassen)

$8 + 15x = 9x + 5x^2$ | -15x
$8 = 5x^2 - 6x$ | -8
$0 = 5x^2 - 6x - 8$ | :5
$0 = x^2 - 1,2x - 1,6$ (p-q-Formel: p = -1,2, q = 0,2)

$$x_{1,2}=0,6\pm\sqrt{0,6^2+1,6}=0,6\pm\sqrt{1,96}=0,6\pm 1,4$$

$x_1 = 0,6+1,4 = 2$, $x_2 = 0,6–1,4 = -0,8$ Lösungsmenge: L = {-0,8; 2}

d) $\frac{x}{5}+\frac{2x-3}{5x}=\frac{12}{3x}+\frac{x-3}{5x}$ | ·Hauptnenner, d.h.: | ·15x (Nenner: 5, 5x, 3x, 5x)

(Nebenrechnung: 15x = 0 -> x = 0) ->
Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$\frac{x}{5}\cdot 15x+\frac{2x-3}{5x}\cdot 15x=\frac{12}{3x}\cdot 15x+\frac{x-3}{5x}\cdot 15x$ (Kürzen, Zusammenfassen)

$3x^2 + (2x–3)\cdot 3 = 60 + (x–3)\cdot 3$ (Klammern auflösen)
$3x^2 + 6x – 9 = 60 + 3x – 9$ | +9
$3x^2 + 6x = 3x + 60$ | -3x
$3x^2 + 3x = 60$ | -60
$3x^2 + 3x – 60 = 0$ | :3
$x^2 + x – 20 = 0$ (p-q-Formel: p = 1, q = -20)

$$x_{1,2}=-0,5\pm\sqrt{0,5^2+20}=-0,5\pm\sqrt{20,25}=-0,5\pm 4,5$$

$x_1 = -0,5+4,5 = 4$, $x_2 = -0,5–4,5 = -5$ Lösungsmenge: L = {-5; 4}

Aufgabe 6: Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Bruchgleichungen.

a) $\frac{25}{x^2}+1=10$ b) $1+\frac{9}{x}=-\frac{20}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x}=7$ d) $\frac{10}{x}+\frac{9}{x-1}=2$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichung ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen:

a) $\frac{25}{x^2}+1=10$ | ·Nenner = Hauptnenner, d.h.: | $\cdot x^2$

(Nebenrechnung: x^2 = 0 -> x = 0) ->
Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$\frac{25}{x^2}\cdot x^2+1\cdot x^2=10\cdot x^2$ (Kürzen)

$25 + x^2 = 10x^2$ | $-x^2$
$25 = 9x^2$ | :9
$\frac{25}{9}=x^2$ | √
$x = \pm\frac{5}{3}$ Lösungsmenge: L = {$-\frac{5}{3}$; $\frac{5}{3}$}

b) $1+\frac{9}{x}=-\frac{20}{x^2}$ | ·Hauptnenner, d.h.: | ·x^2 (Nenner: x^2, x)

(Nebenrechnung: $x^2 = 0$ -> x = 0) ->
Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$1\cdot x^2+\frac{9}{x}\cdot x^2=-\frac{20}{x^2}\cdot x^2$ (Kürzen)

$x^2 + 9x = -20$ | +20
$x^2 + 9x + 20 = 0$ (p-q-Formel: p = 9, q = 20)

$$x_{1,2}=-4{,}5\pm\sqrt{4{,}5^2-20}=-4{,}5\pm\sqrt{0{,}25}=-4{,}5\pm0{,}5$$

x_1 = -4,5+0,5 = -4, x_2 = -4,5–0,5 = -5 Lösungsmenge: L = {-5; -4}

c) $\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x}=7$ | ·Hauptnenner, d.h.: | ·x^2 (Nenner: x^2, x)

(Nebenrechnung: $x^2 = 0$ -> x = 0) ->
Definitionsmenge: D = **R**\{0}

$\frac{2}{x^2}\cdot x^2+\frac{5}{x}\cdot x^2=7\cdot x^2$ (Kürzen)

$2 + 5x = 7x^2$ | -5x
$2 = 7x^2 - 5x$ | -2
$0 = 7x^2 - 5x - 2$ | : 7

$0=x^2-\frac{5}{7}x-\frac{2}{7}$ (p-q-Formel: p = $-\frac{5}{7}$, q = $-\frac{2}{7}$)

$$x_{1,2}=\frac{5}{14}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{14}\right)^2+\frac{2}{7}}=\frac{5}{14}\pm\sqrt{\frac{81}{196}}=\frac{5}{14}\pm\frac{9}{14}$$

$x_1=\frac{5}{14}+\frac{9}{14}=1$, $x_2=\frac{5}{14}-\frac{9}{14}=-\frac{4}{14}=-\frac{2}{7}$ Lösungsmenge: L = {$-\frac{2}{7}$; 1}

d) $\frac{10}{x}+\frac{9}{x-1}=2$ | ·Hauptnenner, d.h.: | ·x(x-1) (Nenner: x, x-1)

(Nebenrechnung: x(x-1) = 0 -> x = 0, x–1 = 0 ->
x = 0, x = 1) ->
Definitionsmenge: D = **R**\{0; 1}

$\frac{10}{x}x(x-1)+\frac{9}{x-1}x(x-1)=2x(x-1)$ (Kürzen)

10(x–1) + 9x = 2x(x–1) (Klammern auflösen)
$10x - 10 + 9x = 2x^2 - 2x$ (Zusammenfassen)
$19x - 10 = 2x^2 - 2x$ | -19x
$-10 = 2x^2 - 21x$ | +10
$0 = 2x^2 - 21x + 10$ | :2
$0 = x^2 - 10{,}5x + 5$ (p-q-Formel: p = -10,5, q = 5)

$$x_{1,2}=5{,}25\pm\sqrt{5{,}25^2-5}=5{,}25\pm\sqrt{22{,}5625}=5{,}25\pm4{,}75$$

x_1 = 5,25+4,75 = 10, x_2 = 5,25–4,75 = 0,5 Lösungsmenge: L = {0,5; 10}

Abkürzungen: D = Definitionsmenge, L = Lösungsmenge, **R** = Menge der reellen Zahlen.

www.michael-buhlmann.de / 11.2019 / Mathematik-Aufgabenpool: Bruchgleichungen II / Aufgaben 895-900