

Mathematik-Aufgabenpool

> Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Einleitung: Ganz rationale Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzen den Funktionsterm: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, \dots, a_n ; $a_n \neq 0$). n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion. Für die Kurvendiskussion einer ganz rationalen Funktion $f(x)$ folgt:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion					
Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$					
I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor): $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$ $f''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 2a_2$ $f'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_{n-1} x^{n-4} + \dots + 6a_3$					
II. Nullstellen (Anzahl maximal n ; Gleichung $f(x) = 0$ lösen): $f(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots \rightarrow N(x_1 0), N(x_2 0), \dots$ (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel)					
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal $n-1$; Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f''(x_1) < 0 \rightarrow H(x_1 f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0 \rightarrow T(x_1 f(x_1))$; $f''(x_2) < 0 \rightarrow H(x_2 f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0 \rightarrow T(x_2 f(x_2))$; ...					
IV. Wendepunkte (Anzahl maximal $n-2$; Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f'''(x_1) \neq 0 \rightarrow W(x_1 f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0 \rightarrow W(x_2 f(x_2))$; ...					
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow S(x_0 f(x_0))$					
Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion					
V. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0) > 0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0) < 0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2) : $f(x)$ monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0) > 0$); ... – Monotonieintervall (x_n, ∞) : $f(x)$ monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0) > 0$)					
VI. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0) > 0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0) < 0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2) : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0) > 0$); ... – Krümmungsintervall (x_n, ∞) : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0) > 0$)					
VII. Symmetrie: a) Achsensymmetrie (zur y-Achse): $f(-x) = f(x)$ oder: nur gerade Exponenten im Term von $f(x)$ (gerade) b) Punktsymmetrie (zum Ursprung): $f(-x) = -f(x)$ oder: nur ungerade Exponenten im Term von $f(x)$ (ungerade) c) $f(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ achsensymmetrisch usw. $f(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ punktsymmetrisch usw.					
VIII. Verhalten für betragsmäßig große x ($x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$) (n als Grad der ganz rationalen Funktion):					
$a_n > 0$	n ungerade	n gerade	$a_n < 0$	n ungerade	n gerade
$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Aufgabe 1: Untersuche die Funktion

$$f(x) = 12x - x^3$$

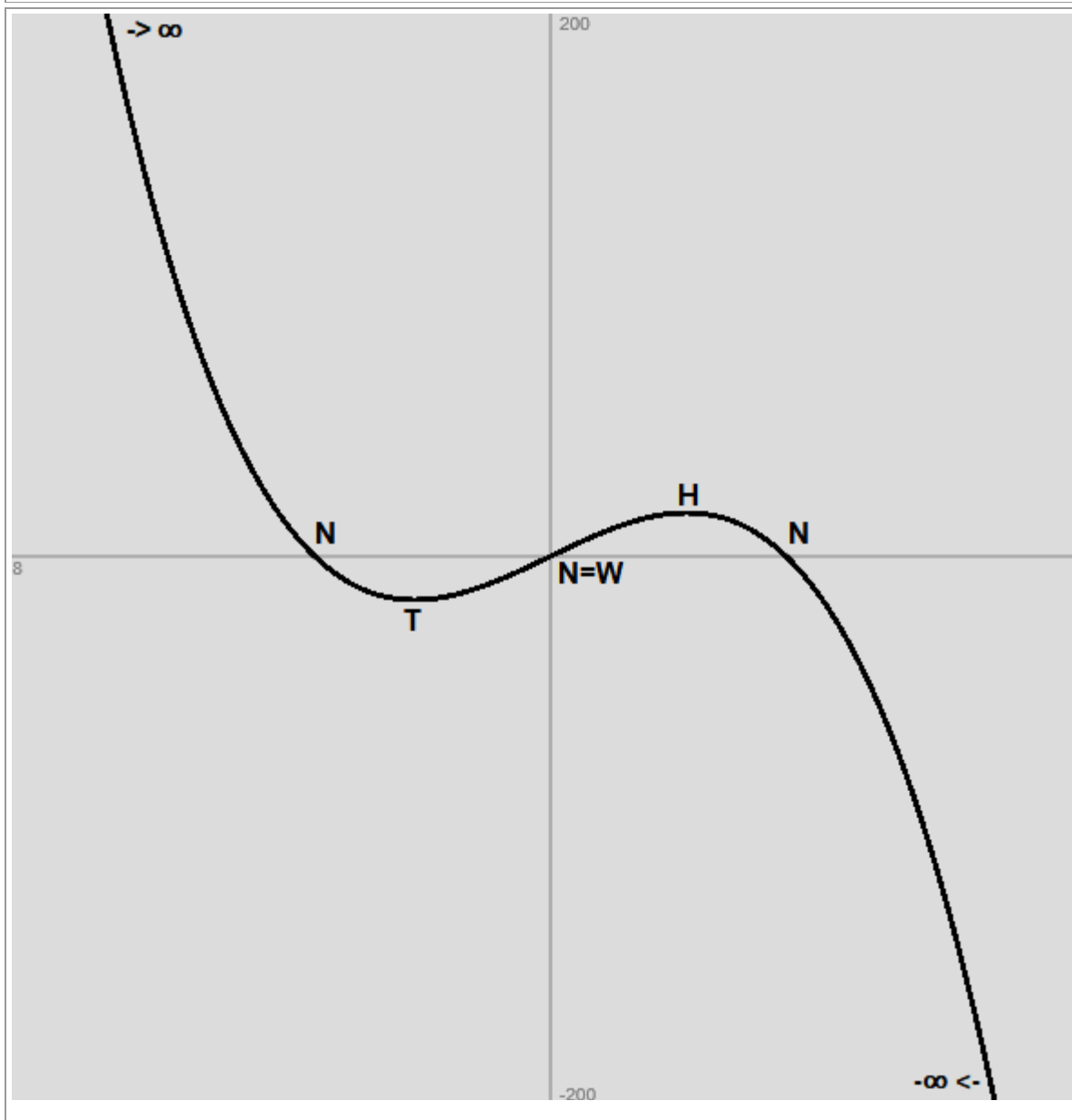
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3.46	-0.0983	-23.9148	20.76	-6	Nullstelle N(-3.47 0)
-2	-16	0	12	-6	Tiefpunkt T(-2 -16)
0	0	12	0	-6	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt S _y (0 0) = Wendepunkt W(0 0)
2	16	0	-12	-6	Hochpunkt H(2 16)
3.47	-0.1419	-24.1227	-20.82	-6	Nullstelle N(3.47 0)

Graph:



$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung O(0|0)

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

Aufgabe 2: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$$

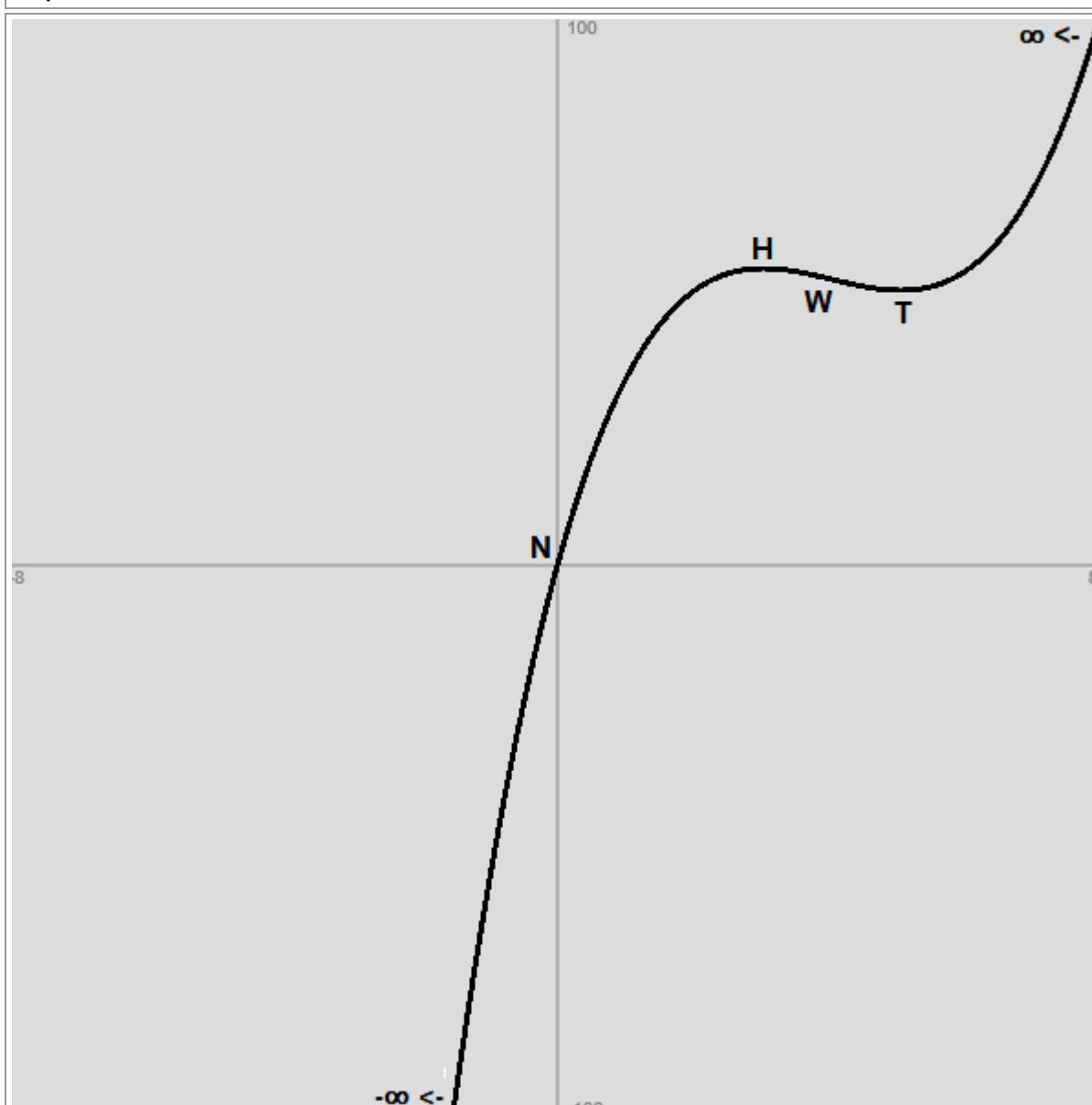
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x .

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	45	-24	6	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt $S_y(0 0)$
3	54	0	-6	6	Hochpunkt H(3 54)
4	52	-3	0	6	Wendepunkt W(4 52)
5	50	0	6	6	Tiefpunkt T(5 50)

Graph:



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm \rightarrow keine Achsensymmetrie zur y -Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung. Die Funktion ist als ganz rationale Funktion 3. Grades punktsymmetrisch zum Wendepunkt W(4|52).

