

# Mathematik-Aufgabenpool

## > Kurvendiskussion

### gebrochen rationaler Funktionen I

**Einleitung:** Eine gebrochen rationale Funktion (Polynom)  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  (mit maximaler Definitionsbereich  $D_f$ ) ist vom Typ:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (\text{für natürliche Zahlen } m, n \text{ und reelle Koeffizienten } a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m; a_n, b_m \neq 0).$$

Gebrochen rationale Funktionen sind Brüche von ganz rationalen Funktionen. Für die Kurvendiskussion einer gebrochen rationalen Funktion  $f(x)$  folgt:

<b>Zentrale Punkte der Kurvendiskussion</b>	
Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n (x - x_{N1})^{k_1} (x - x_{N2})^{k_2} \cdot \dots \cdot R_1(x)}{b_m (x - x_{P1})^{k_l} (x - x_{P2})^{k_l} \cdot \dots \cdot R_2(x)}$	
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen:	
a) Nenner = 0 $\rightarrow b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0 \rightarrow x_{P1}, x_{P2}, \dots \rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_{P1}, x_{P2}, \dots\}$ (Definitionsbereich)	
b) Zähler = 0 $\rightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \rightarrow x_{N1}, x_{N2}, \dots$	
c) Auswertung:	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Stimmt eine Nennernullstelle <math>x_P</math> mit einer Zählernullstelle <math>x_N</math> überein, so kann der Funktionsterm <math>f(x)</math> um den Faktor <math>(x - x_P)^l = (x - x_N)^k</math> (<math>l=k</math>) zu <math>f^*(x)</math> gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer <math>k</math>, so liegt bei <math>x_P</math> eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich <math>k</math>, so liegt bei <math>x_P</math> eine Lücke mit Lückenwert <math>f^*(x_P)</math> vor.</li> <li>- Ansonsten liegen bei <math>x_{P1}, x_{P2}, \dots</math> senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor <math>(x - x_P)^l</math> vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem <math>l</math> (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote <math>x_P</math> mit <math>f(x) \rightarrow -\infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>) und <math>f(x) \rightarrow \infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>) oder mit <math>f(x) \rightarrow \infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>) und <math>f(x) \rightarrow -\infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem <math>l</math> (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote <math>x_P</math> mit <math>f(x) \rightarrow -\infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>) und <math>f(x) \rightarrow \infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>) oder mit <math>f(x) \rightarrow \infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>) und <math>f(x) \rightarrow -\infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>)).</li> <li>- Ansonsten liegen weiter bei <math>x_{N1}, x_{N2}, \dots</math> Nullstellen mit Linearfaktor <math>(x - x_P)^k</math> vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem <math>k</math>, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem <math>k</math> (Hoch-, Tiefpunkt).</li> </ul>	
II. Waagerechte Asymptote: Für $x \rightarrow \pm\infty$ gilt:	
$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$	$\left\{ \begin{array}{ll} \rightarrow 0 & \text{falls } n < m \\ \rightarrow \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \\ \rightarrow \pm\infty & \text{falls } n > m \end{array} \right.$
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm $f(x)$ zu $f^*(x)$ kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz $x^n$ und Anwendung der Potenzregel)	
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen):	
a) $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$	
b) $f''(x_1) < 0 \rightarrow H(x_1 f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0 \rightarrow T(x_1 f(x_1)); f''(x_2) < 0 \rightarrow H(x_2 f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0 \rightarrow T(x_2 f(x_2)); \dots$	
V. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen):	
a) $f''(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$	
b) $f'''(x_1) \neq 0 \rightarrow W(x_1 f(x_1)); f'''(x_2) \neq 0 \rightarrow W(x_2 f(x_2)); \dots$	
Va. Sattelpunkte $x_0$ liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt:	
$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow S(x_0 f(x_0))$	

#### Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

### Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion

VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach I., IV.]; bei Hoch- und Tiefpunkten sowie senkrechten Asymptoten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ,  $x_0$  als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):

- Monotonieintervall  $(-\infty, x_1)$ :  $f(x)$  monoton steigend ( $x_1$  als Hochpunkt,  $x_1$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow x_1, x < x_1$ ),  $f'(x_0) > 0$ ) oder monoton fallend ( $x_1$  als Tiefpunkt,  $x_1$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow x_1, x > x_1$ ),  $f'(x_0) < 0$ );
- Monotonieintervall  $(x_1, x_2)$ :  $f(x)$  monoton fallend ( $x_1$  als Hochpunkt,  $x_2$  als Tiefpunkt,  $x_1$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow x_1, x > x_1$ ),  $x_2$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow x_2, x < x_2$ ),  $f'(x_0) < 0$ ) oder monoton steigend ( $x_1$  als Tiefpunkt,  $x_2$  als Hochpunkt,  $x_2$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow x_2, x < x_2$ ),  $f'(x_0) > 0$ ); ...
- Monotonieintervall  $(x_n, \infty)$ :  $f(x)$  monoton fallend ( $x_n$  als Hochpunkt,  $x_n$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow x_n, x > x_n$ ),  $f'(x_0) < 0$ ) oder monoton steigend ( $x_n$  als Tiefpunkt,  $x_n$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow x_n, x > x_n$ ),  $f'(x_0) > 0$ )

VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach I., V.]; bei Wendepunkten sowie senkrechten Asymptoten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ,  $x_0$  als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall):

- Krümmungsintervall  $(-\infty, x_1)$ :  $f(x)$  links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall,  $x_1$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow x_1, x < x_1$ ),  $f''(x_0) > 0$ ) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall,  $x_1$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow x_1, x < x_1$ ),  $f''(x_0) > 0$ );
- Krümmungsintervall  $(x_1, x_2)$ :  $f(x)$  rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall,  $x_1$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow x_1, x > x_1$ ),  $x_2$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow x_2, x < x_2$ ),  $f'(x_0) < 0$ ) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall,  $x_1$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow x_1, x > x_1$ ),  $x_2$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow x_2, x < x_2$ ),  $f'(x_0) > 0$ ); ...
- Krümmungsintervall  $(x_n, \infty)$ :  $f(x)$  rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall,  $x_n$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow x_n, x > x_n$ ),  $f'(x_0) < 0$ ) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall,  $x_n$  als Polstelle mit  $f(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow x_n, x > x_n$ ),  $f'(x_0) > 0$ ); ...

VIII. Symmetrie:

a) Achsensymmetrie (zur y-Achse; für gerade Funktionen):  $f(-x) = f(x)$  oder:

Zähler gerade, Nenner gerade  $\rightarrow f(x)$  gerade

Zähler ungerade, Nenner ungerade  $\rightarrow f(x)$  gerade

b) Punktsymmetrie (zum Ursprung; für ungerade Funktionen):  $f(-x) = -f(x)$  oder:

Zähler gerade, Nenner ungerade  $\rightarrow f(x)$  ungerade

Zähler ungerade, Nenner gerade  $\rightarrow f(x)$  ungerade

c)  $f(x)$  achsensymmetrisch  $\rightarrow f'(x)$  punktsymmetrisch  $\rightarrow f''(x)$  achsensymmetrisch usw.

$f(x)$  punktsymmetrisch  $\rightarrow f'(x)$  achsensymmetrisch  $\rightarrow f''(x)$  punktsymmetrisch usw.

### Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

#### Aufgabe 1: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{4}{x} - 2$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

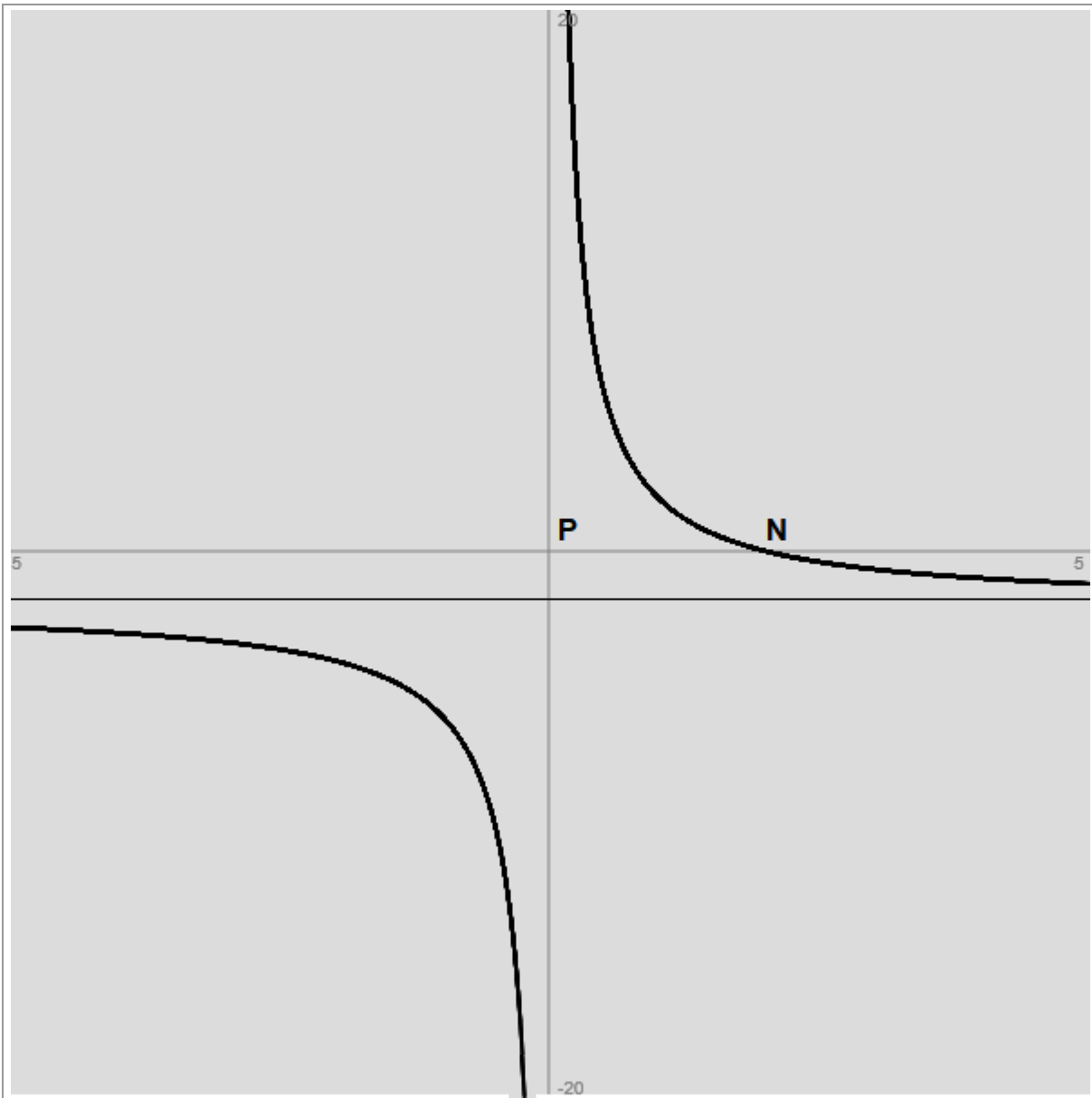
**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	Infinity	40000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0

