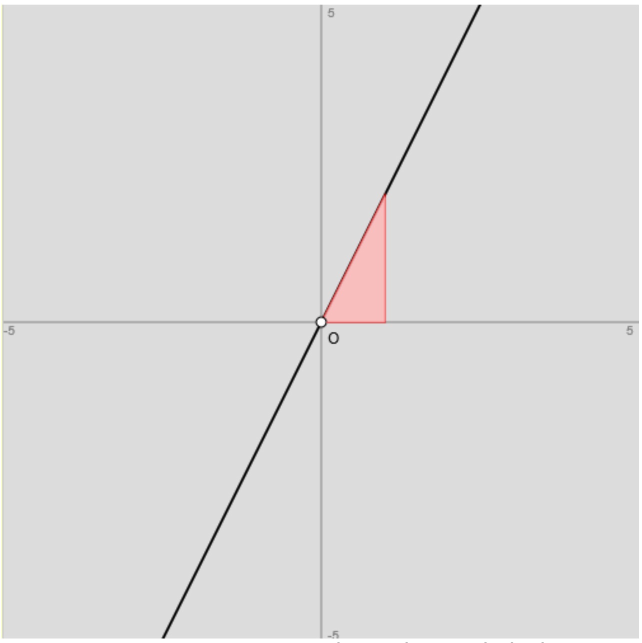
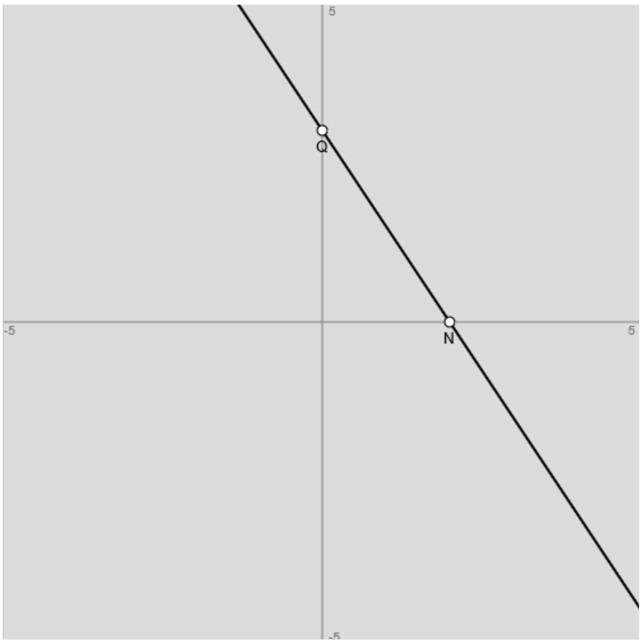
Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Geraden II (Haupt-/Normalform)

Einleitung: Geraden sind (als ganz rationale Funktionen 1. Grades, lineare Funktionen) von der Form: y = mx + c mit Geradensteigung m und y-Achsenabschnitt c, m, c reell (Funktionsgleichung, Geradenterm). Geraden besitzen (bei x=0) den y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|c)$ und (bei m≠0, y=0) die Nullstelle N(-c/m|0) als Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems. Der Steigungswinkel einer Geraden errechnet sich aus: $\tan\varphi = |m| \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}|m|$. Die Geraden-steigung errechnet sich aus zwei Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ mit dem Differenzenquotienten als: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Geraden vom Typ y = mx (c = 0) heißen Ursprungsgeraden (als proportionale Funktionen). Die Ursprungsgerade y = x ist die 1. Winkelhalbierende, die Ursprungsgerade y = -x die 2. Winkelhalbierende. Zwei Geraden können sich im Koordinatensystem schneiden (Schnittpunkt S, Schnittwinkel φ), sie können parallel zueinander verlaufen (parallele Geraden), (verschiedene) Funktionsgleichungen können dieselbe Gerade bezeichnen (identische Geraden).



y = 2x: Ursprungsgerade, Steigungsdreieck



y = -1,5x+3: $Q=S_y(0|3)$, N(2|0)

Aufgabe 1: Bestimme die Funktionsgleichung der Ursprungsgeraden y = mx, wenn der Punkt auf der Geraden liegen.

a) P(2|8)

b) P(1|4)

c) P(-4|20)

d) P(-5|-2)

e) P($\frac{5}{6}$|4)

f) P($\frac{3}{4}$|$-\frac{2}{5}$)

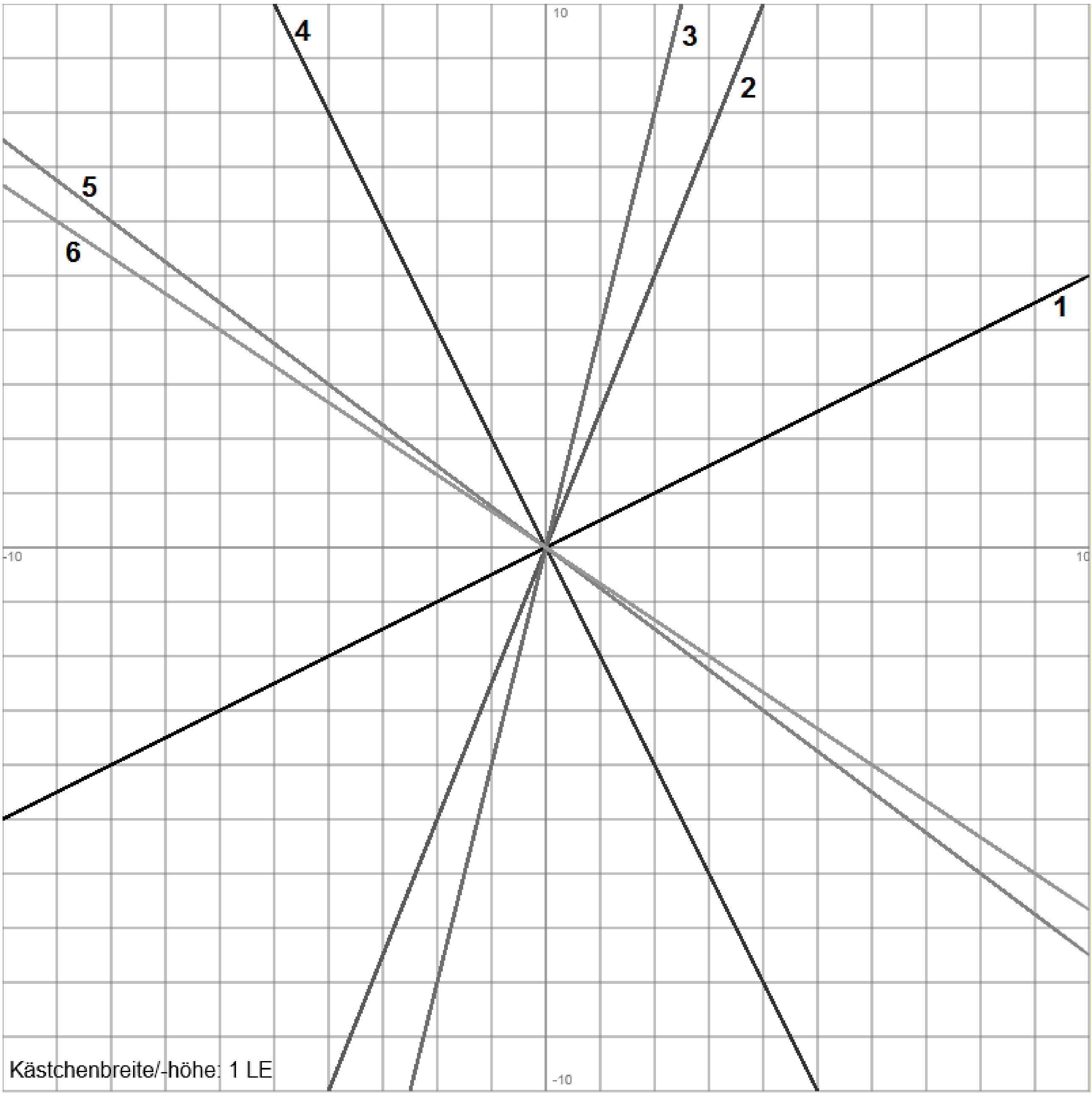
g) P(-5|$\frac{11}{7}$)

h) P($-\frac{9}{2}$|$-2\frac{3}{4}$)

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Steigung m der Ursprungsgeraden y = mx ist bei einem vorgegebenen Punkt $P(x_0|y_0)$ (x_0≠0) die Steigung als: m = $\frac{y_0}{x_0}$ zu errechnen.

Lösungen: a) y = 4x; b) y = 4x; c) y = -5x; d) y = $\frac{2}{5}$x; e) y = $\frac{24}{5}$x; f) y = $\frac{15}{8}$x; g) y = $-\frac{11}{35}$x; h) y = $\frac{11}{18}$x.