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 3: Untersuche die Funktion

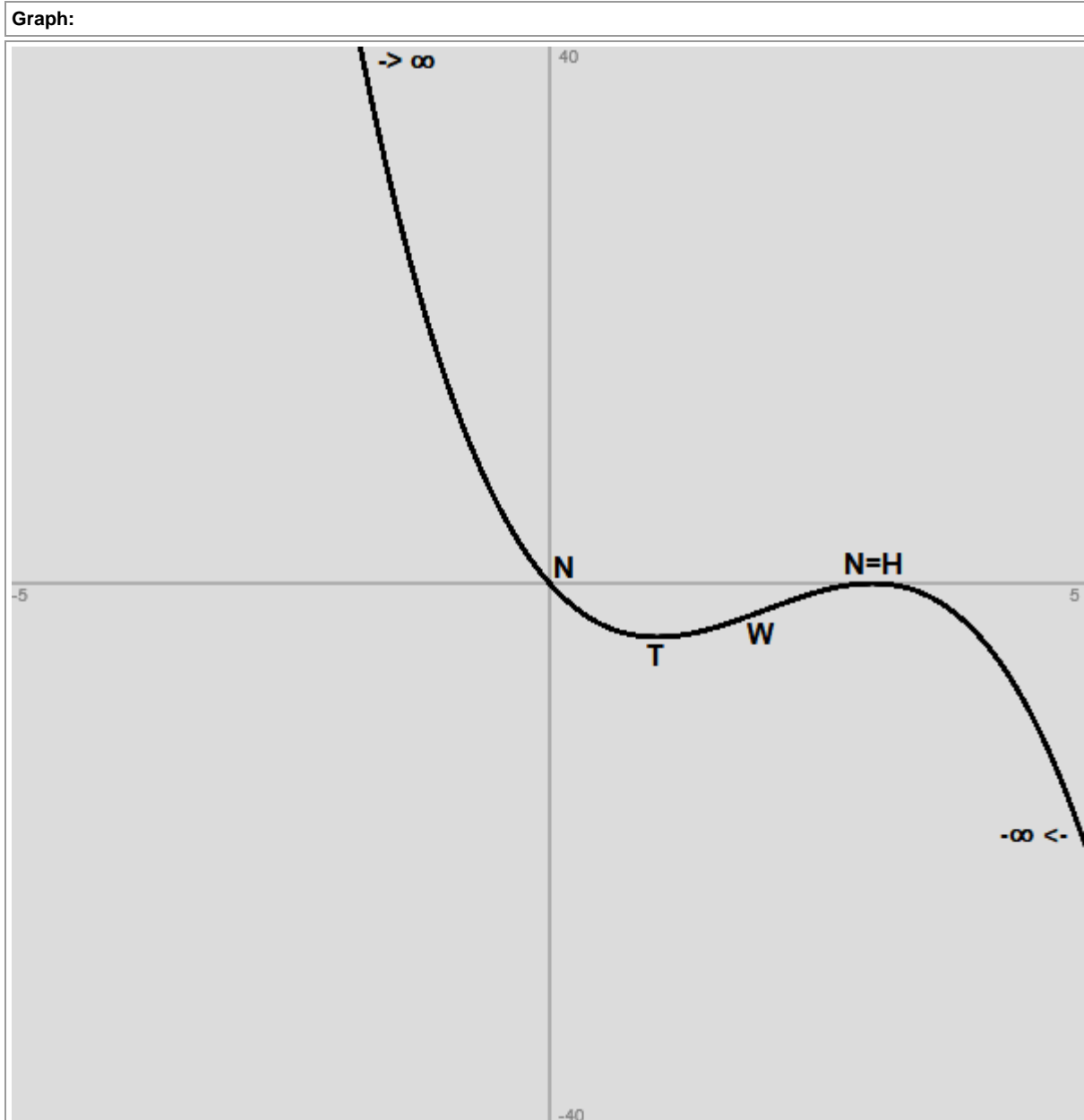
$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x .

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	-9	12	-6	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt $S_y(0 0)$
1	-4	0	6	-6	Tiefpunkt T(1 -4)
2	-2	3	0	-6	Wendepunkt W(2 -2)
3	0	0	-6	-6	Nullstelle N(3 0) = Hochpunkt H(3 0)



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm \rightarrow keine Achsensymmetrie zur y -Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung. Die Funktion ist als ganz rationale Funktion 3. Grades punktsymmetrisch zum Wendepunkt W(2|-2).

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

Aufgabe 4: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x + 5$$

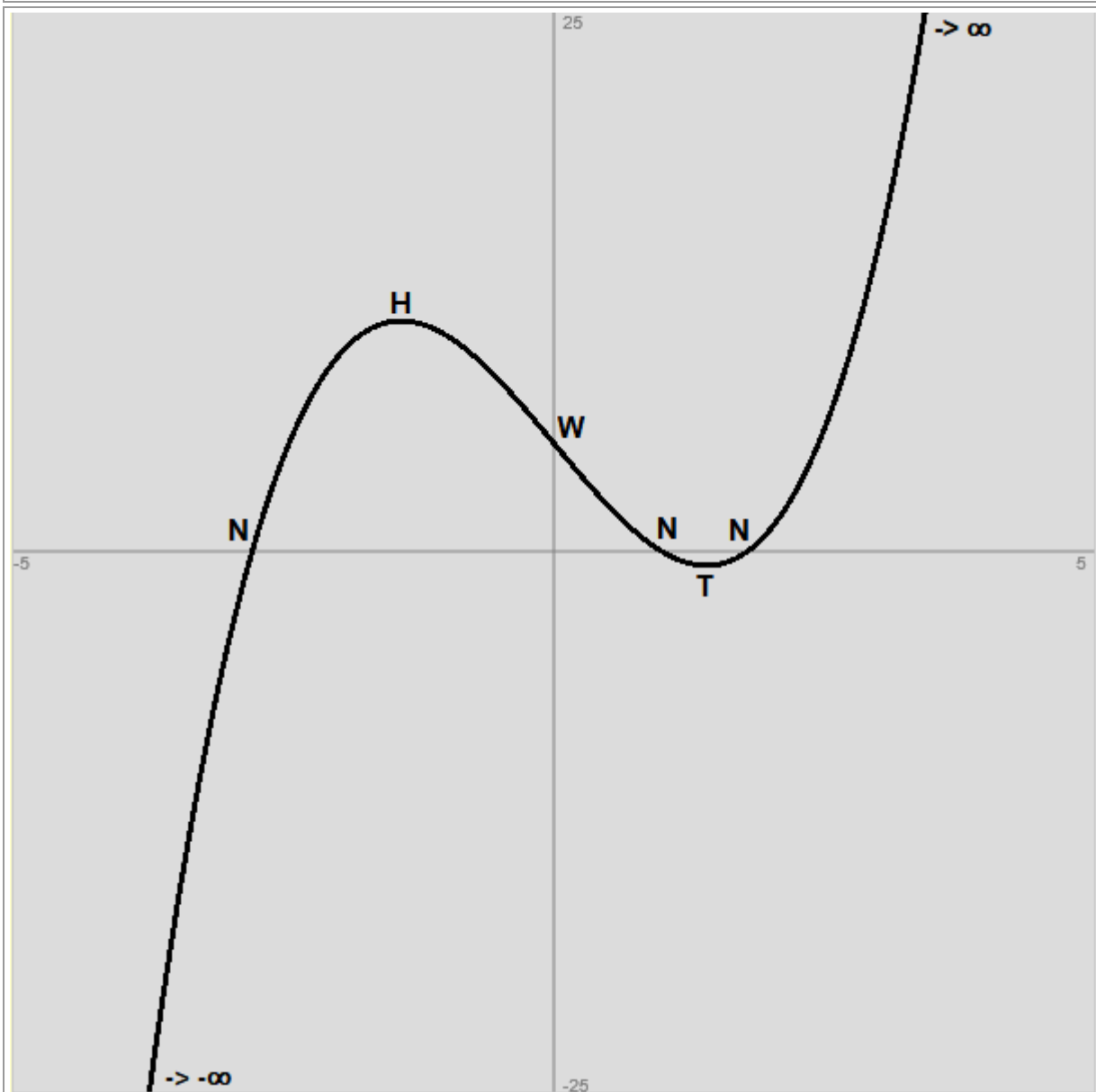
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2.79	0.0224	17.3523	-16.74	6	Nullstelle N(-2.79 0)
-1.41	10.6568	-0.0357	-8.46	6	Hochpunkt H(-1.41 10.66)
0	5	-6	0	6	Schnittpunkt $S_y(0 5)$ = Wendepunkt W(0 5)
1	0	-3	6	6	Nullstelle N(1 0)
1.42	-0.6567	0.0492	8.52	6	Tiefpunkt T(1.42 -0.66)
1.8	0.032	3.72	10.8	6	Nullstelle N(1.8 0)

Graph:



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen \rightarrow keine Achsensymmetrie zur y-Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 5: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 6$$

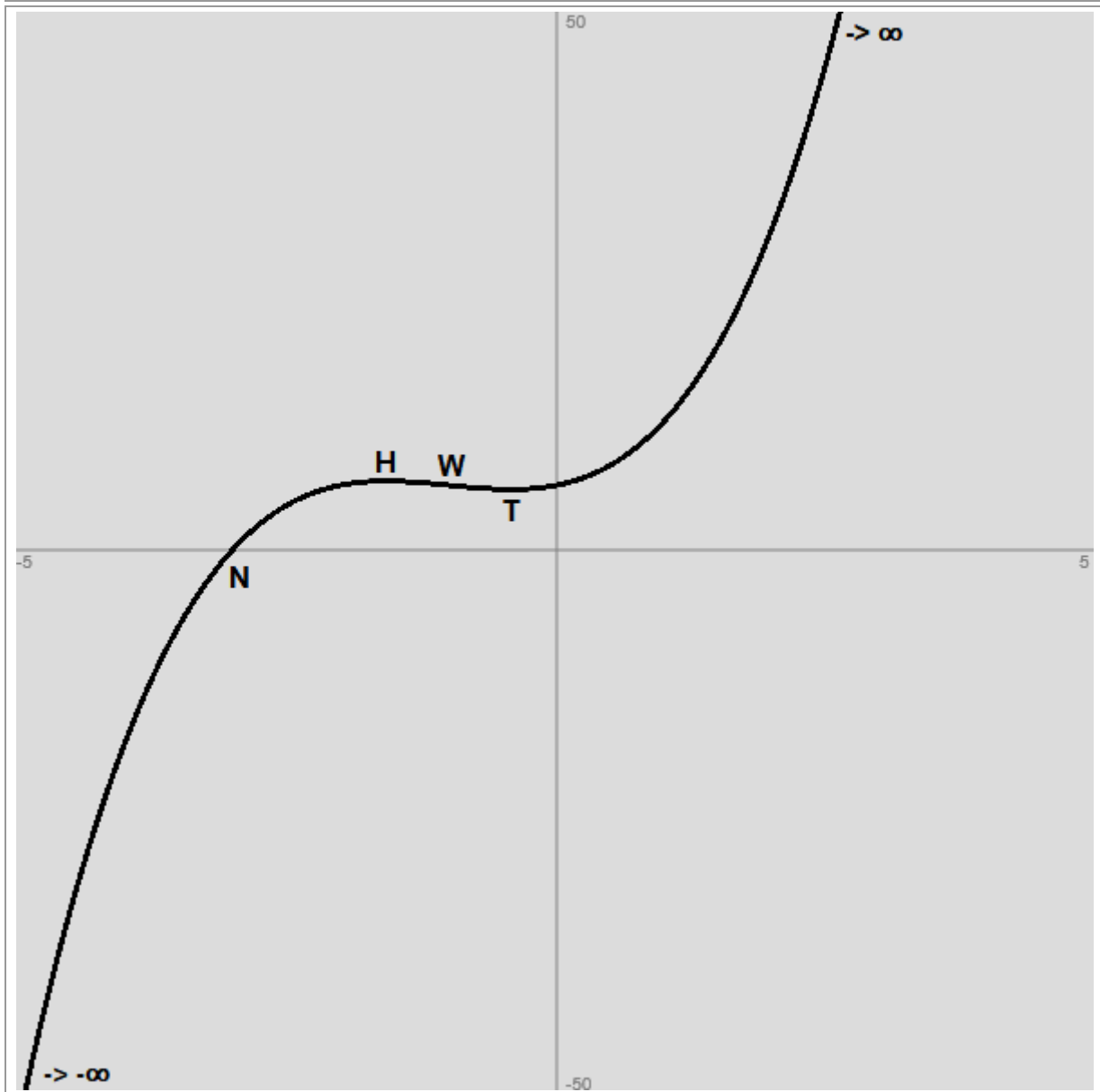
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x .