2	0	-1	1	Nullstelle N(2 0)
---	---	----	---	-------------------

Graph:



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x = 0$  als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -2$ ;  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -2$  mit:  $y = -2$  als waagerechte Asymptote

Punktsymmetrie zum Punkt  $Z(0|-2)$  als Schnittpunkt der Asymptoten

## Aufgabe 2: Untersuche die Funktion

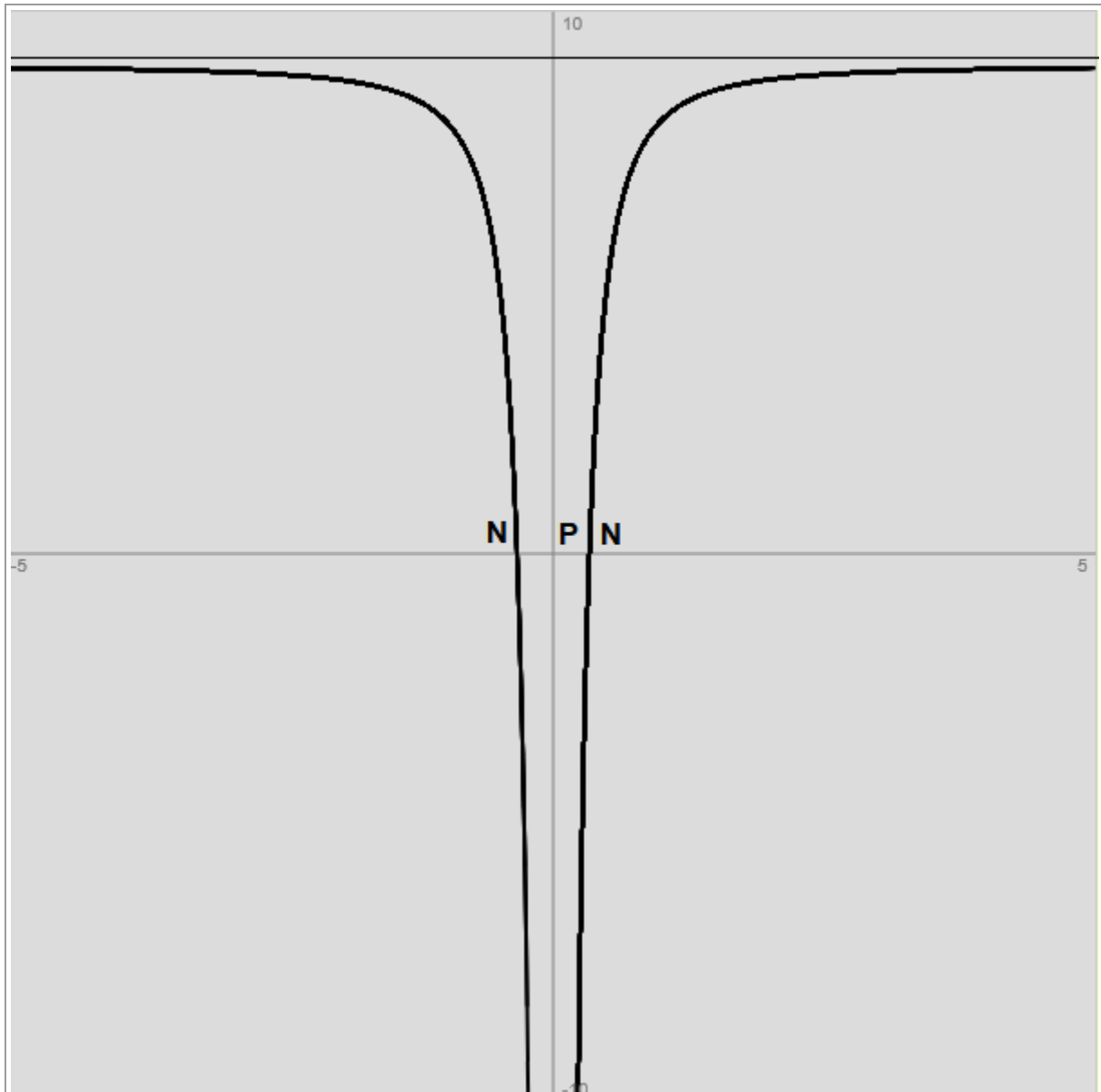
$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + 9$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-0.34	0.3495	-50.97	-449.64	Nullstelle N(-0.34 0.35)
0	-Infinity	0	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.33	-0.1827	55.76	-506.71	Nullstelle N(0.33 -0.18)

**Graph:**

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x = 0$  als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 9$ ;  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 9$  mit:  $y = 9$  als waagerechter Asymptote