Aufgabe 2: Bestimme die Funktionsgleichungen der Ursprungsgeraden aus den Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Ursprungsgeraden y = mx ist die Steigung mit Hilfe eines (virtuellen) Steigungsdreiecks oder durch einen Geradenpunkt $P(x_0|y_0)$ zu bestimmen, so dass m = $\frac{y_0}{x_0}$ gilt.

Lösungen: 1) y = 0,5x; 2) y = 2,5x; 3) y = 4x; 4) y = -2x; 5) y = $-\frac{3}{4}$x; 6) y = $-\frac{2}{3}$x.

Aufgabe 3: Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden y = mx+c, wenn die Geradensteigung und ein Geradenpunkt gegeben ist.

a) m=2, P(2|7)

b) m=-1, P(-3|4)

c) m=$-\frac{1}{5}$, P(-4|3)

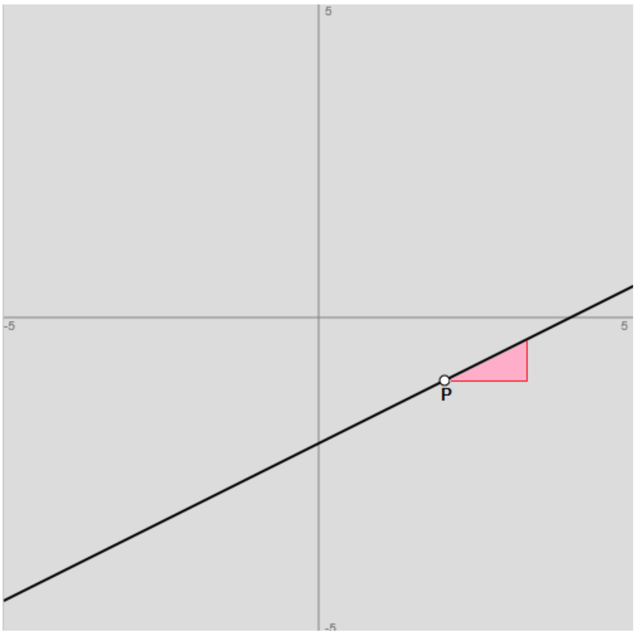
d) m=0,5, P(0|6)

e) m=-3, P(-4|$\frac{9}{4}$)

f) m=$\frac{7}{6}$, P(-1|-4,5)

g) m=$-\frac{3}{4}$, P(-6|$\frac{32}{5}$)

h) m=-2,5, P($\frac{11}{2}$|0)



Vorgehensweise: a) Das Einsetzen der Steigung m bzw. der x- und y-Koordinaten des vorgegebenen Punktes P(x_0|y_0) (Punktprobe) in den Geradenterm y = mx+c führt auf: $y_0 = mx_0+c$ und damit auf: $c = y_0–mx_0$. b) Es gilt die sog. Punktsteigungsform der gesuchten Geraden y = mx+c: $\frac{y-y_0}{x-x_0} = m \Leftrightarrow y = m(x-x_0)+y_0 = mx - mx_0 + y_0$.

y = 0,5x–2: m=0,5, P(2|-1)

Lösungen: a) y = 2x+3; b) y = -x+1; c) y = $-\frac{1}{5}$x+2,2; d) y = 0,5x+6; e) y = -3x–9,75; f) y = $\frac{7}{6}$x–$3\frac{1}{3}$; g) y = -0,7x+1,9; h) y = -2,5x+13,75.

Aufgabe 4: Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden y = mx+c, wenn zwei Geradenpunkte gegeben sind.

a) P(1|7), Q(4|10)

b) P(3|3), Q(5|-2)

c) P(-2|2), Q(1|4)

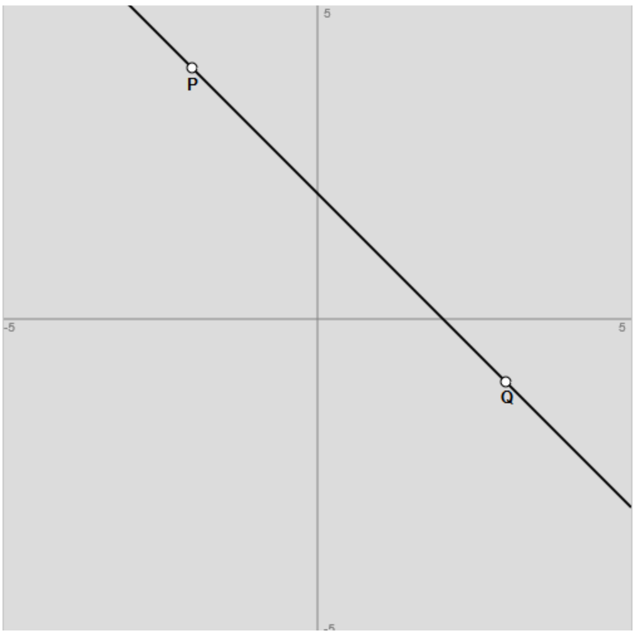
d) P($\frac{12}{5}$|$\frac{3}{4}$), Q(4|$-\frac{9}{20}$)

e) P(-10|-2), Q(5|4)

f) P(0|-3,3), Q(2|4,7)

g) P(0|$\frac{8}{3}$), Q($\frac{7}{2}$|0)

h) P($\frac{13}{4}$|2), Q($\frac{15}{2}$|-4)



Vorgehensweise: a) Die Steigung m errechnet sich aus den vorgegebenen Geradenpunkten P(x_1|y_1), Q(x_2|y_2) gemäß der Formel: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Das Einsetzen der Steigung m bzw. der x- und y-Koordinaten des vorgegebenen Punktes P(x_1|y_1) bzw. Q(x_2|y_2) (Punktprobe) in den Geradenterm y = mx+c führt auf: $c = y_1–mx_1 = y_2–mx_2$. b) Das Einsetzen der x- und y-Koordinaten der vorgegebenen Punkte P(x_1|y_1) und Q(x_2|y_2) (Punktprobe) führt auf ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten m und c, nach denen das Gleichungssystem aufzulösen ist. Für lineare Gleichungssysteme ist dabei die Anwendung von Gleichsetzungs-, Additions- oder Einsetzungsverfahren geboten. c) Es gilt die sog. Zweipunkteform der Geradengleichung mit zwei vorgegebenen Geradenpunkten P(x_1|y_1), Q(x_2|y_2): $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow$

$$y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1 + y_1.$$

y=-x+2: P(-2|4), Q(3|-1)

Lösungen: a) y = x+6; b) y = -2,5x+10,5; c) y = $\frac{2}{3}$x+$3\frac{1}{3}$; d) y = -0,75x+2,55; e) y = 0,4x+2; f) y = 4x–3,3;

g) y = $-\frac{16}{21}$x+$\frac{8}{3}$; h) y = $\frac{24}{17}$x–$\frac{44}{17}$.

Aufgabe 5: Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden y = mx+c, wenn für diese die nachstehenden Wertetabellen gelten. Ergänze gegebenenfalls die jeweilige Wertetabelle.

a)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4,8	2,4	0	-2,4	-4,8	-7,2	-9,6

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

c)

x	-5	-2	1	5	12	20	30
y	23		5			-52	

d)

x	-4		1	2	5		
y	-18	-9			22,5	36	58,5

e)

x	-10	-8		-2	5		13
y	14	12	8			-5	

f)

x	-15	0		5	6	10	11
y		6,1	2		-18,5		

g)