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3	0	11	-12	6	Nullstelle N(-3 0)
-1.57	6.3848	-0.0253	-3.42	6	Hochpunkt H(-1.57 6.38)
-1	6	-1	0	6	Wendepunkt W(-1 6)
-0.42	5.6151	0.0092	3.48	6	Tiefpunkt T(-0.42 5.62)
0	6	2	6	6	Schnittpunkt S _y (0 6)

Graph:



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen \rightarrow keine Achsensymmetrie zur y -Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 6: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$$

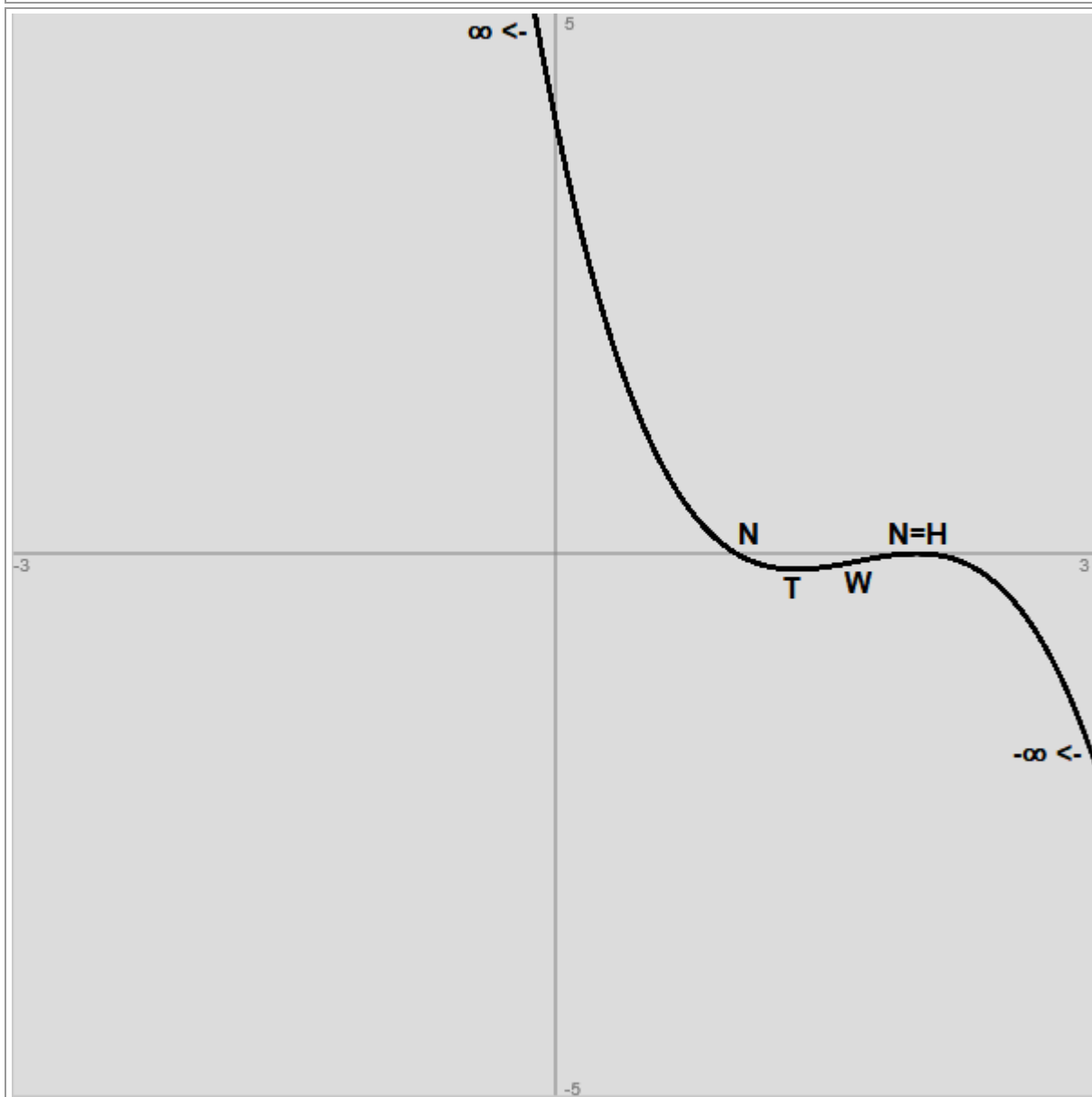
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x .

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	4	-8	10	-6	Schnittpunkt $S_y(0 4)$
1	0	-1	4	-6	Nullstelle $N(1 0)$
1.34	-0.1481	0.0132	1.96	-6	Tiefpunkt $T(1.34 -0.15)$
1.67	-0.073	0.3333	-0.02	-6	Wendepunkt $W(1.67 -0.07)$
2	0	0	-2	-6	Nullstelle $N(2 0) =$ Hochpunkt $H(2 0)$

Graph:



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen \rightarrow keine Achsensymmetrie zur y -Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

Aufgabe 7: Untersuche die Funktion

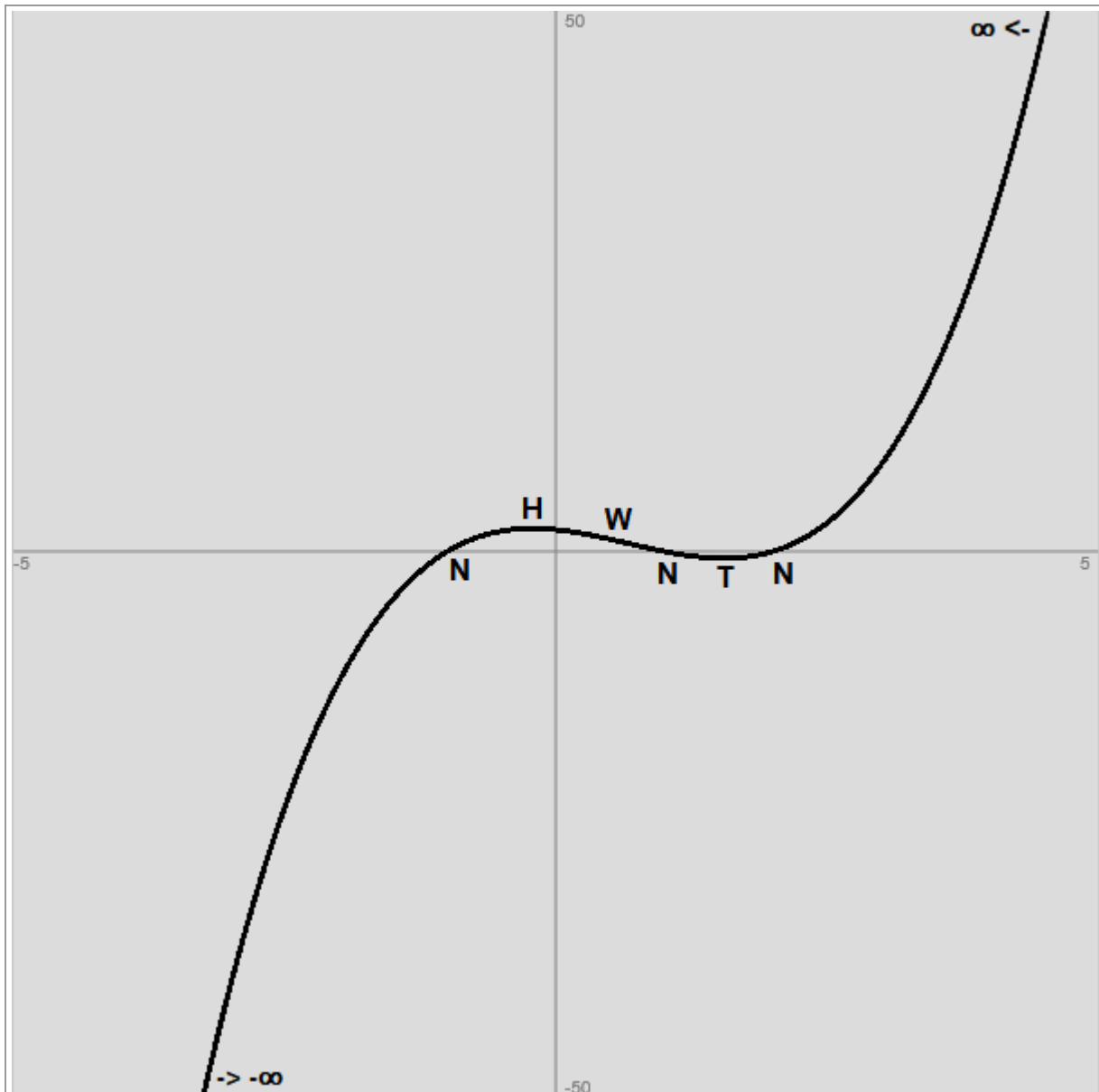
$$f(x) = (x^2 - x - 2)(x - 1)$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$). **Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1	0	6	-10	Nullstelle N(-1 0)
-0.22	2.1126	0.03	-5.32	Hochpunkt H(-0.22 2.11)
0	2	-1	-4	Schnittpunkt $S_y(0 2)$
0.66	0.7563	-2.33	-0.04	Wendepunkt W(0.66 0.76)
1	0	-2	2	Nullstelle N(1 0)
1.54	-0.6309	-0.05	5.24	Tiefpunkt T(1.54 -0.63)
2	0	3	8	Nullstelle N(2 0)

Graph:



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen \rightarrow keine Achsensymmetrie zur y-Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 8: Untersuche die Funktion