Achsensymmetrie zur y-Achse

**Aufgabe 3:** Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{4x - 10}{2x + 3}$$

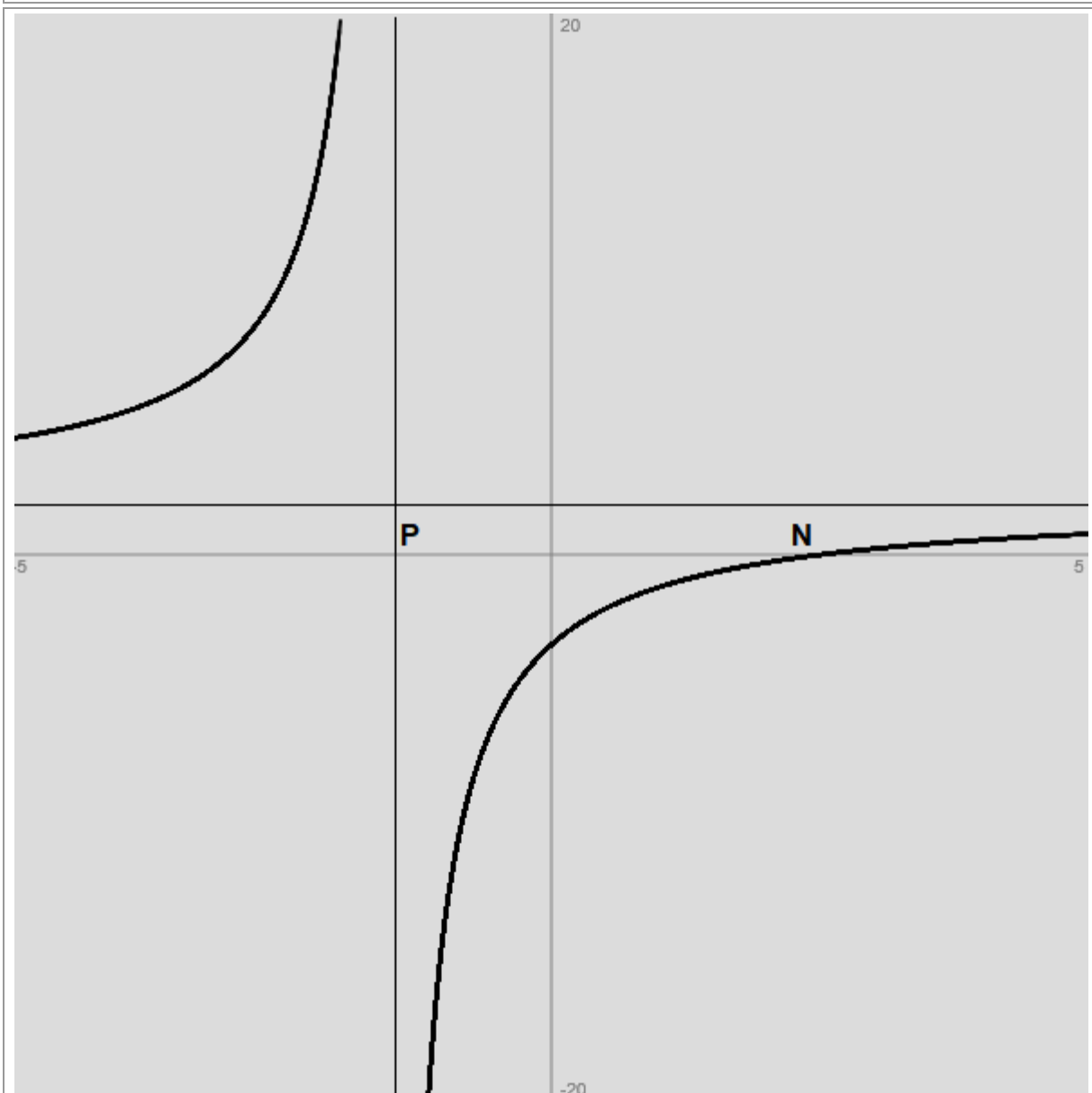
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1.5	-Infinity	-80000	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -1.5$
0	-3.3333	3.56	-4.74	Schnittpunkt $S_y(0 -3.33)$
2.5	0	0.5	-0.25	Nullstelle $N(2.5 0)$

**Graph:**



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,5\}$

$x = -1,5$  als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 2$ ;  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 2$  mit:  $y = 2$  als waagerechter Asymptote