x	-12		2	6			
y	13	-11		-23	-25	-30	-35

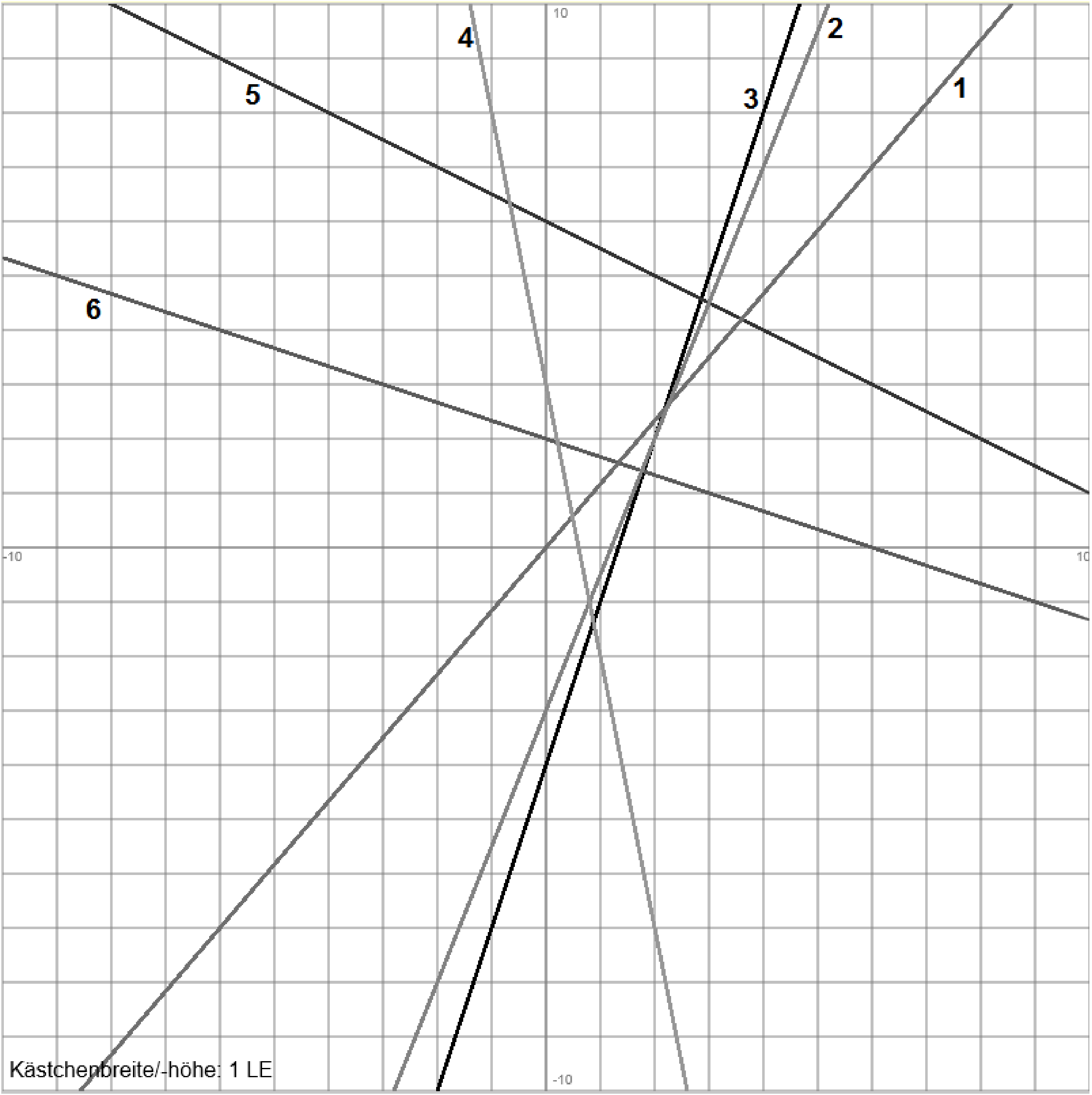
h)

x		-10,5		-4,5	6	9	
y	-19	-16,5	-9		11		21

Vorgehensweise: I. Zwei Geradenpunkte $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ werden aus der Wertetabelle ausgewählt. II. Ermittlung der Geradengleichung: a) Die Steigung m errechnet sich aus den vorgegebenen Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ gemäß der Formel: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Das Einsetzen der Steigung m bzw. der x- und y-Koordinaten des vorgegebenen Punktes $P(x_1|y_1)$ bzw. $Q(x_2|y_2)$ (Punktprobe) in den Geradenterm y = mx+c führt auf: $c = y_1–mx_1 = y_2–mx_2$. b) Das Einsetzen der x- und y-Koordinaten der vorgegebenen Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ (Punktprobe) führt auf ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten m und c, nach denen das Gleichungssystem aufzulösen ist. Für lineare Gleichungssysteme ist dabei die Anwendung von Gleichsetzungs-, Additions- oder Einsetzungsverfahren geboten. c) Es gilt die sog. Zweipunkteform der Geradengleichung y = mx+c mit den Punkten $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$: $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow$ $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1+y_1$. III. Fehlende Punkte $P(x_0|y_0)$ in der jeweiligen Wertetabelle werden wie folgt ergänzt: a) Berechnung des y-Wertes: $x=x_0$ => $y_0 = mx_0+c$; b) Berechnung des x-Wertes: $y=y_0$ => $x_0 = \frac{y_0-c}{m}$, m≠0.

Lösungen: a) y = -2,4x; b) y = 2x+1; c) y = -3x+8; d) y = 4,5x; e) y = -x+4, f) y = -4,1x+6,1; g) y = -2x+11; h) y = $\frac{5}{3}$x+1.

Aufgabe 6: Bestimme die Funktionsgleichungen der Geraden aus den Graphen.



Vorgehensweise: a) Zum Graphen der Geraden y = mx+c ist die Steigung mit Hilfe eines (virtuellen) Steigungsdreiecks oder durch zwei Geradenpunkte $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ zu bestimmen, so dass $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ gilt. Das Einsetzen der Steigung m bzw. der x- und y-Koordinaten der Punkte $P(x_1|y_1)$ bzw. $Q(x_2|y_2)$ (Punktprobe) in den Geradenterm y = mx+c führt auf: $c = y_1 – mx_1 = y_2 – mx_2$. b) Es gilt bei ermittelter Steigung m und ermitteltem Geradenpunkt $P(x_0|y_0)$ die sog. Punktsteigungsform der gesuchten Geraden y = mx+c: $\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \Leftrightarrow y = m(x - x_0) + y_0 = mx - mx_0 + y_0$ .c) Das Einsetzen der x- und y-Koordinaten der ermittelten Geradenpunkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ (Punktprobe) führt auf ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten m und c, nach denen das Gleichungssystem aufzulösen ist. Für lineare Gleichungssysteme ist dabei die Anwendung von Gleichsetzungs-, Additions- oder Einsetzungsverfahren geboten. d) Es gilt die sog. Zweipunkteform der Geradengleichung mit zwei Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + y_1 .$$

Lösungen: 1) y = $\frac{7}{6}$ x; 2) y = 2,5x–3; 3) y = 3x–4; 4) y = -5x+3; 5) y = -0,5x+6; 6) y = $-\frac{1}{3}$ x+2.

Aufgabe 7: Zeichne die Geraden y = mx+c in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem.

a) $y = 3x-2$

b) $y = -4x+5$

c) $y = -\frac{5}{4}x$

d) $y = 9-x$

e) $y = \frac{5}{6}x+\frac{3}{2}$

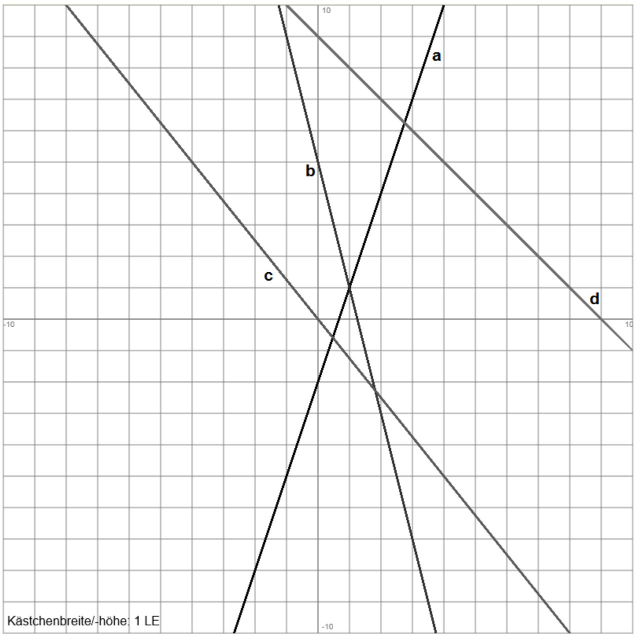
f) $y = \frac{1}{5}(x-4)$

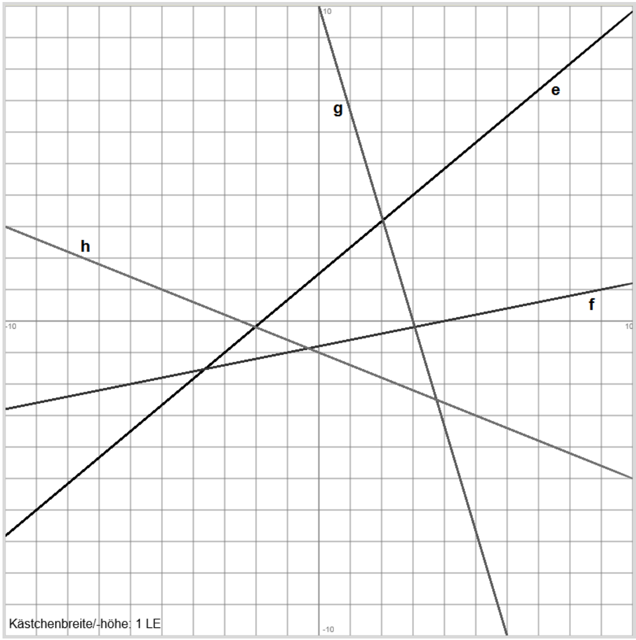
g) $y = \frac{5}{3}(6-2x)$

h) $y = -0{,}4x-1$

Vorgehensweise: Das Anfertigen einer Wertetabelle liefert die (zwei) Geradenpunkte $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$, …, die in das x-y-Koordinatensystem eingetragen werden können. Da durch zwei Punkte genau eine Gerade geht, lassen sich die eingezeichneten Punkte passend miteinander verbinden.