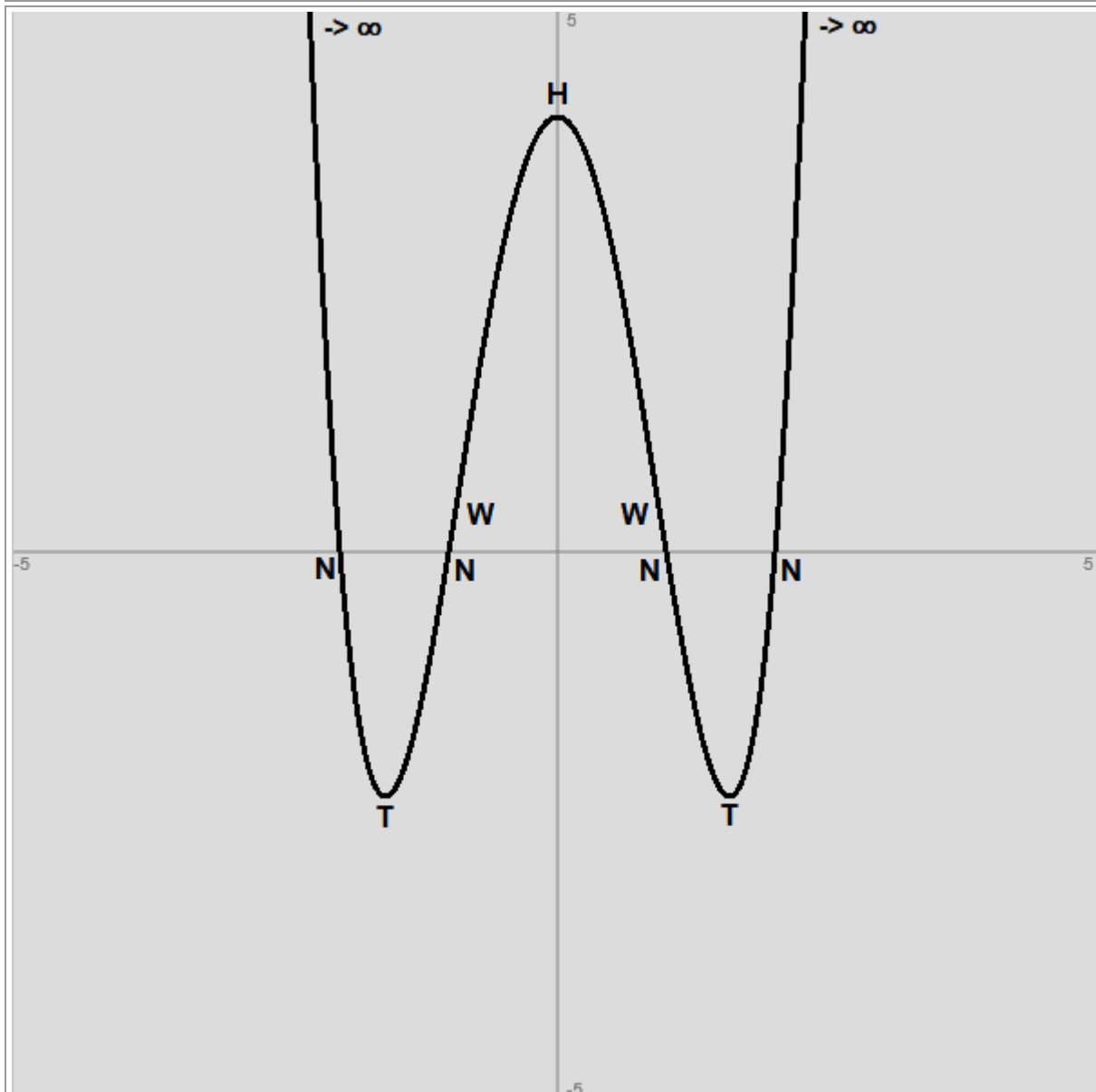
$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$). **Lösung:**

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	-12	38	-48	Nullstelle N(-2 0)
-1.58	-2.25	0.0228	19.9568	-37.92	Tiefpunkt T(-1.58 -2.25)
-1	0	6	2	-24	Nullstelle N(-1 0)
-0.91	0.5452	6.0857	-0.0628	-21.84	Wendepunkt W(-0.91 0.55)
0	4	0	-10	0	Schnittpunkt $S_y(0 4)$ = Hochpunkt H(0 4)
0.92	0.4844	-6.0852	0.1568	22.08	Wendepunkt W(0.92 0.48)
1	0	-6	2	24	Nullstelle N(1 0)
1.59	-2.2492	0.1787	20.3372	38.16	Tiefpunkt T(1.59 -2.25)
2	0	12	38	48	Nullstelle N(2 0)

Graph:



$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty; x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 9: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$$

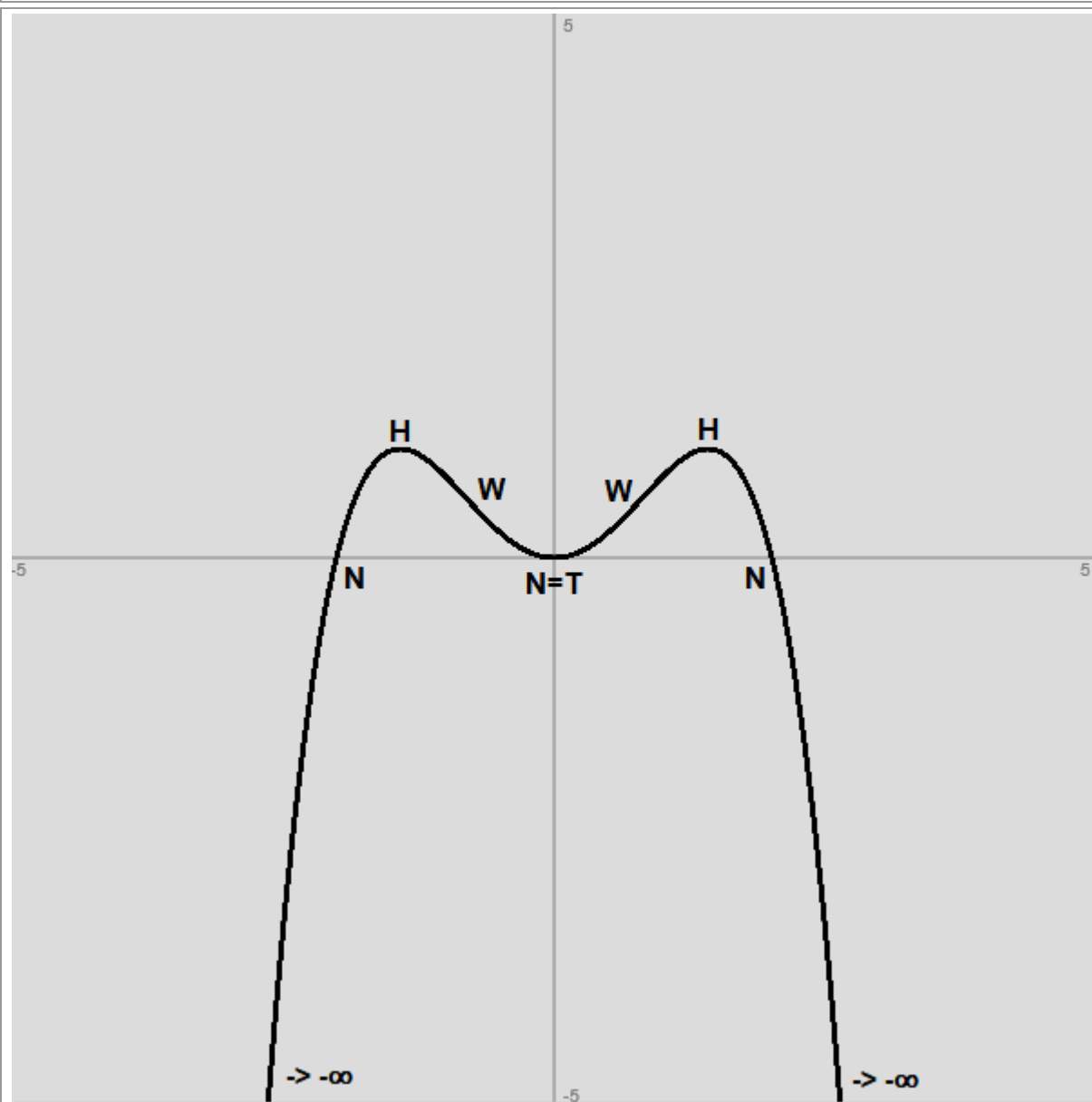
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	4	-10	12	Nullstelle N(-2 0)
-1.41	1	-0.0168	-3.9643	8.46	Hochpunkt H(-1.41 1)
-0.81	0.5485	-1.0886	0.0317	4.86	Wendepunkt W(-0.81 0.55)
0	0	0	2	0	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt $S_y(0 0)$ = Tiefpunkt T(0 0)
0.82	0.5594	1.0886	-0.0172	-4.92	Wendepunkt W(0.82 0.56)
1.42	0.9999	-0.0233	-4.0492	-8.52	Hochpunkt H(1.42 1)
2	0	-4	-10	-12	Nullstelle N(2 0)

Graph:



Gerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> Achsensymmetrie zur y-Achse

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

Aufgabe 10: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 2x^3$$

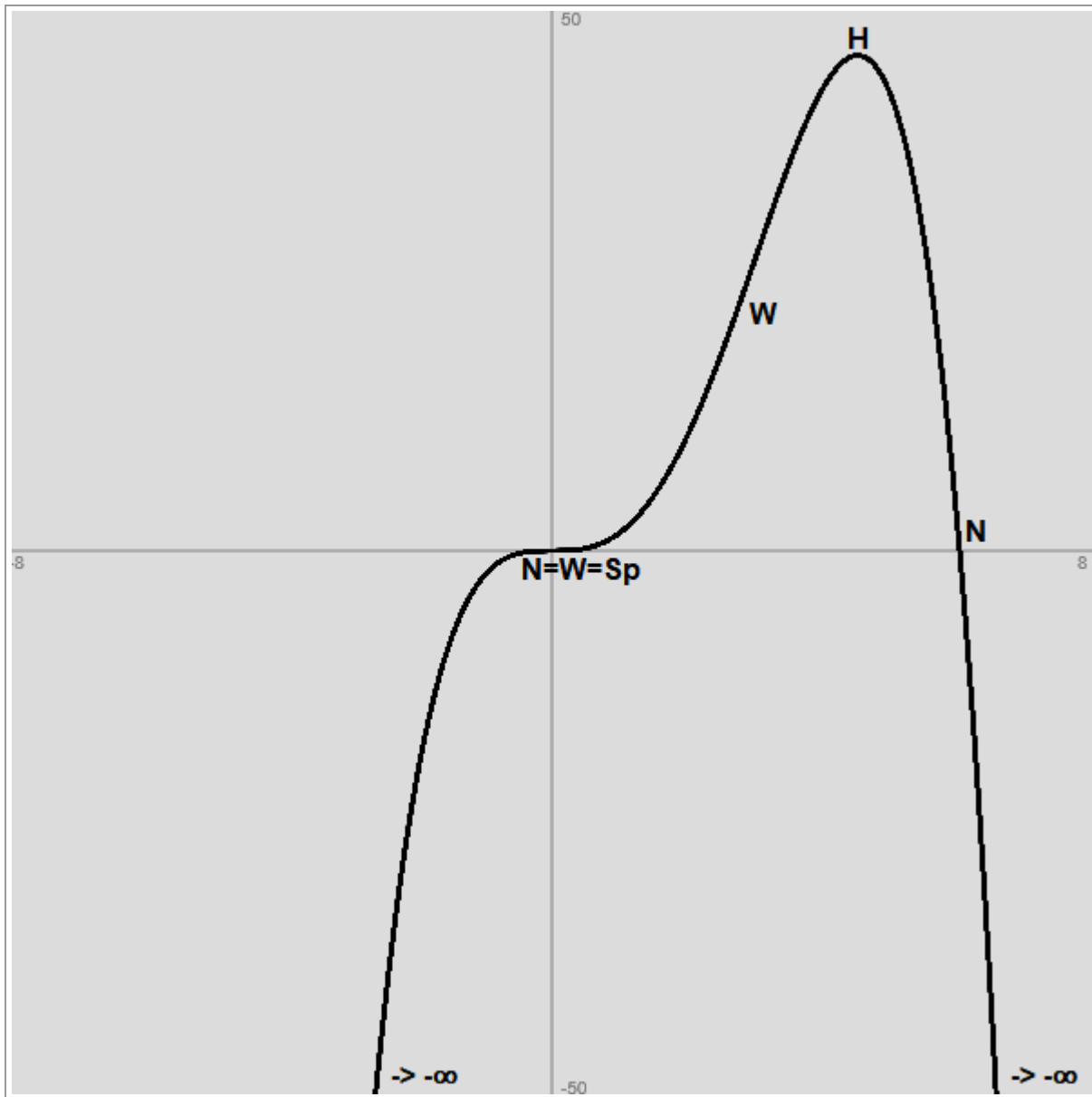
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x .