#### Aufgabe 4: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \left[ \frac{x}{x-3} \right]^2$$

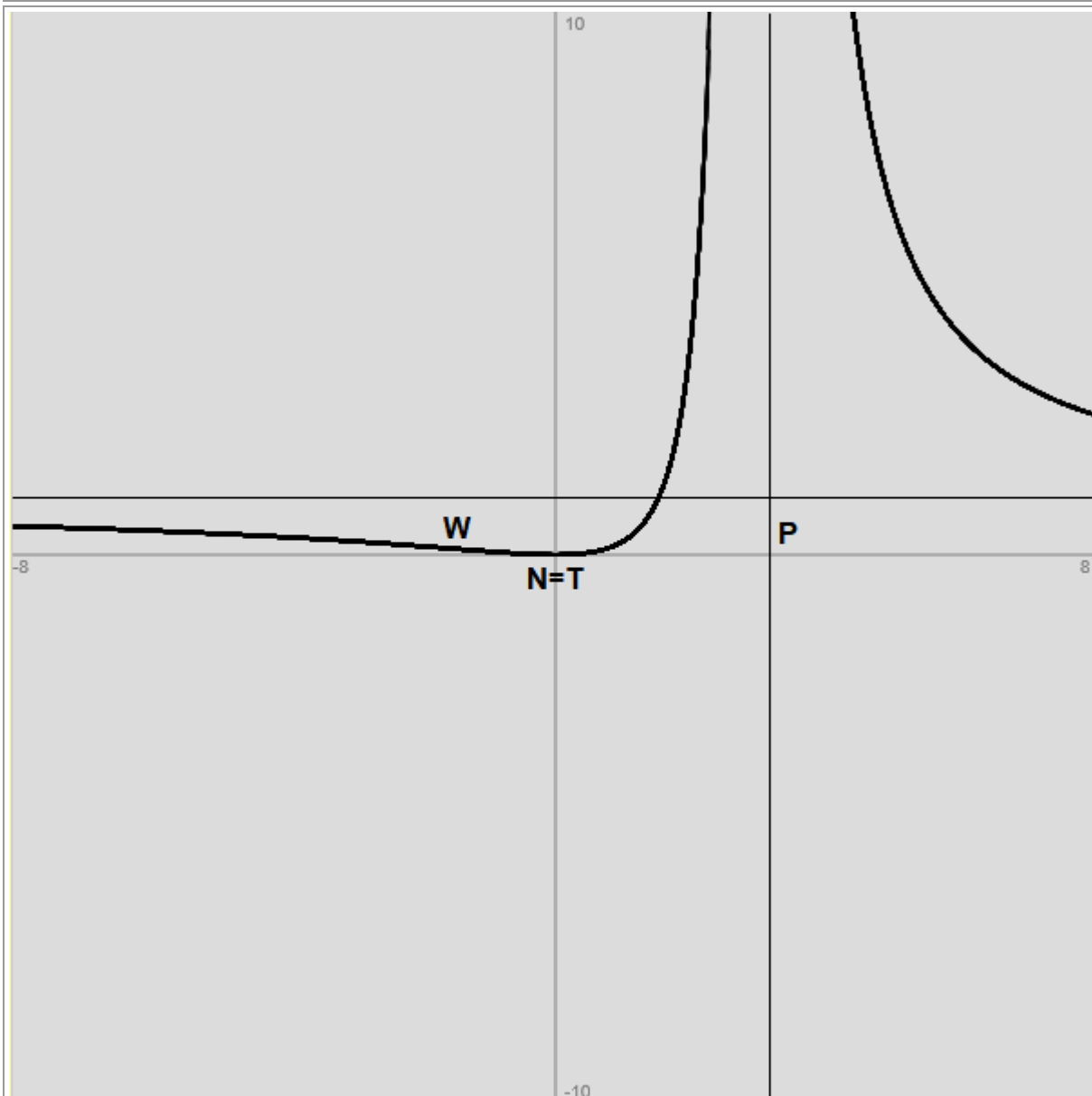
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1.51	0.1121	-0.1	0	Wendepunkt W(-1.51 0.11)
0	0	0	0.22	Schnittpunkt $S_y(0 0)$ = Tiefpunkt T(0 0)
3	Infinity	60000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 3$

**Graph:**



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$x = 3$  als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$ ;  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$  mit:  $y = 1$  als waagerechter Asymptote