Lösungen:





Aufgabe 8: Bestimme die Achsenschnittpunkte der Geraden y = mx+c.

a) $y = -2x+8$

b) $y = 5x-7$

c) $y = -\frac{2}{5}x$

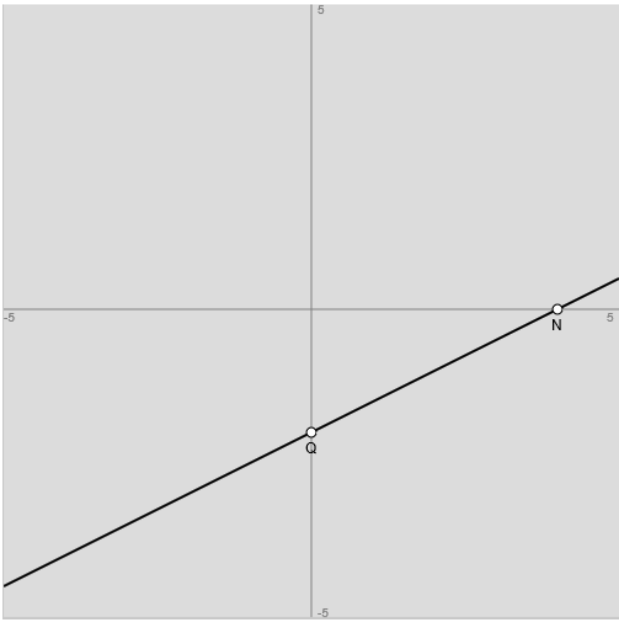
d) $y = -\frac{1}{2}x-8$

e) $y = \frac{1}{4}x+3$

f) $y = 5-3x$

g) $y = -\frac{1}{6}x+1$

h) $y = -2$



Vorgehensweise: I. Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für y = mx+c der y-Achsenabschnitt c und der y-Achsenabschnittspunkt Q=S_y(0|c). II. Schnittpunkt mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstelle der Geraden hat die Gleichung y = mx+c = 0 die Lösung: x = -c/m, m≠0; die Nullstelle lautet dann: N(-c/m|0).

y=0,5x–2: Q=S_y(0|-2), N (4|0)

Lösungen: a) S_y(0|8), N(4|0); b) S_y(0|-7), N(1,4|0); c) S_y=N(0|0); d) S_y(0|-8), N(-16|0); e) S_y(0|3), N(-12|0); f) S_y(0|5), N(5/3|0); g) S_y(0|1), N(6|0); h) S_y(0|-2), keine Nullstelle.

Aufgabe 9: Bestimme den Steigungswinkel der Geraden y = mx+c.

a) y = 2x–6

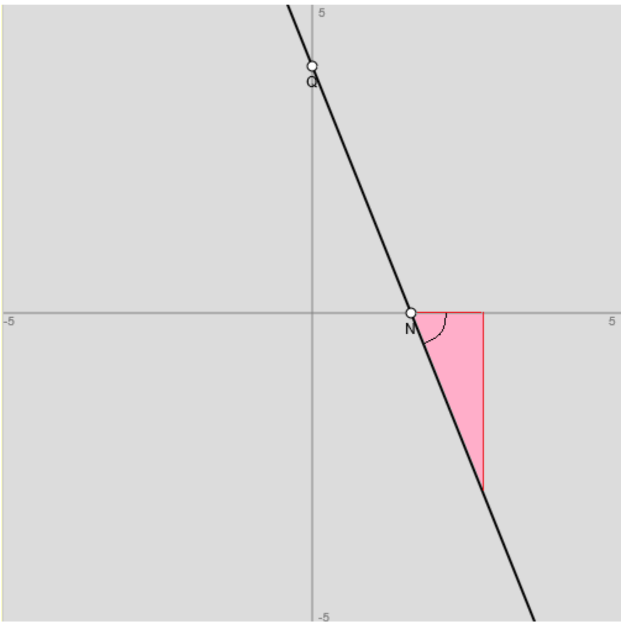
b) y = $-\frac{1}{2}$x

c) y = x–21,3

d) y = -3x+7,5

e) y = $\frac{5}{16}$x

f) y = -4(x+3,8)



Vorgehensweise: Der (spitze) Steigungswinkel einer Geraden errechnet sich aus: $\tan\varphi = |m| \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}|m|$.

y=-2,5x+4: φ = (-)68,2°

Lösungen: a) φ = 63,43°; b) φ = (-)26,57°; c) φ = 45°; d) φ = (-)71,57°; e) φ = 17,35°; f) φ = (-)75,96°.

Aufgabe 10: a) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks, das im x-y-Koordinatensystem von der Geraden y = 8–2x und den Koordinatenachsen begrenzt wird.

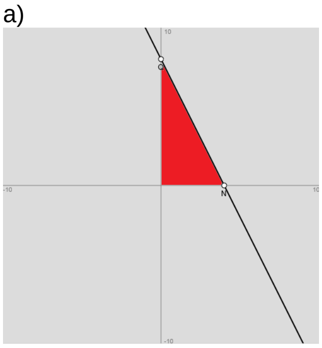
b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das im x-y-Koordinatensystem den Ursprung O(0|0) sowie den y-Achsenabschnittspunkt und die Nullstelle der Geraden y = -3(x+6) als Ecken hat.

c) Wie groß ist der Umfang des Dreiecks, dessen Ecken im x-y-Koordinatensystem der Koordinatenursprung O(0|0), der y-Achsenabschnittspunkt und die Nullstelle der Geraden y = $\frac{1}{6}$x+2 sind?

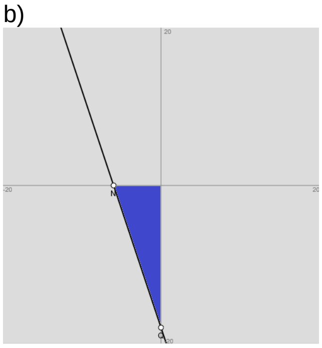
d) Wie groß ist der Umfang des Dreiecks, das von den Achsen des x-y-Koordinatensystems und der Geraden y = $\frac{3}{2}$x–4 gebildet wird?

Vorgehensweise: I. Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für y = mx+c der y-Achsenabschnitt c und der y-Achsen-abschnittspunkt Q=S_y(0|c). II. Schnittpunkt mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstelle der Geraden hat die Gleichung y = mx+c = 0 die Lösung: x = -c/m, m≠0; die Nullstelle lautet dann: N(-c/m|0). III. Es gilt für ein Dreieck ΔOS_yN zwischen Koordinatenursprung O(0|0), y-Achsenabschnittspunkt S_y(0|c) und der Nullstelle N(-c/m|0) einer Geraden y = mx+c: Fläche $A = \frac{c^2}{2|m|}$; Umfang $u = |c| + \left|\frac{c}{m}\right| + \sqrt{c^2 + \left(\frac{c}{m}\right)^2}$.

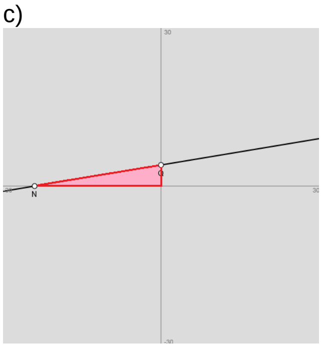
a)



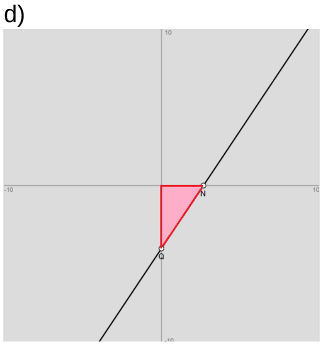
b)



c)



d)



Lösungen: a) S_y(0|8), N(4|0) -> A = 4·8/2 =16 FE; b) S_y(0|-18), N(-6|0) A = 6·18/2 = 54 FE;
c) S_y(0|2), N(-24|0) -> u = 24 + 2 + 24,08 = 50,08 LE; d) S_y(0|-4), N(8/3|0) -> u = $\frac{8}{3}$ + 4 + 4,81 = 11,47 LE.

Aufgabe 11: Welche Punkte A, B, … liegen auf der Geraden y = mx+c?

a) y = 2x–10, A(-1|-9), B(1|-8), C(6|2)

b) y = $-\frac{1}{7}$x+2, A(-2|$\frac{16}{7}$), B(0|2), C(1|$\frac{12}{7}$), D(7|0,5), E(14|0)

c) y = $\frac{5x+3}{2}$, A(-3|-6), B(0|2), C(10|26,5), D(15|40)

d) y = -4,6x+8,2, A(-2|17,4), B(5|-14,8), C(8|-29,2)

Vorgehensweise: Es gilt die Punktprobe, d.h. für einen Punkt A(x_0|y_0) ergibt sich durch Einsetzen in die Geradengleichung y = mx+c aus: $y_0 = mx_0+c$, dass A auf der Geraden liegt, aus: $y_0 \neq mx_0+c$, dass A nicht auf der Geraden liegt.