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	12	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt S _y (0 0) = Sattelpunkt W _s (0 0)
3	27	18	0	-12	Wendepunkt W(3 27)
4.5	45.5625	0	-27	-24	Hochpunkt H(4.5 45.56)
6	0	-72	-72	-36	Nullstelle N(6 0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Symmetrie vorhanden

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

Aufgabe 11: Untersuche die Funktion

$$f(x) = 0,5x^4 + x^3 + 2x^2$$

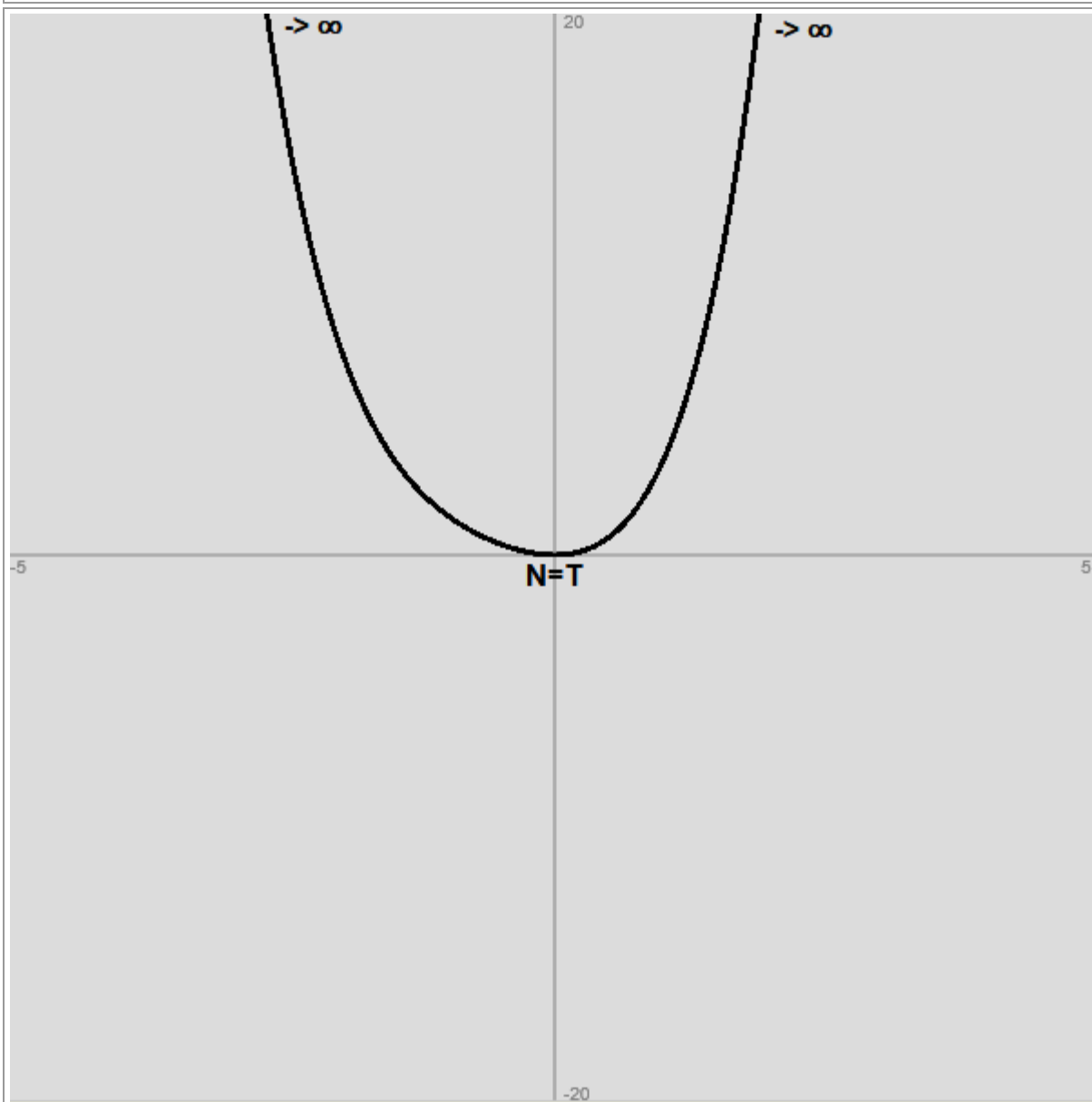
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	4	6	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt S _y (0 0) = Tiefpunkt T(0 0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Symmetrie vorhanden

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 12: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x(x-2)^3 - 8$$

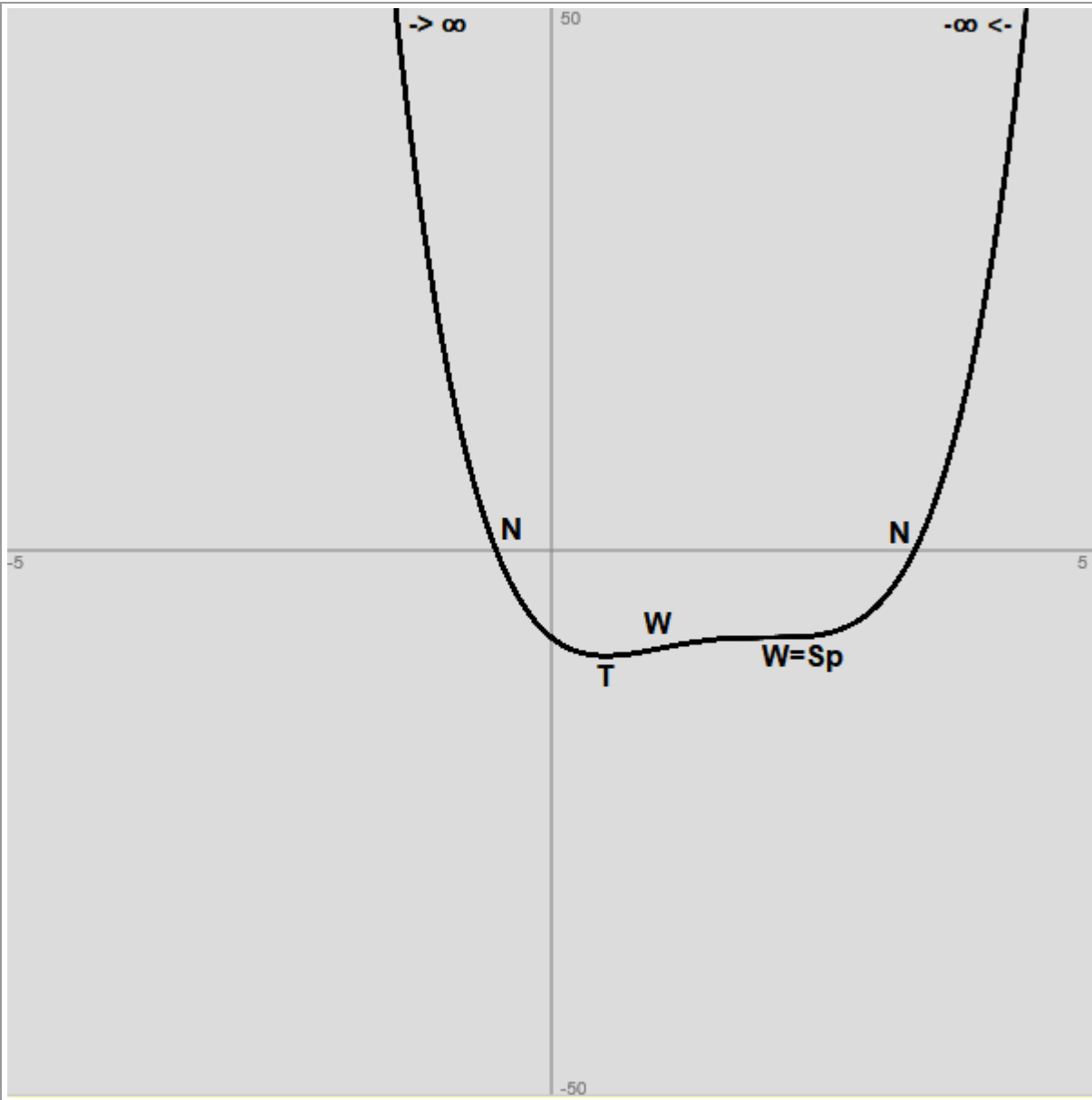
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-0.508	0.0139	-25.36	45.38	Nullstelle N(-0.51 0)
0	-8	-8	24	Schnittpunkt S _y (0 -8)
0.5	-9.6875	0	9	Tiefpunkt T(0.5 -9.69)
1	-9	2	0	Wendepunkt W(1 -9)
1.998	-8	0	-0.02	Wendepunkt W(2 -8) = Sattelpunkt W _s (2 -8)
3.338	-0.0043	20.32	37.54	Nullstelle N(3.34 0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm \rightarrow keine Symmetrie vorhanden

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 13: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$$

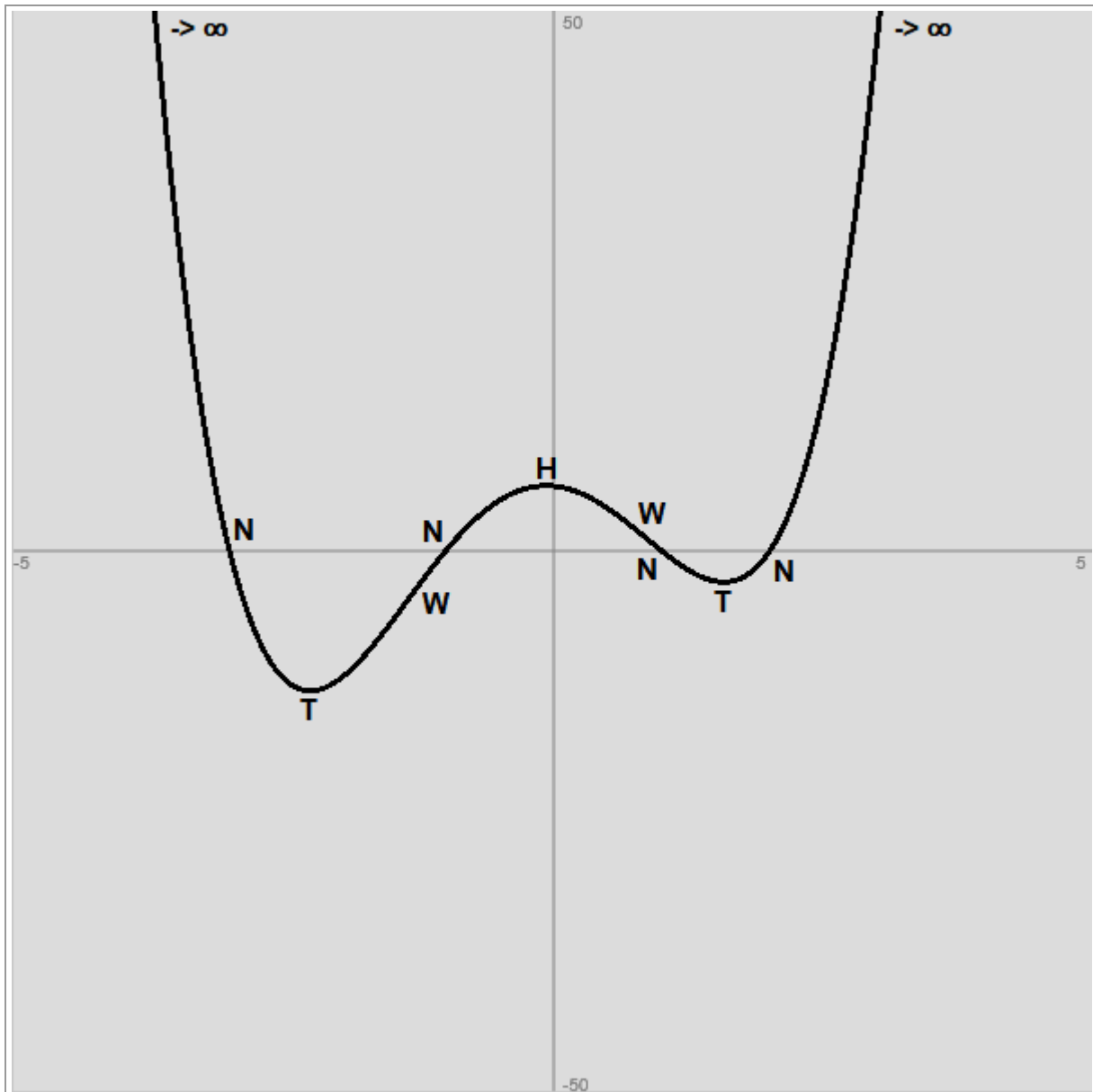
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$). **Lösung:**