**Aufgabe 5:** Untersuche die Funktion

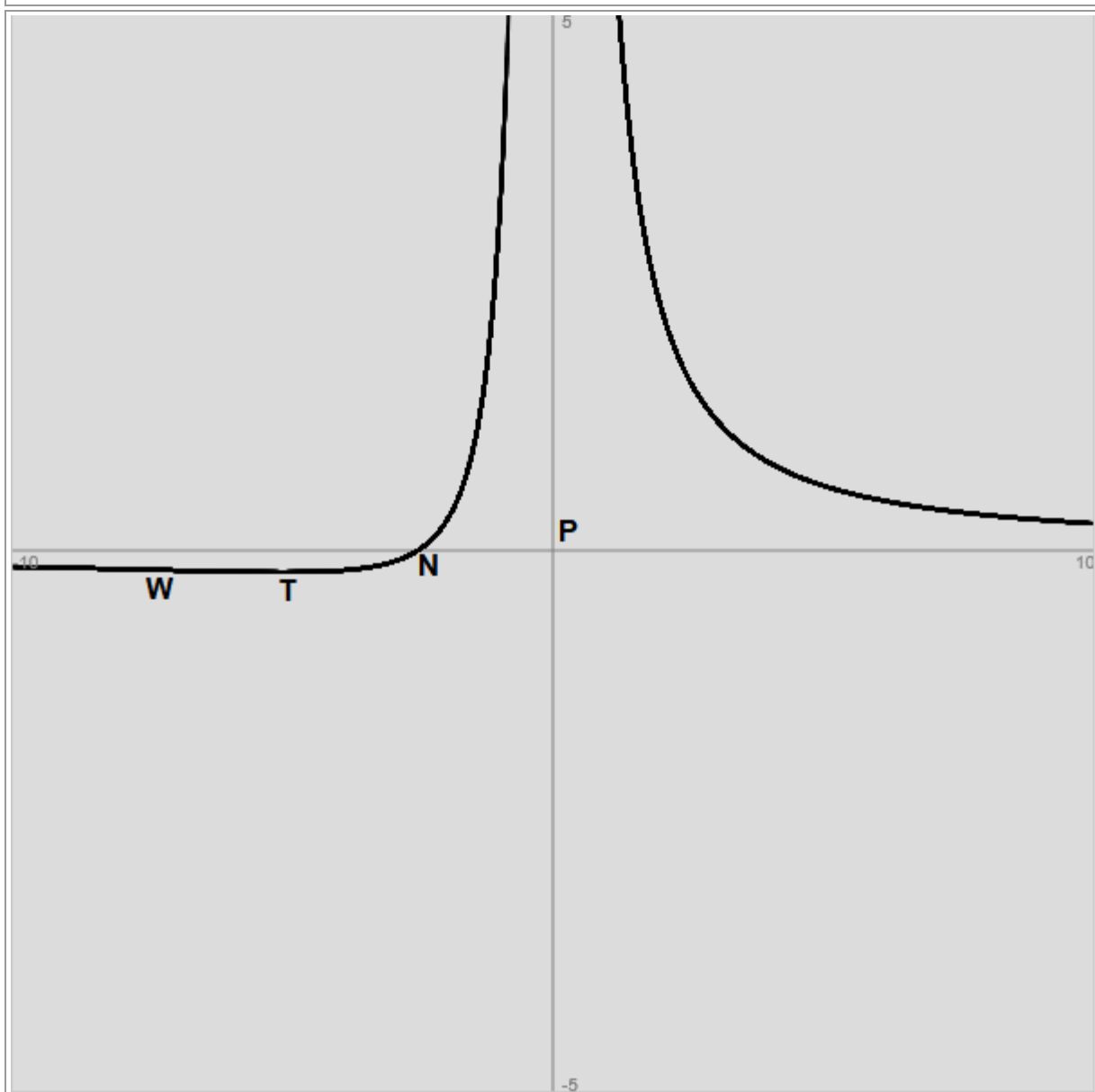
$$f(x) = \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie). **Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-7.51	-0.1777	-0.01	0	Wendepunkt W(-7.5 -0.18)
-5.01	-0.2	0	0.02	Tiefpunkt T(-5 -0.2)
-2.5	0	0.32	0.51	Nullstelle N(-2.5 0)
0	Infinity	20000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0

**Graph:**



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x = 0$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel
$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ ; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ mit: $y = 0$ (x-Achse) als waagerechter Asymptote

**Aufgabe 6:** Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3}$$

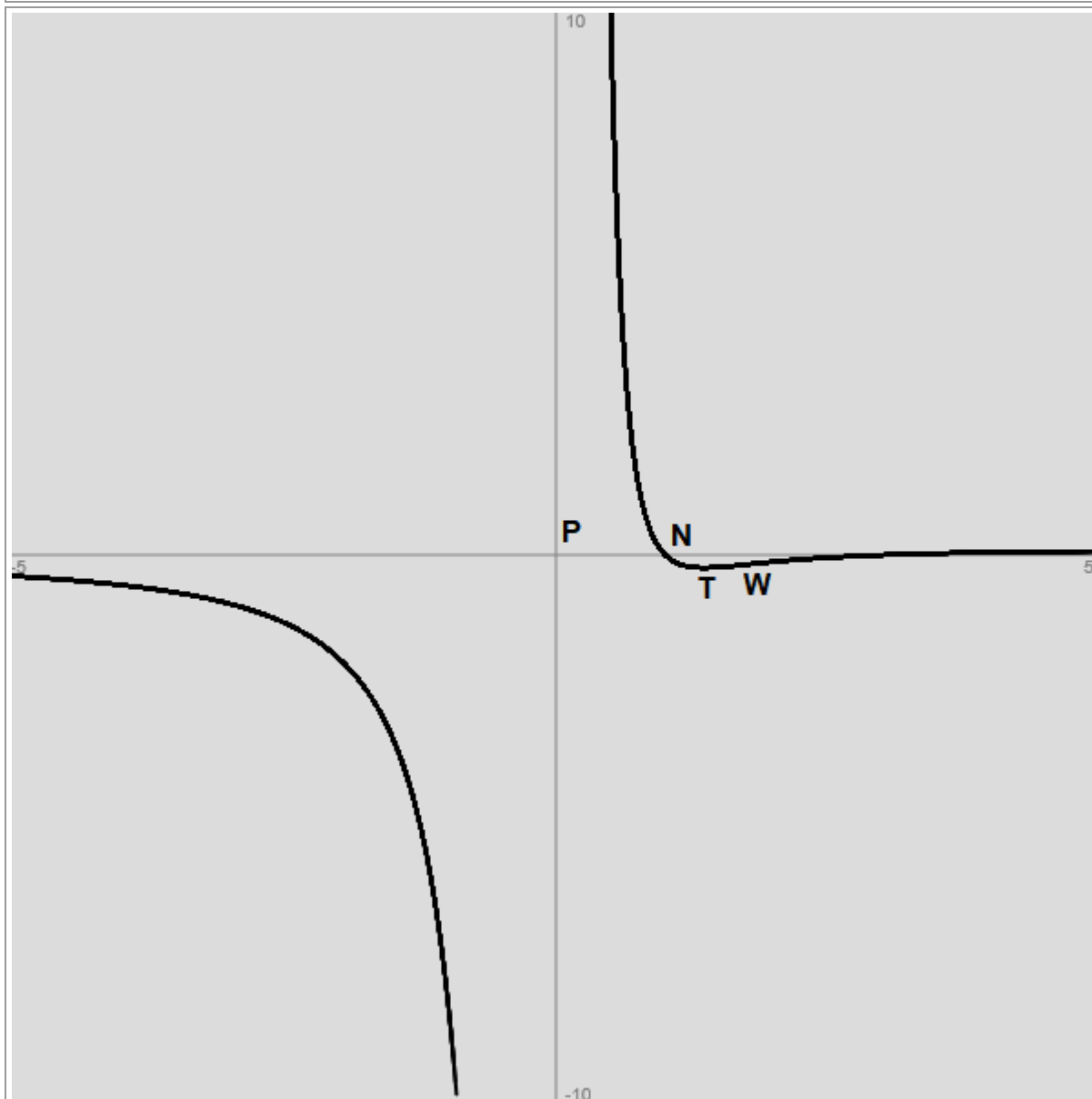
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	Infinity	300010000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 0$
1	0	-2	14.01	Nullstelle N(1 0)
1.35	-0.2347	-0.01	1.62	Tiefpunkt T(1.35 -0.23)
1.75	-0.1749	0.21	0.01	Wendepunkt W(1.75 -0.17)
3	0	0.07	-0.07	Nullstelle N(3 0)