Lösungen:

y =	A	B	C	D	E
2x–10	nicht auf Gerade	auf Gerade	auf Gerade		
-x/7+2	auf Gerade	auf Gerade	nicht auf Gerade	nicht auf Gerade	auf Gerade
(5x+3)/2	auf Gerade	nicht auf Gerade	auf Gerade	nicht auf Gerade	
-4,6x+8,2	auf Gerade	auf Gerade	nicht auf Gerade		

Aufgabe 12: Bestimme die Funktionsgleichung der zur Geraden g parallelen Geraden h durch den Punkt P.

a) g: y = 3x+2, P(0|5)

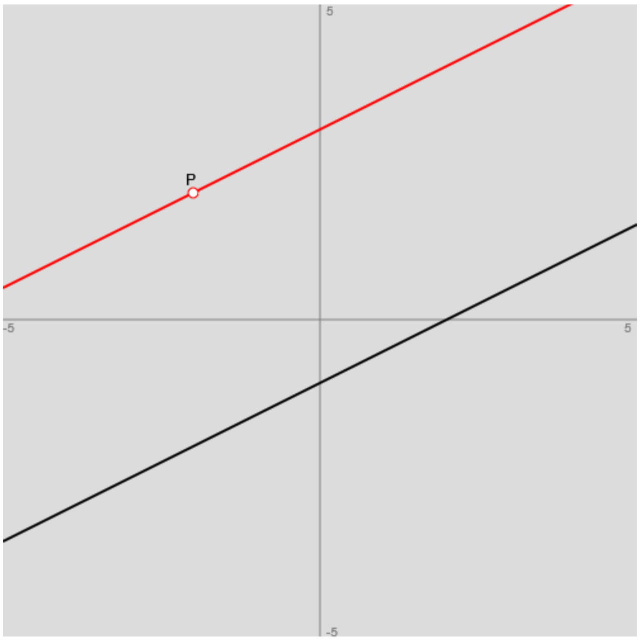
b) g: y = $-\frac{3}{4}$x, P(2|3)

c) g: y = -2x+5, P(-1|4)

d) g: y = -0,2x–1, P(-8|-4)

e) g: y = $\frac{1}{3}$x–4, P(6|-1)

f) g: y = -4, P(3|5)



Vorgehensweise: I. Die Gerade g: y = mx+c liefert wegen der Parallelität der Geraden g und h die Steigung m der Geraden h. II. a) Das Einsetzen der Steigung m bzw. der x- und y-Koordinaten des vorgegebenen Punktes $P(x_0|y_0)$ (Punktprobe) in den Geradenterm h: $y = mx+c_1$ führt auf: $y_0 = mx_0+c_1$ und damit auf: $c_1 = y_0–mx_0$. b) Es gilt die sog. Punktsteigungsform der gesuchten parallelen Geraden h: $y = mx+c_1$:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = m \Leftrightarrow y = m(x-x_0) + y_0 = mx - mx_0 + y_0 .$$

Gerade g: **y = 0,5x–1**, Punkt P(-2|2): m=0,5 -> parallele Gerade h: **y = 0,5x+3**

Lösungen: a) h: y = 3x+5; b) y = -0,75x+4,5; c) y = -2x+2; d) y = -0,2x–5,6; e) y = x/3–3; f) y = 5.

Aufgabe 13: Wo schneidet die zur Geraden g parallele Gerade h durch den Punkt P die Achsen des Koordinatensystems?

a) g: y = -3x+3, P(-1|8)

b) g: y = $-\frac{10}{3}$x–4, P(2|$\frac{16}{3}$)

c) g: y = $-\frac{4}{5}$x, P(-10|14)

d) g: y = 5x+2, P(-4|-6)

e) g: y = $\frac{5}{6}$x–6, P(3|-5)

f) g: y = $-\frac{9}{8}$x+$\frac{9}{2}$, P(-2|-6,5)

Vorgehensweise: I. Die Gerade g: y = mx+c liefert wegen der Parallelität der Geraden g und h die Steigung m der Geraden h. II. a) Das Einsetzen der Steigung m bzw. der x- und y-Koordinaten des vorgegebenen Punktes $P(x_0|y_0)$ (Punktprobe) in den Geradenterm h: $y = mx+c_1$ führt auf: $y_0 = mx_0+c_1$ und damit auf: $c_1 = y_0–mx_0$. b) Es gilt die sog. Punktsteigungsform der gesuchten parallelen Geraden h: $y = mx+c_1$: $\frac{y-y_0}{x-x_0} = m \Leftrightarrow y = m(x-x_0) + y_0 = mx - mx_0 + y_0$.

III. Schnittpunkt der Geraden h: $y = mx+c_1$ mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für $y = mx+c_1$ der y-Achsenabschnitt c_1 und der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c_1)$. IV. Schnittpunkt mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstelle der Geraden hat die Gleichung $y = mx+c_1 = 0$ die Lösung: $x = -c_1/m$, m≠0; die Nullstelle lautet dann: $N(-c_1/m|0)$.

Lösungen: a) h: y = -3x+5, N(5/3|0), S_y(0|5); b) h: y = -10x/3+12, N(-3,6|0), S_y(0|12);
c) h: y = -0,8x+6, N(7,5|0), S_y(0|6); d) h: y = 5x+14, N(-2,8|0), S_y(0|14);
e) h: y = 5x/6–7,5, N(9|0), S_y(0|-7,5); f) h: y = -1,125x–8,75, N(-70/9|0), S_y(0|-8,75).

Aufgabe 14: Bestimme die Funktionsgleichung der zur Geraden g senkrechten Geraden h durch den Punkt P.

a) g: y = -x+3, P(1|2)

b) g: y = $-\frac{5}{6}$x–1, P(2|0)

c) g: y = 4–5x, P(-2|-3)

d) g: y = 4x–3, P(0|5)

e) g: y = $-\frac{5x-6}{3}$, P(3|-0,5)

f) g: y = $\frac{2}{7}$x–2,2, P(-1|1,8)

Vorgehensweise: I. Die Gerade g: y = mx+c liefert wegen der Orthogonalität der Geraden g und h die Steigung -1/m der Geraden h. II. a) Das Einsetzen der Steigung m_1=-1/m bzw. der x- und y-Koordinaten des vorgegebenen Punktes $P(x_0|y_0)$ (Punktprobe) in den Geradenterm h: y = m_1x+c_1 führt auf: $y_0 = m_1x_0+c_1$ und damit auf: $c_1 = y_0-m_1x_0$. b) Es gilt die sog. Punktsteigungsform der gesuchten orthogonalen Geraden h: y = m_1x+c_1 mit Steigung m_1=-1/m:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=m_1 \Leftrightarrow y=m_1(x-x_0)+y_0=m_1x-m_1x_0+y_0.$$

Gerade g: **y = 4–x/3**, Punkt P(2|-1): m=-1/3 -> m_1=3 -> senkrechte Gerade h: **y = 3x–7**

Lösungen: a) h: y = x+1; b) y = 1,2x–2,4; c) y = 0,2x–2,6; d) y = -0,25x+5; e) y = 0,6x–2,3; f) y = -3,5x–1,7.

Aufgabe 15: Wo schneidet die zur Geraden g senkrechte Gerade h durch den Punkt P die Achsen des Koordinatensystems?

a) g: y = 2x+5, P(0|-4)

b) g: y = $-\frac{1}{2}$x+1, P(2|-5)

c) g: y = 6,5–1,5x, P(-2,5|-6)

d) g: y = 4x–1, P(8|0)

e) g: y = $\frac{2x+9}{5}$, P(-4,8|1,5)

f) g: y = $\frac{4}{9}$x, P(-12|8)

Vorgehensweise: I. Die Gerade g: y = mx+c liefert wegen der Orthogonalität der Geraden g und h die Steigung -1/m der Geraden h. II. a) Das Einsetzen der Steigung m_1=-1/m bzw. der x- und y-Koordinaten des vorgegebenen Punktes $P(x_0|y_0)$ (Punktprobe) in den Geradenterm h: y = m_1x+c_1 führt auf: $y_0 = m_1x_0+c_1$ und damit auf: $c_1 = y_0-m_1x_0$. b) Es gilt die sog. Punktsteigungsform der gesuchten orthogonalen Geraden h: y = m_1x+c_1 mit der Steigung m_1=-1/m: $\frac{y-y_0}{x-x_0}=m_1 \Leftrightarrow y=m_1(x-x_0)+y_0=m_1x-m_1x_0+y_0$. III. Schnittpunkt der Geraden h: y = $mx+c_1$ mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für y = $mx+c_1$ der y-Achsenabschnitt c_1 und der y-Achsenabschnittspunkt Q=$S_y(0|c_1)$. IV. Schnittpunkt mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstelle der Geraden hat die Gleichung y = $mx+c_1$ = 0 die Lösung: x = $-c_1$/m, m≠0; die Nullstelle lautet dann: N($-c_1$/m|0).