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3	0	-40	76	-66	Nullstelle N(-3 0)
-2.25	-12.9492	0.125	33.25	-48	Tiefpunkt T(-2.25 -12.95)
-1.35	-4.5464	13.526	-0.23	-26.4	Wendepunkt W(-1.35 -4.55)
-1	0	12	-8	-18	Nullstelle N(-1 0)
-0.07	6.0354	-0.0067	-14.3612	4.32	Hochpunkt H(-0.07 6.04)
0	6	-1	-14	6	Schnittpunkt $S_y(0 6)$
0.86	1.1459	-8.277	0.0352	26.64	Wendepunkt W(0.86 1.15)
1	0	-8	4	30	Nullstelle N(1 0)
1.58	-2.8785	0.1464	25.4368	43.92	Tiefpunkt T(1.58 -2.88)
2	0	15	46	54	Nullstelle N(2 0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm \rightarrow keine Symmetrie vorhanden

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 14: Untersuche die Funktion

$$f(x) = 4x^2 - \frac{1}{2}x^5$$

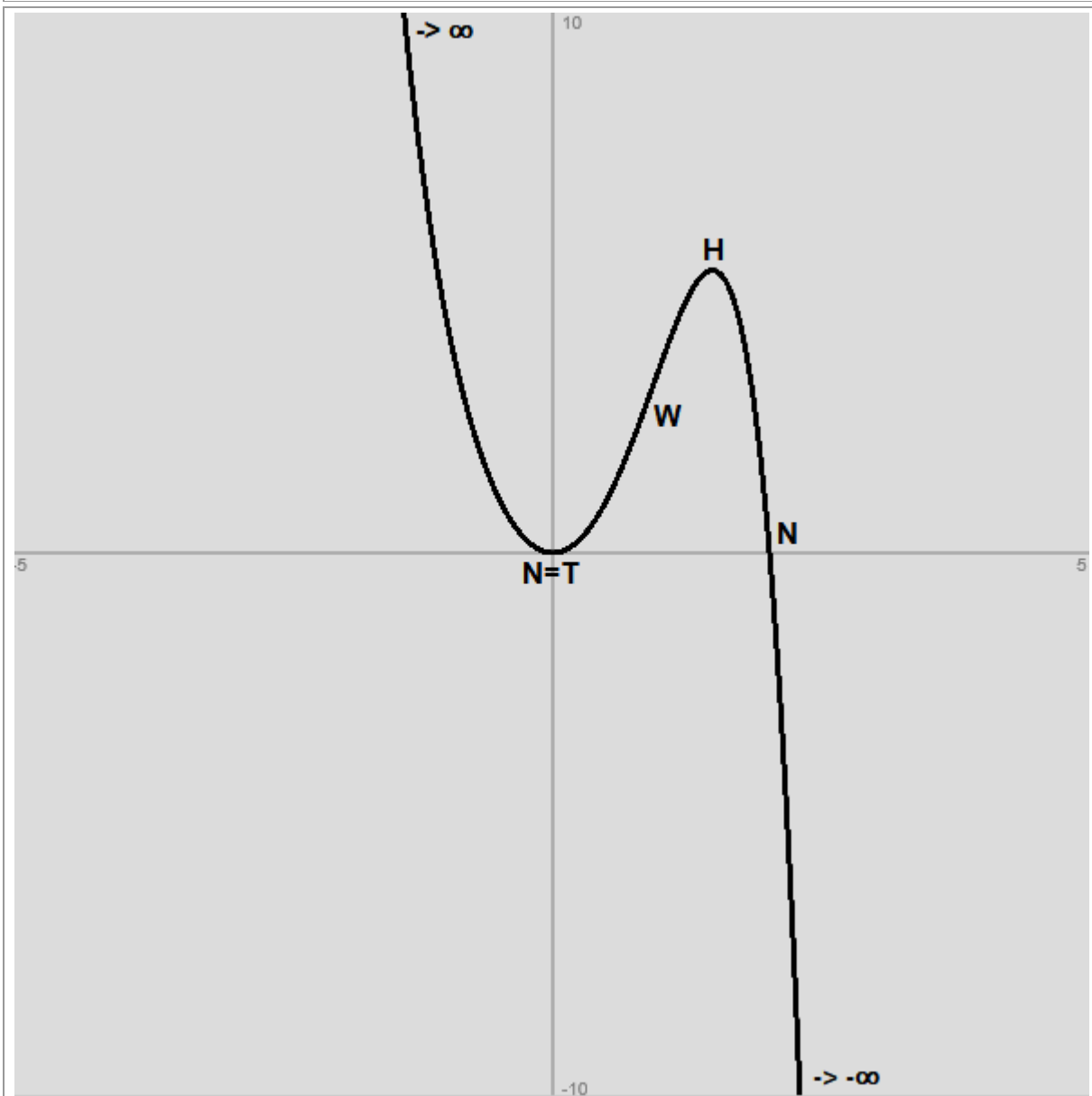
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	8	0	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt $S_y(0 0)$ = Tiefpunkt T(0 0)
0.93	3.1118	5.5699	-0.0436	-25.947	Wendepunkt W(0.93 3.11)
1.48	5.2112	-0.1546	-24.4179	-65.712	Hochpunkt H(1.48 5.21)
2	0	-24	-72	-120	Nullstelle N(2 0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm \rightarrow keine Symmetrie vorhanden

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

Aufgabe 15: Untersuche die Funktion

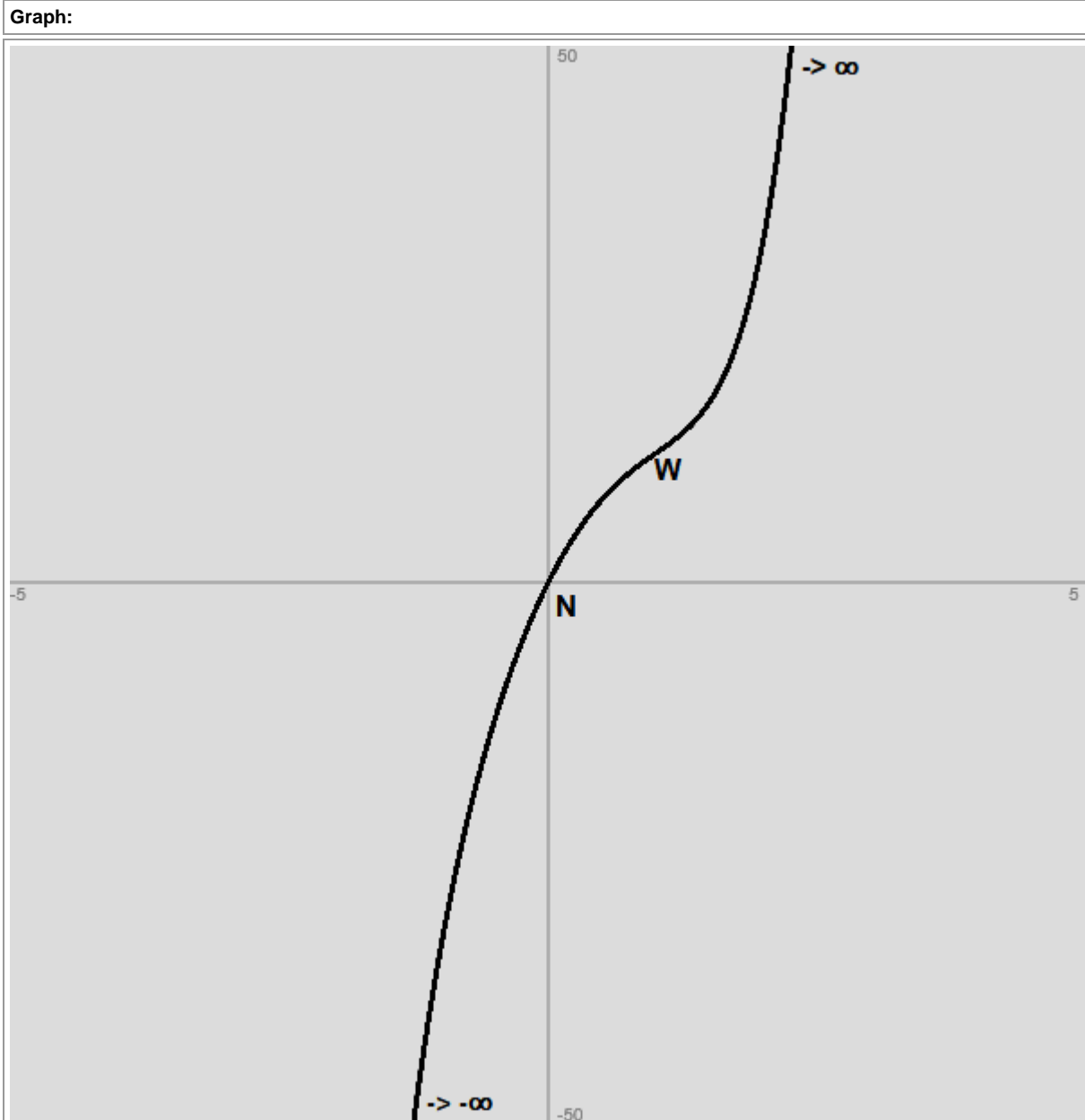
$$f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 20x$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	20	-20	12	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt S _y (0 0)
1	12	7	0	48	Wendepunkt W(1 12)



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm \rightarrow keine Symmetrie vorhanden