**Graph:**





$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x = 0$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel
$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ ; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ mit: $y = 0$ (x-Achse) als waagerechter Asymptote

### Aufgabe 7: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{20}{x^2 + 4}$$

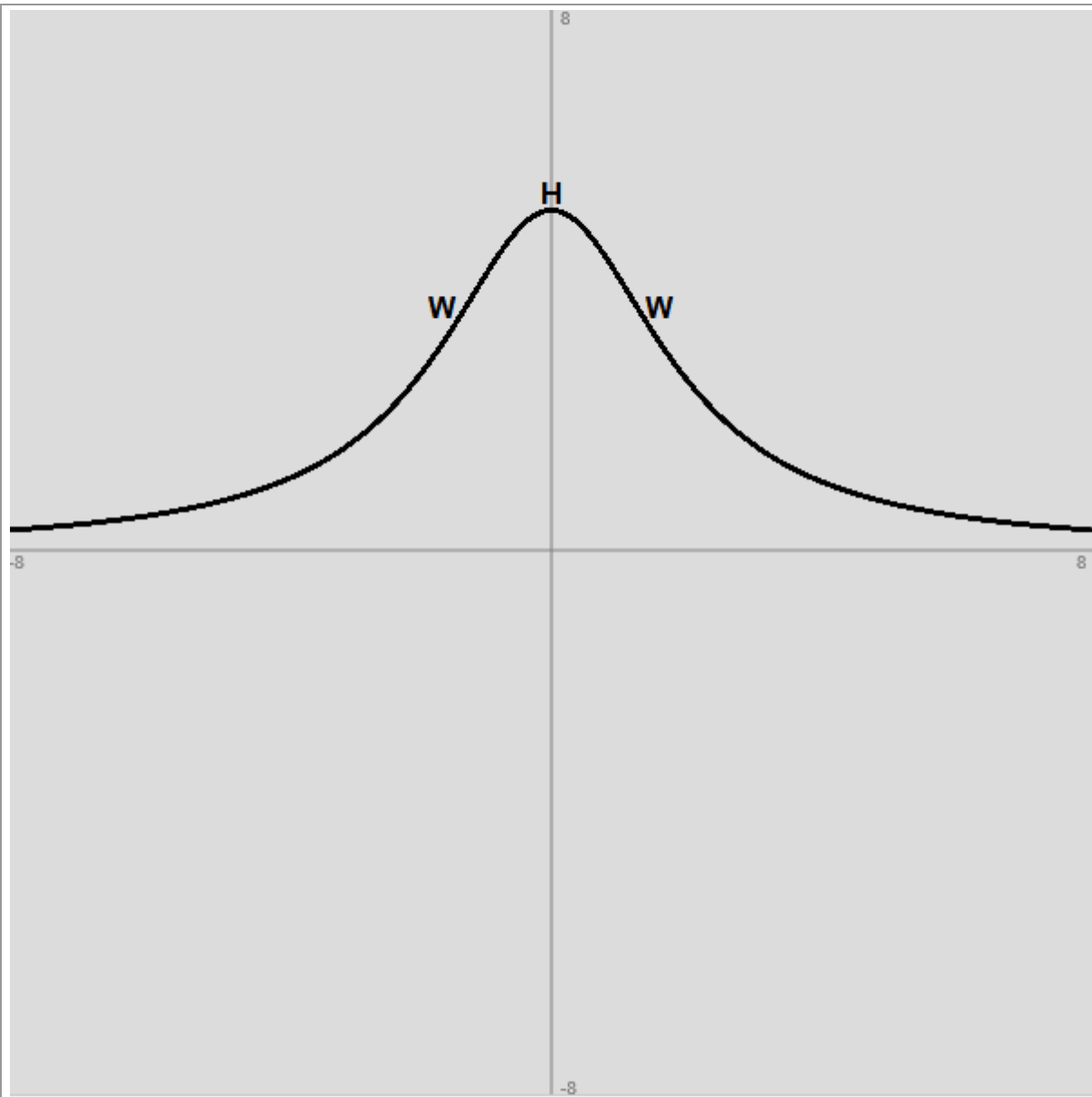
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1.16	3.7414	1.62	0.01	Wendepunkt W(-1.16 3.74)
0	5	0	-2.5	Schnittpunkt $S_y(0 5)$ = Hochpunkt H(0 5)
1.15	3.7576	-1.62	-0.01	Wendepunkt W(1.15 3.76)