Lösungen: a) h: y = -0,5x–4, N(-8|0), S_y(0|-4)=P(0|-4); b) h: y = 2x–9, N(4,5|0), S_y(0|-9);
c) h: y = 2x/3–13/3, N(6,5|0), S_y(0|-13/3); d) h: y = -0,25x+2, N(8|0)=P(8|0), S_y(0|2);
e) h: y = -2,5x–10,5, N(-4,2|0), S_y(0|-10,5), f) h: y= 2,25x–19, N((76/9|0), S_y(0|-19).

Aufgabe 16: Bestimme die Koordinaten des Punktes S, wo sich die Geraden g und h schneiden.

a) g: y = -x–5, h: y = 4x

b) g: y = 2x+1, h: y = 0,5x+4

c) g: y = 1–$\frac{2}{3}$x, h: y = $\frac{1}{5}$x+1

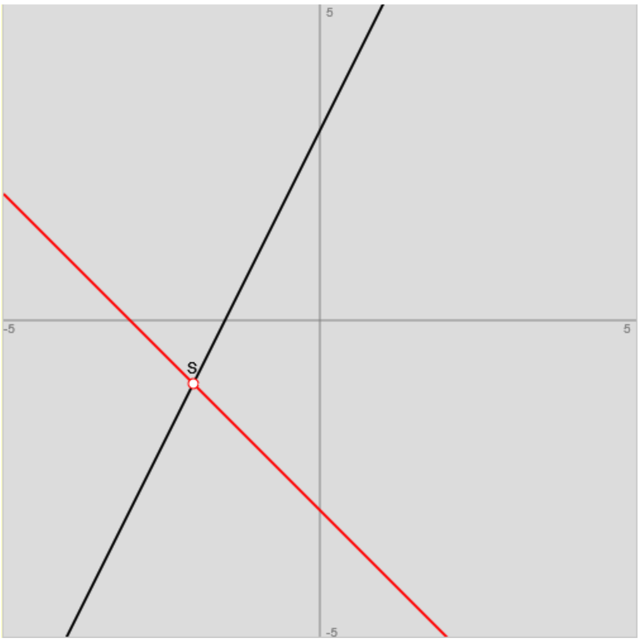
d) g: y = 3–4x, h: y = -x–6

e) g: y = $\frac{x+5}{2}$, h: y = -4

f) g: y = 5x–3, h: y = 6–x

g) g: y = $-\frac{2}{5}$x, h: y = 2x+3

h) g: y = 0,7x+4, h: y = 0,2x+1,6



Vorgehensweise: Für die vorgegebenen zwei Geraden g: y = m_1x+c_1 und h: y = m_2x+c_2 liefert das lineare Gleichungssystem:

y = m_1x+c_1, y = m_2x+c_2

durch Gleichsetzen den Schnittpunkt:

S($\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2} \mid \frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}m_1+c_1$).

Geraden g: **y = 2x+3**, h: **y = -x–3**: Schnittpunkt S(-2|-1)

Lösungen: a) S(-1|-4); b) S(2|5); c) S(0|1); d) S(3|-9); e) S(-13|-4); f) S(1,5|4,5); g) S(-1,25|0,5); h) S(-4,8|0,64).

Aufgabe 17: Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts S und die Größe des Schnittwinkels φ der Geraden g und h.

a) g: y = 4x+1, h: y = 2x+5

b) g: y = 7x, h: y = -4

c) g: y = 5–3x, h: y = $\frac{3}{4}$x–7

d) g: y = 32–6x, h: y = -2x

e) g: y = $\frac{-3x+2}{5}$, h: y = $\frac{x-3}{6}$

f) g: y = $-\frac{12}{11}$x, h: y = $\frac{2}{13}$x

g) g: y = $\frac{4}{3}$x–2, h: y = -0,75x+6

h) g: y = 12x–17, h: y = -9x+46

Vorgehensweise: I. Für die vorgegebenen zwei Geraden g: y = m_1x+c_1 und h: y = m_2x+c_2 liefert das lineare Gleichungssystem: y = m_1x+c_1, y = m_2x+c_2 durch Gleichsetzen den Schnittpunkt: S($\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2} \mid \frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}m_1+c_1$). II. a) Der (spitze) Schnittwinkel zwischen den Geraden g und h errechnet sich als: $\tan\varphi = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right| \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$. b) Der Schnittwinkel errechnet sich aus den Steigungswinkeln der Geraden g und h mit: $\varphi_1 = \tan^{-1}(m_1)$, $\varphi_2 = \tan^{-1}(m_2)$ als: $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$.

Lösungen: a) S(2|9), φ = 12,53°; b) S(-4/7|-4), φ = 81,87°; c) S(3,2|-4,6), φ = 71,57°; d) S(8|-16), φ = 17,1°; e) S(1,174|-0,304), φ = 40,43°; f) S(0|0), φ = 56,24°; g) S(3,84|3,12), φ = 90°; h) S(3|19), φ = 11,1°.

Aufgabe 18: Schneiden sich die Geraden g und h senkrecht? Bestimme Koordinaten des Schnittpunkts S.

a) g: y = 12–4x, h: y = 0,25x–5

b) g: y = -0,4x+3,8, h: y = 2(x+1)

c) g: y = $\frac{3x-1}{4}$, h: y = $-\frac{4}{3}$x+2

d) g: y = $\frac{2}{7}$x–$\frac{41}{14}$, h: y = -3,5x+$\frac{6}{7}$

Vorgehensweise: I. Für die vorgegebenen zwei Geraden g: y = m_1x+c_1 und h: y = m_2x+c_2 liefert das lineare Gleichungssystem: y = m_1x+c_1, y = m_2x+c_2 durch Gleichsetzen den Schnittpunkt: S($\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2} \mid \frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}m_1+c_1$). II. a) Es gilt für die Geraden g: y = m_1x+c_1 und h: y = m_2x+c_2 hinsichtlich der Geradensteigungen: $m_1 \cdot m_2 = -1$ => g, h schneiden sich senkrecht; $m_1 \cdot m_2 \neq -1$ => g, h schneiden sich nicht senkrecht oder gar nicht. b) Der (spitze) Schnittwinkel zwischen den Geraden g und h errechnet sich als: $\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}\right| \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}\right|$. Ist der Winkel φ = 90°, so schneiden sich die Geraden senkrecht. c) Der Schnittwinkel errechnet sich aus den Steigungswinkeln der Geraden g: $y = m_1x+c_1$ und h: $y = m_2x+c_2$ mit: $\varphi_1 = \tan^{-1}(m_1)$, $\varphi_2 = \tan^{-1}(m_2)$ als: $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$. Ist der Winkel φ = 90°, so schneiden sich die Geraden senkrecht.

Lösungen: a) S(4|-4), φ = 90° -> ja; b) S(0,75|3,5), φ = 85,24° -> nein; c) S(1,08|0,56), φ = 90° -> ja;
d) S(1|-37/14), φ = 90° -> ja.

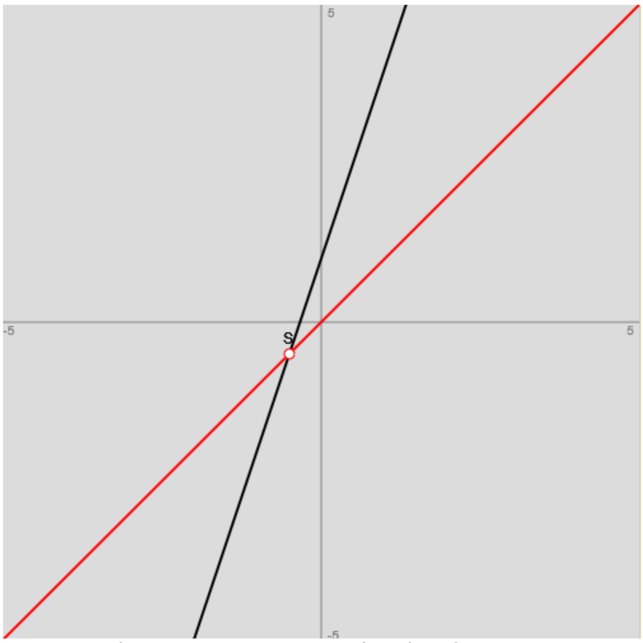
Aufgabe 19: Wo und unter welchem Winkel schneidet die Gerade g die 1. und 2. Winkelhalbierende des Koordinatensystems?