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 16: Untersuche die Funktion

$$f(x) = (x^3 - 8)(x^2 - 16)$$

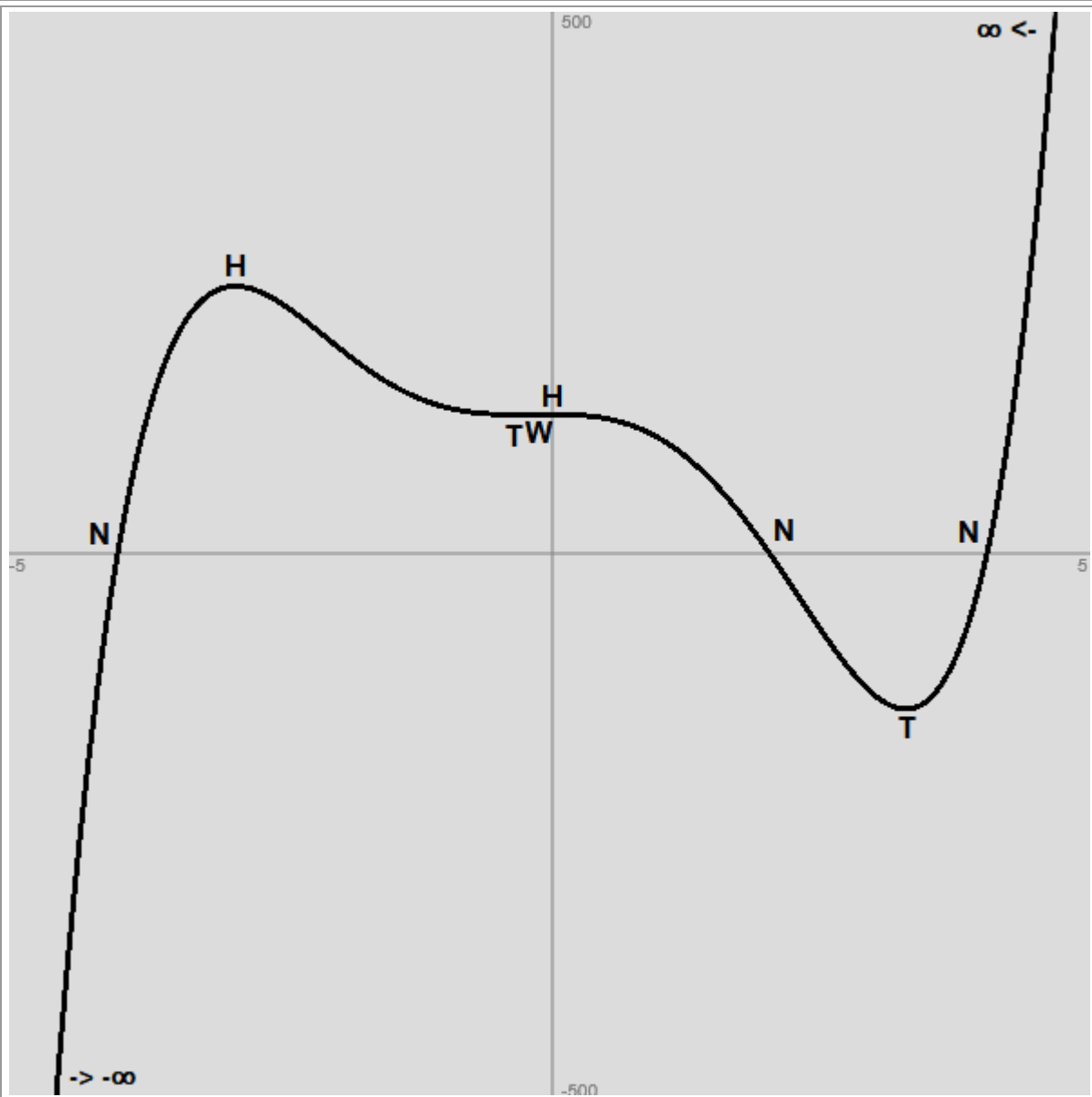
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x .

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-4	0	576	-912	Nullstelle N(-4 0)
-2.916	245.8616	0.02	-231.96	Hochpunkt H(-2.92 245.86)
-2.104	200.3783	-80.84	-0.3	Wendepunkt W(-2.1 200.38)
-0.338	127.6995	-0.01	15.68	Tiefpunkt T(-0.34 127.7)
-0.168	127.8499	1.34	0.03	Wendepunkt W(-0.17 127.85)
0	128	0	-16	Schnittpunkt $S_y(0 128)$ = Hochpunkt H(0 128)
2	0	-144	-48	Nullstelle N(2 0)
2.268	-39.8008	-150.9	-0.4	Wendepunkt W(2.27 -39.8)
3.252	-143.1608	-0.45	359.64	Tiefpunkt T(3.25 -143.16)
4	0	448	880	Nullstelle N(4 0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm \rightarrow keine Symmetrie vorhanden

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 17: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 5x$$

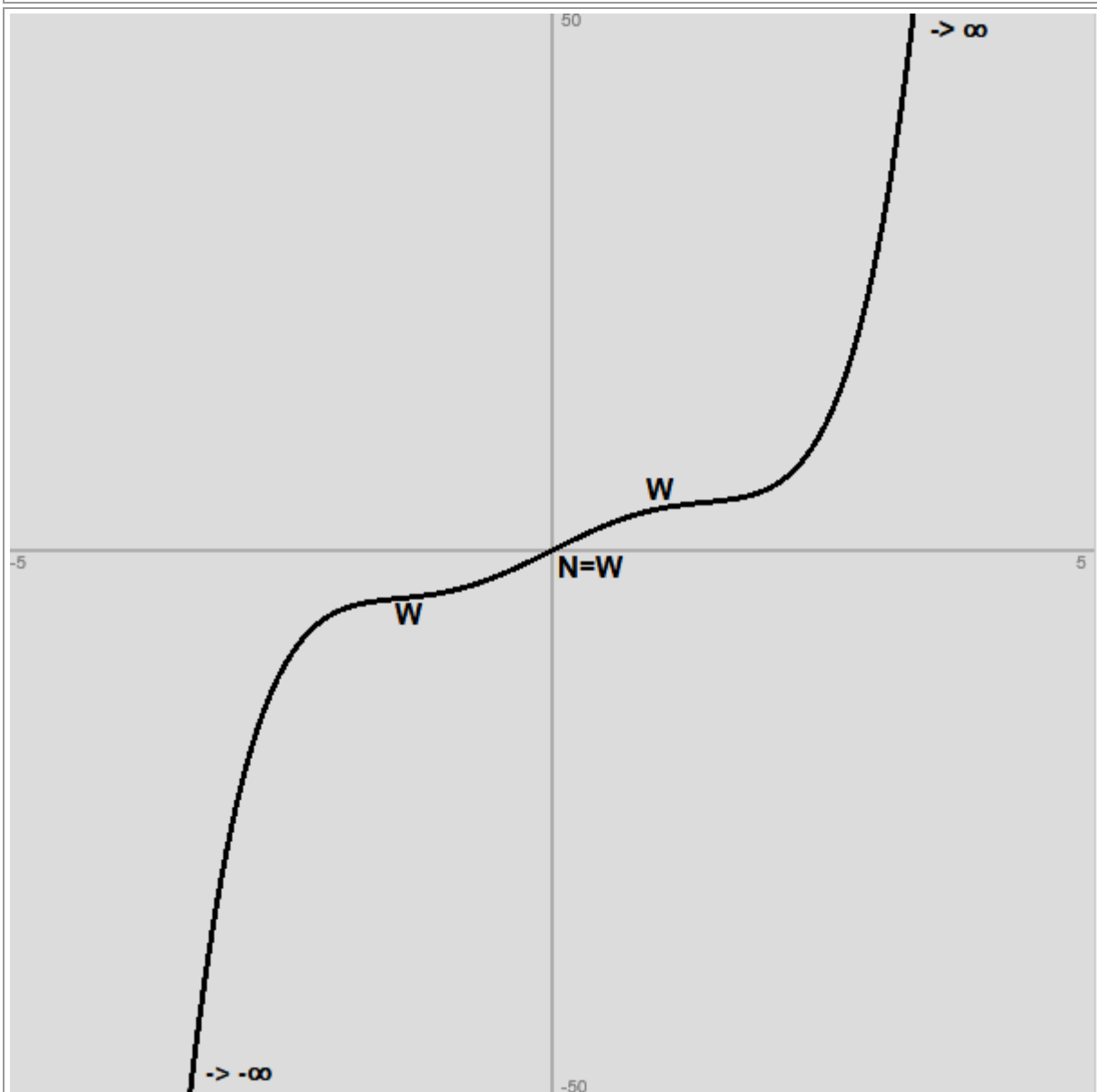
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1.41	-4.427	1.0001	0.0671	15.8572	Wendepunkt W(-1.41 -4.43)
0	0	5	0	-8	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt $S_y(0 0)$ = Wendepunkt W(0 0)
1.42	4.437	1.0003	0.0932	16.1968	Wendepunkt W(1.42 4.44)

Graph:



Ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm \rightarrow Punktsymmetrie zum Ursprung O(0|0)

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 18: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)x^3(x-3)$$

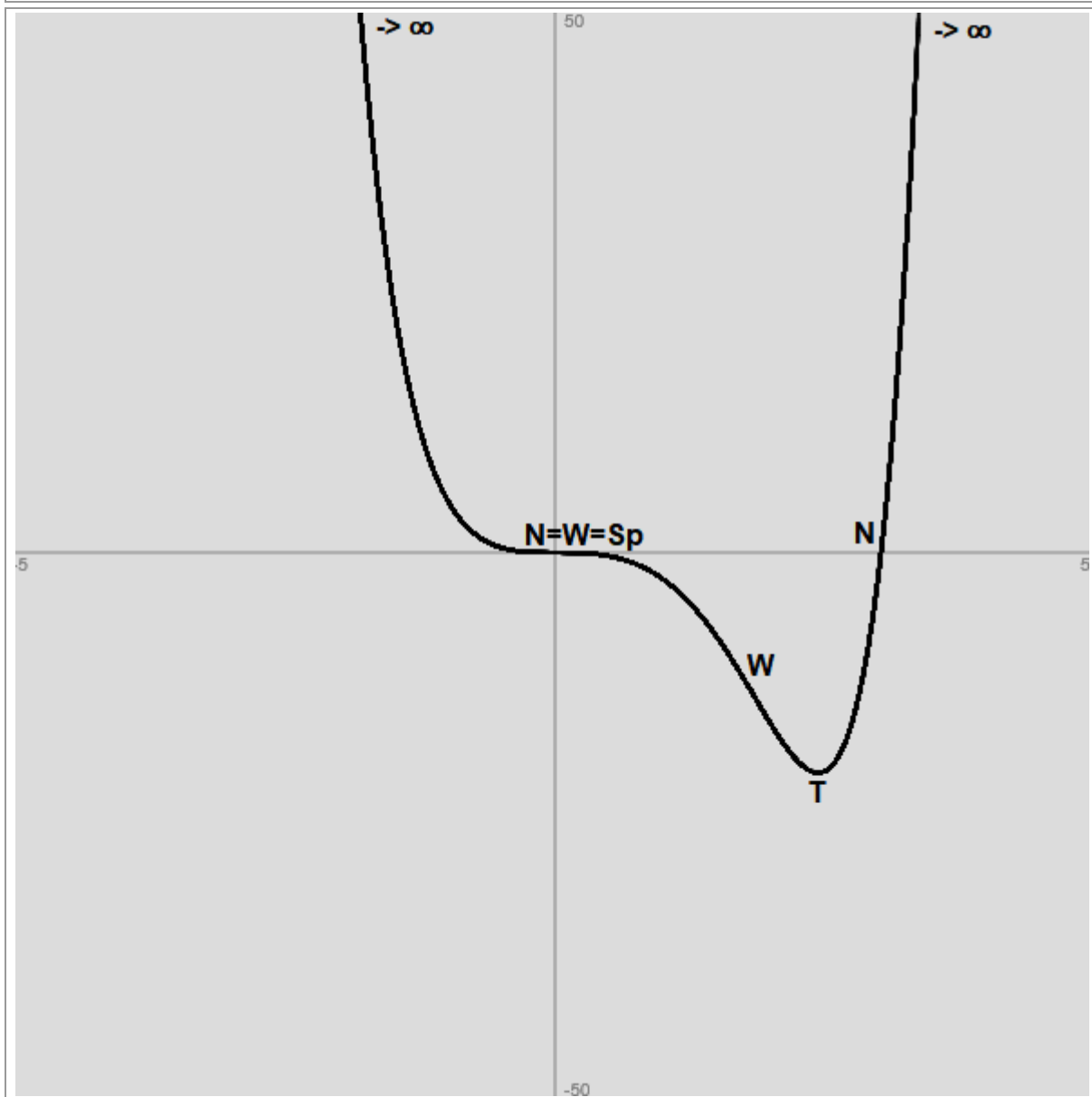
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt S _y (0 0) = Wendepunkt W(0 0) = Sattelpunkt W _s (0 0)
1.838	-13.3087	-16.9	-0.09	Wendepunkt W(1.84 -13.31)
2.42	-20.255	-0.13	71.36	Tiefpunkt T(2.42 -20.26)
3	0	87.75	256.5	Nullstelle N(3 0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm \rightarrow keine Symmetrie vorhanden