a) g: y = -2x+4

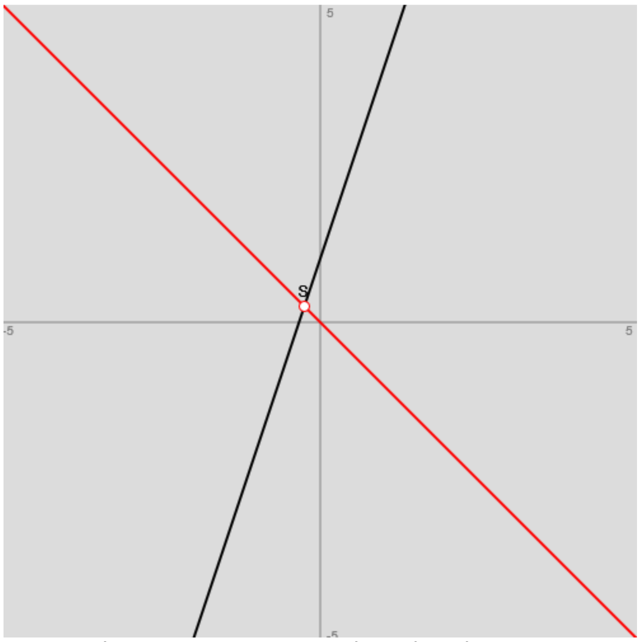
b) g: y = -0,4x–2,1

c) g: y = $\frac{7}{4}$

d) g: y = $\frac{32(x-\frac{15}{8})}{5}$



Geraden **y = 3x+1**, **y = x**: $S_1(-0{,}5|-0{,}5)$, φ = 26,57°



Geraden **y = 3x+1**, **y = -x**: $S_2(-0{,}25|0{,}25)$, φ = 63,43°

Vorgehensweise: I. Für die vorgegebenen zwei Geraden g: $y = m_1x+c_1$ und 1. Winkelhalbierende: y = x liefert das lineare Gleichungssystem: $y = m_1x+c_1$, y = x durch Gleichsetzen den Schnittpunkt: $S_1(\frac{c_1}{1-m_1} | \frac{c_1}{1-m_1})$. II. Für die vorgegebenen zwei Geraden g: $y = m_1x+c_1$ und 2. Winkelhalbierende: y = -x liefert das lineare Gleichungssystem: $y = m_1x+c_1$, y = -x durch Gleichsetzen den Schnittpunkt: $S_2(\frac{-c_1}{1+m_1} | \frac{c_1}{1+m_1})$. III. a) Der (spitze) Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der 1. bzw. 2. Winkelhalbierenden y = ±x errechnet sich als: $\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}\right| \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}\right|$. b) Der Schnittwinkel errechnet sich aus den Steigungswinkeln der Geraden g: $y = m_1x+c_1$ und h: $y = m_2x+c_2$ mit: $\varphi_1 = \tan^{-1}(m_1)$, $\varphi_2 = \tan^{-1}(m_2)$ als: $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$.

Lösungen: a) $S_1(4/4|4/3)$, φ_1 = 71,57°, $S_2(4|-4)$, φ_2 = 18,43°; b) $S_1(-1{,}5|-1{,}5)$, φ_1 = 66,8°, $S_2(3{,}5|-3{,}5)$, φ_2 = 23,2°;
c) $S_1(1{,}75|1{,}75)$, φ_1 = 45°, $S_2(-1{,}75|1{,}75)$, φ_2 = 45°; d) $S_1(20/9|20/9)$, φ_1 = 36,12°, $S_2(1{,}622|-1{,}622)$, φ_2 = 53,88°.

Aufgabe 20: Wo schneidet die Gerade g die dazu senkrechte Gerade h durch den Punkt P. Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S.

a) g: y = -3x+2, P(3|0)

b) g: y = 0,2x+3, P(-5|2)

c) g: y = $-\frac{1}{4}$x+5, P(1|-3,75)

d) g: y = 10(x–2), P(25|28)

Vorgehensweise: I. Die Gerade g: y = mx+c liefert wegen der Orthogonalität der Geraden g und h die Steigung -1/m der Geraden h. II. a) Das Einsetzen der Steigung m_1=-1/m bzw. der x- und y-Koordinaten des vorgegebenen Punktes P(x_0|y_0) (Punktprobe) in den Geradenterm h: y = m_1x+c_1 führt auf: $y_0 = m_1x_0+c_1$ und damit auf: $c_1 = y_0–m_1x_0$. b) Es gilt die sog. Punktsteigungsform der gesuchten orthogonalen Geraden h: y = m_1x+c_1 mit der Steigung m_1=-1/m: $\frac{y-y_0}{x-x_0}=m_1 \Leftrightarrow y=m_1(x-x_0)+y_0=m_1x-m_1x_0+y_0$. III. a) Das Einsetzen der Steigung m_1=-1/m bzw. der x- und y-Koordinaten des vorgegebenen Punktes P(x_0|y_0) (Punktprobe) in den Geradenterm h: y = m_1x+c_1 führt auf: $y_0 = m_1x_0+c_1$ und damit auf: $c_1 = y_0–m_1x_0$. b) Es gilt die sog. Punktsteigungsform der gesuchten orthogonalen Geraden h: y = m_1x+c_1 mit Steigung m_1=-1/m:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=m_1 \Leftrightarrow y=m_1(x-x_0)+y_0=m_1x-m_1x_0+y_0.$$

Lösungen: a) h: y = x/3–1, S(0,9|-0,7); b) h: y = -5x–23, S(-5|2)=P(-5|2); c) h: y = 4x–7,75, S(3|4,25); d) h: y= -0,1x+30,5, S(5|30).

Aufgabe 21: a) Wie heißen die Funktionsgleichungen, deren Geraden g und h mit der Steigung m = -2 durch die Punkte P(1|-2) bzw. Q(-2|5) zueinander parallel laufen.

b) Wie heißen die Funktionsgleichungen, deren Geraden g und h sich im Punkt S(-4|-1) senkrecht schneiden, wobei eine der Geraden die Steigung m = 2 besitzt?

c) Wie heißen die Funktionsgleichungen, deren Geraden g und h sich im Punkt S(2|-6) senkrecht schneiden, wenn eine der Geraden noch zusätzlich durch den Punkt P(4|2) verläuft?

d) Eine Gerade g durch die Punkte A(-1|4) und B(5|10) und eine Gerade h mit Steigung m = 5 und y-Achsenabschnitt c = 10 schneiden sich. Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts S und die Größe des Schnittwinkels φ.

e) Eine Gerade g durch die Punkte A(-5|3) und B(4|6) und eine Gerade h durch die Punkte C(1|5) und D(9|-3) schneiden sich. Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts S und die Größe des Schnittwinkels φ.

Vorgehensweise: I. Die Gerade g: y = mx+c liefert wegen der Parallelität der Geraden g und h die Steigung m der Geraden h. II. Die Gerade g: y = mx+c liefert wegen der Orthogonalität der Geraden g und h die Steigung -1/m der Geraden h. III. Es gilt bei gegebener Steigung m und gegebenen Geradenpunkt P(x_0|y_0) die sog. Punktsteigungsform der gesuchten Geraden y = mx+c: $\frac{y-y_0}{x-x_0}=m \Leftrightarrow y=m(x-x_0)+y_0=mx-mx_0+y_0$. IV. Es gilt die sog. Zweipunkteform der Geradengleichung mit zwei vorgegebenen Geradenpunkten P(x_1|y_1), Q(x_2|y_2): $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow$ $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1+y_1$. V. Für vorgegebene zwei Geraden g: y = m_1x+c_1 und h: y = m_2x+c_2 liefert das lineare Gleichungssystem: y = m_1x+c_1, y = m_2x+c_2 durch Gleichsetzen den Schnittpunkt: S($\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}$ | $\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}m_1+c_1$). VI. Der (spitze) Schnittwinkel zwischen zwei Geraden g und h mit: g: y = m_1x+c_1 und h: y = m_2x+c_2 errechnet sich als: $\tan\varphi=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right| \Leftrightarrow \varphi=\tan^{-1}\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$.

Lösungen: a) g: y = -2x, h: y = -2x+1; b) g: y = 2x+9, h: y = -0,5x–3; c) g: y = 4x–14, h: y = -0,25x–5,5; d) g: y = x+5, h: y = 5x+10, S(-1,25|3,75), φ = 33,69°; e) g: y = x/3+14/3, h: y = -x+6, S(1|5)=C(1|5), φ = 63,43°.

Aufgabe 22: a) Gegeben sind die Funktionsgleichungen der Geraden g und h mit:

g: y = -2x+6, h: y = 0,4x+3.