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 19: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2 \right)$$

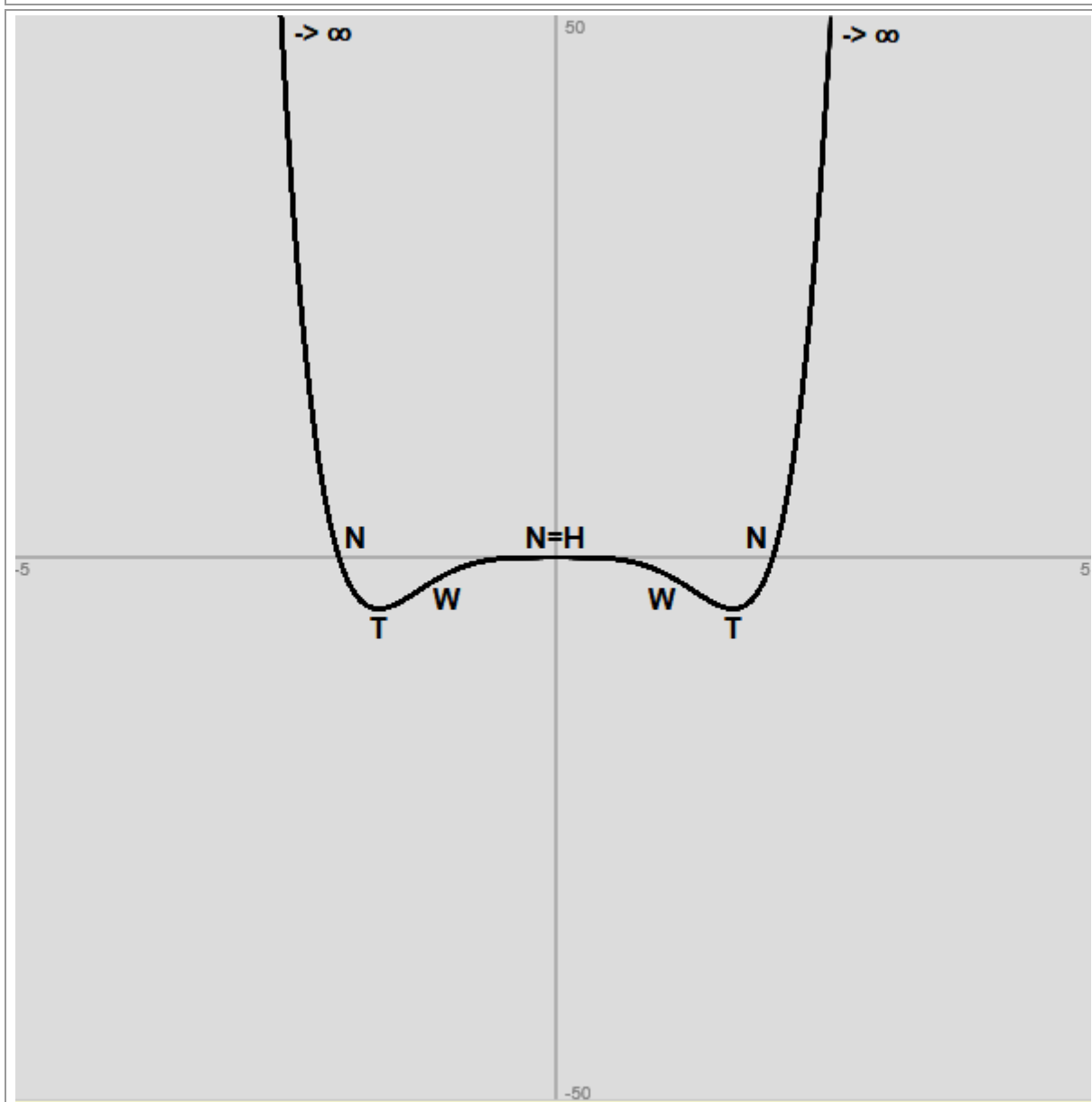
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	-32	144	Nullstelle N(-2 0)
-1.634	-4.7407	-0.04	42.85	Tiefpunkt T(-1.63 -4.74)
-1.266	-3.0791	6.48	0.07	Wendepunkt W(-1.27 -3.08)
0	0	0	0	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt S _y (0 0) = Hochpunkt H(0 0)
1.264	-3.0661	-6.48	-0.06	Wendepunkt W(1.26 -3.07)
1.632	-4.7407	-0.04	42.49	Tiefpunkt T(1.63 -4.74)
2	0	32	144	Nullstelle N(2 0)

Graph:



$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

Aufgabe 20: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^6 + 2x^5 - 23x^4 - 40x^3 + 124x^2 + 128x - 192}{10}$$

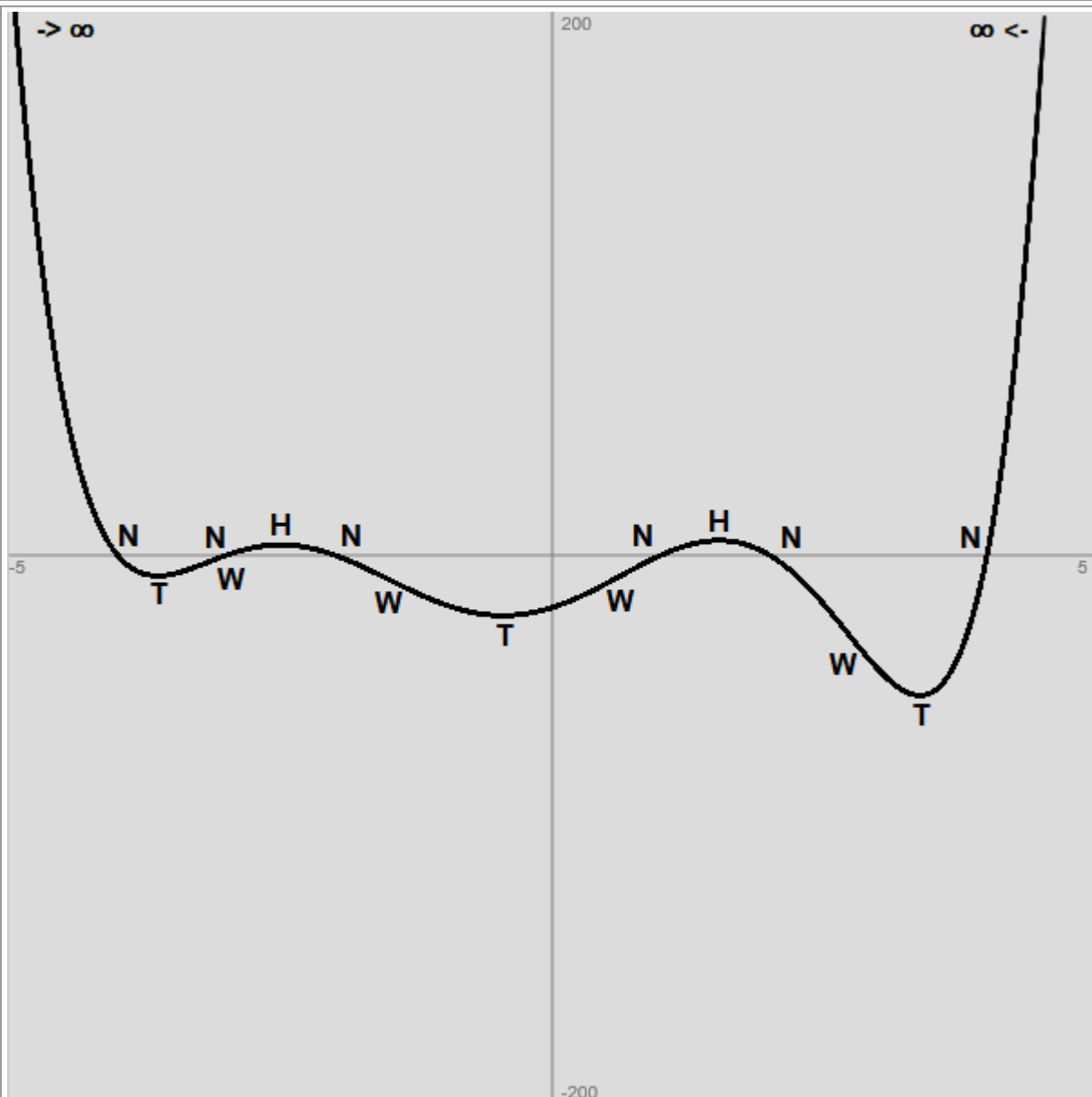
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x .

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-4	0	-48.01	191.2	Nullstelle N(-4 0)
-3.64	-7.5547	-0.62	80.22	Tiefpunkt T(-3.64 -7.55)
-3.18	-2.7077	15.58	0.17	Wendepunkt W(-3.18 -2.71)
-3	0	14	-16.6	Nullstelle N(-3 0)
-2.5	3.8391	0.02	-33.01	Hochpunkt H(-2.5 3.84)
-2	0	-14.4	-21.6	Nullstelle N(-2 0)
-1.51	-8.825	-19.84	-0.07	Wendepunkt W(-1.51 -8.82)
-0.46	-22.181	-0.22	29.74	Tiefpunkt T(-0.46 -22.18)
0	-19.2	12.8	24.8	Schnittpunkt $S_y(0 -19.2)$
0.63	-7.5508	21.58	0.2	Wendepunkt W(0.63 -7.55)
1	0	18	-19.8	Nullstelle N(1 0)
1.53	5.4409	0.21	-45.76	Hochpunkt H(1.53 5.44)
2	0	-24	-53.6	Nullstelle N(2 0)
2.71	-28.2634	-49.59	-1.52	Wendepunkt W(2.71 -28.26)
3.38	-51.5831	-0.51	174.38	Tiefpunkt T(3.38 -51.58)
4	0	201.61	511.21	Nullstelle N(4 0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm \rightarrow keine Symmetrie vorhanden

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

www.michael-buhlmann.de / 08.2017 / Mathematik-Aufgabenpool: Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen / Aufgaben 416-435