Die Geraden schließen zusammen mit der x-Achse des Koordinatensystems ein Dreieck ein. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

b) Gegeben sind die Funktionsgleichungen der Geraden g und h mit:

$$g: y = \frac{3}{4}x–2,\ h: y = 13–\frac{15}{4}x.$$

Die Geraden schließen zusammen mit der y-Achse des Koordinatensystems ein Dreieck ein. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

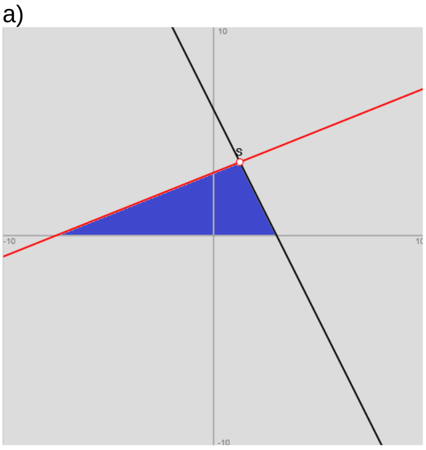
c) Gegeben sind die Funktionsgleichungen der Geraden g, h und k mit:

$$g: y = -2x–1,\ h: y = 0{,}5x+4,\ k: y = -12x+29.$$

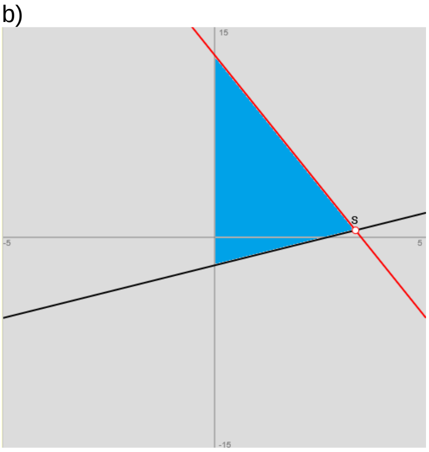
Die Geraden schließen ein rechtwinkliges Dreieck ein. Bestimme die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks sowie dessen Flächeninhalt und Umfang.

Vorgehensweise: I. Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für y = mx+c der y-Achsenabschnitt c und der y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|c)$. II. Schnittpunkt mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstelle der Geraden hat die Gleichung y = mx+c = 0 die Lösung: x = -c/m, m≠0; die Nullstelle lautet dann: N(-c/m|0). III. Für vorgegebene zwei Geraden g: $y = m_1x+c_1$ und h: $y = m_2x+c_2$ liefert das lineare Gleichungssystem: $y = m_1x+c_1$, $y = m_2x+c_2$ durch Gleichsetzen den Schnittpunkt: $S(\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}|\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}m_1+c_1)$. IV. Es gilt hinsichtlich der Geraden und der Geradensteigungen: $m_1 \cdot m_2 = -1$ => g, h schneiden sich senkrecht; $m_1 \cdot m_2 \neq -1$ => g, h schneiden sich nicht senkrecht oder gar nicht.

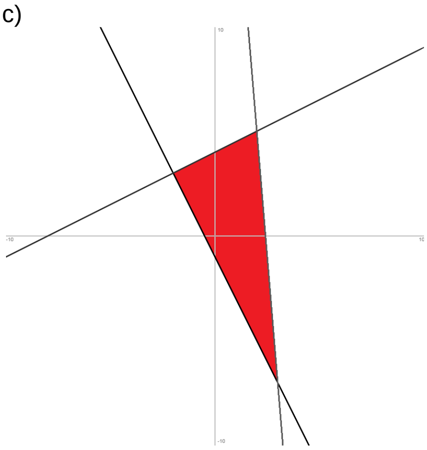
a)



b)



c)



Lösungen: a) g, h -> S(1,25|3,75), $N_g(3|0)$, $N_h(-7{,}5|0)$ -> g = 3-(-7,5) = 10,5 LE, h = 3,75 LE -> A = gh/2 = 19,6875 FE;
b) g, h -> S(10/3|0,5) $S_{yg}(0|-2)$, $S_{yh}(0|13)$ -> g = 13-(-2) = 15 LE, h = 10/3 LE -> A = gh/2 = 25 FE;
c) g, h, k -> A(-2|1), B(3|-7), C(2|5), rechter Winkel bei A -> Seiten a = 12,04 LE, b = 4,47 LE, c = 11,18 LE -> A = bc/2 = 24,99 FE, u = a+b+c = 27,69 LE.

Aufgabe 23: Wie liegen die Geraden g und h zueinander? Berechne gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts S und die Größe des Schnittwinkels φ.

a) g: y = -x+5, h: y = 3x–1

b) g: y = 0,8x+2, h: $y = \frac{4(x-2)}{5}$

c) g: $y = -\frac{5}{6}x+8$, h: $y = \frac{2}{3}x+1$

d) g: $y = \frac{3(5-x)}{8}$, h: y = -0,375x+1,875

e) g: $y = \frac{3x+12}{2}$, h: y = -4x+22,5

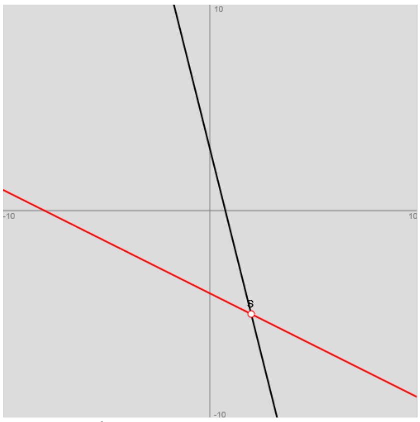
f) g: y = 5x–11, h: $y = \frac{11}{8}x+3{,}5$

g) g: $y = 15–\frac{7}{16}x$, h: y = -0,4375x+7

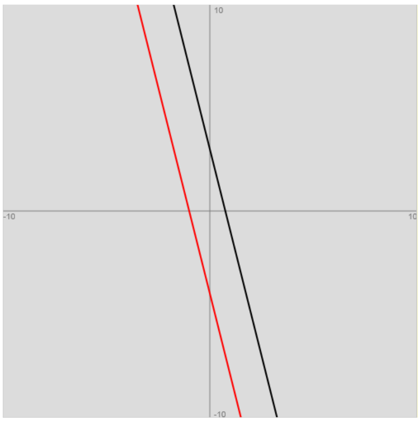
h) g: y = 2,5(x+3), h: y = -1,5(x+10)

Vorgehensweise: I. a) Für vorgegebene zwei Geraden g: $y = m_1x+c_1$ und h: $y = m_2x+c_2$ liefert das lineare Gleichungssystem: $y = m_1x+c_1$, $y = m_2x+c_2$ durch Gleichsetzen den Schnittpunkt: $S(\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}|\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}m_1+c_1)$ ($m_1 \neq m_2$) oder keine Lösung ($m_1=m_2$, $c_1 \neq c_2$) bei parallelen Geraden oder unendlich viele Lösungen ($m_1=m_2$, $c_1=c_2$) bei identischen Geraden. b) Gilt bei vorgegebenen zwei Geraden g: $y = m_1x+c_1$ und h: $y = m_2x+c_2$ hinsichtlich der Steigungen $m_1=m_2$, so sind die Geraden g und h entweder parallel ($c_1 \neq c_2$) oder identisch ($c_1=c_2$). II. a) Im Fall der Existenz des Schnittpunkts errechnet sich der (spitze) Schnittwinkel zwischen zwei Geraden g und h mit: g: $y = m_1x+c_1$ und h: $y = m_2x+c_2$ als:

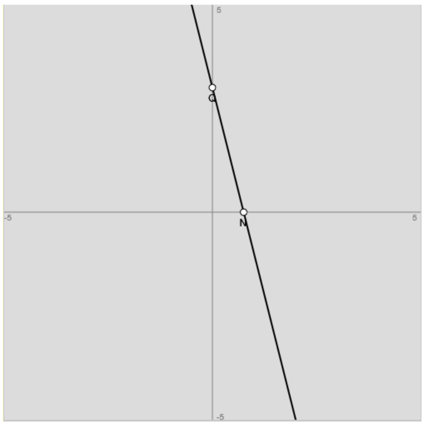
$\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$. b) Im Fall der Existenz des Schnittpunkts bestimmt sich der Schnittwinkel aus den Steigungswinkeln der Geraden g: $y = m_1x+c_1$ und h: $y = m_2x+c_2$ mit: $\varphi_1 = \tan^{-1}(m_1)$, $\varphi_2 = \tan^{-1}(m_2)$ als: $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$.



Geraden **y = -4x+3**, **y = -0,5x–4**:
S(2|-5), φ = 49,4°



Geraden **y = -4x+3**, **y = -4x–4**:
Geraden sind parallel



Geraden **y = -4x+3**, **y = 3–4x**:
Geraden sind identisch

Lösungen: a) S(1,5|3,5), φ = 63,43°; b) g: y = 0,8x+2, h: y = 0,8x–1,6 -> g, h sind parallel; c) S(14/3|37/9), φ = 73,5°; d) g, h: y = -0,375x+1,875 -> g = h; e) S(3|10,5), φ = 47,73°; f) S(4|9), φ = 24,72°; g) g: y = -0,4375x+15, h: y = -0,4375x+7 -> g, h sind parallel; h) S(-5,625|-6,5625), φ = 55,49°.

Abkürzungen: FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten.

www.michael-buhlmann.de / 10.2017 / Mathematik-Aufgabenpool: Geraden II (Haupt-/Normalform) / Aufgaben 491-513