Graph:



$D_f = \mathbf{R}$

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ ;  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$  mit:  $y = 0$  (x-Achse) als waagerechter Asymptote

Achsensymmetrie zur y-Achse

### Aufgabe 8: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 - 9}$$

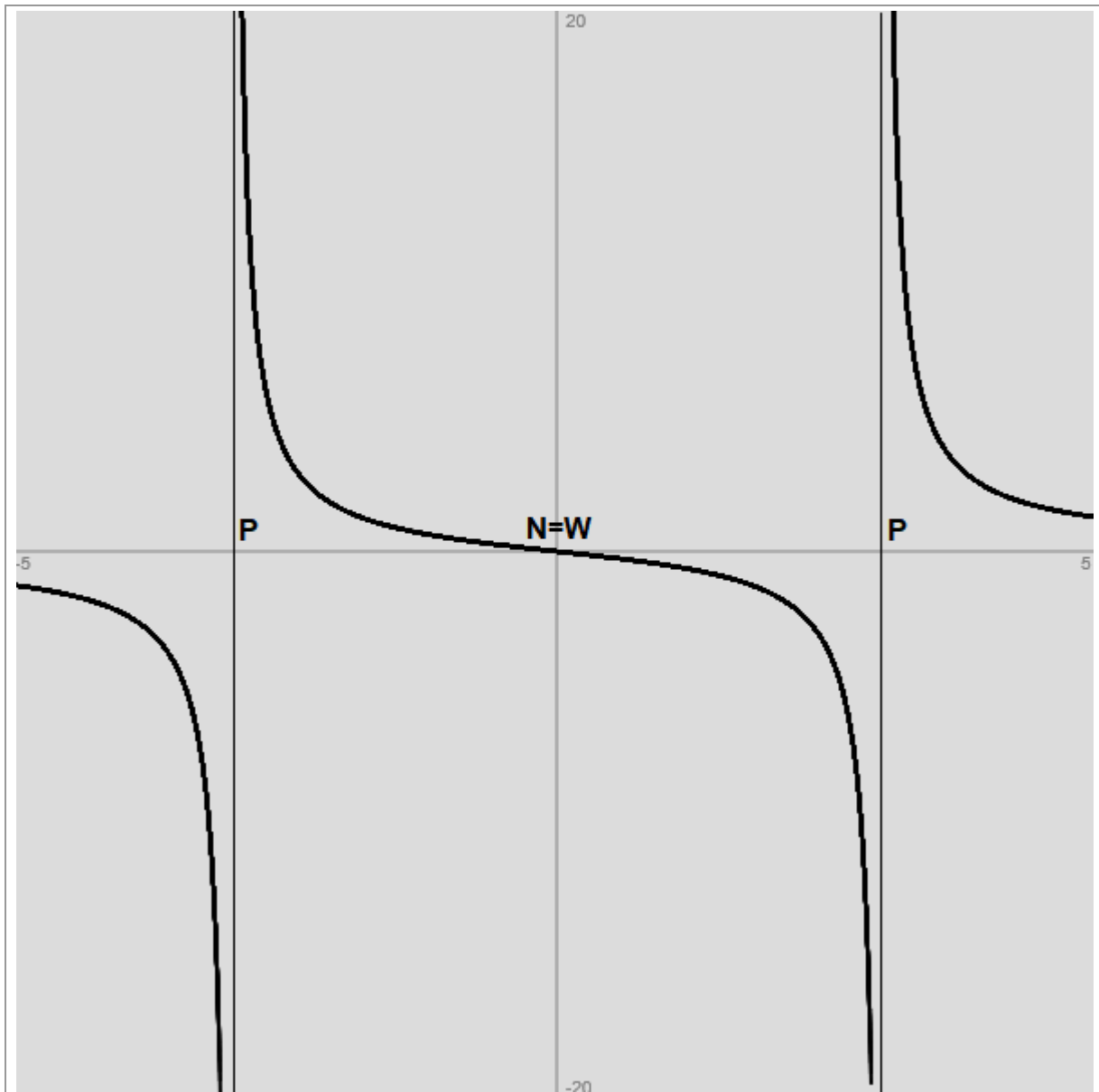
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3.002	-1000.3332	-Infinity	-Infinity	Hochpunkt H(-3 -1000.33)
-3	-Infinity	499999.94	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -3
0	0	-0.44	0	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt S <sub>y</sub> (0 0) = Wendepunkt W(0 0)
3	Infinity	499999.94	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 3

**Graph:**



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$
$x = -3$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, $x = 3$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel
$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ ; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ mit: $y = 0$ (x-Achse) als waagerechter Asymptote
Punktsymmetrie zum Ursprung $O(0 0)$

**Aufgabe 9:** Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x(x+4)}$$

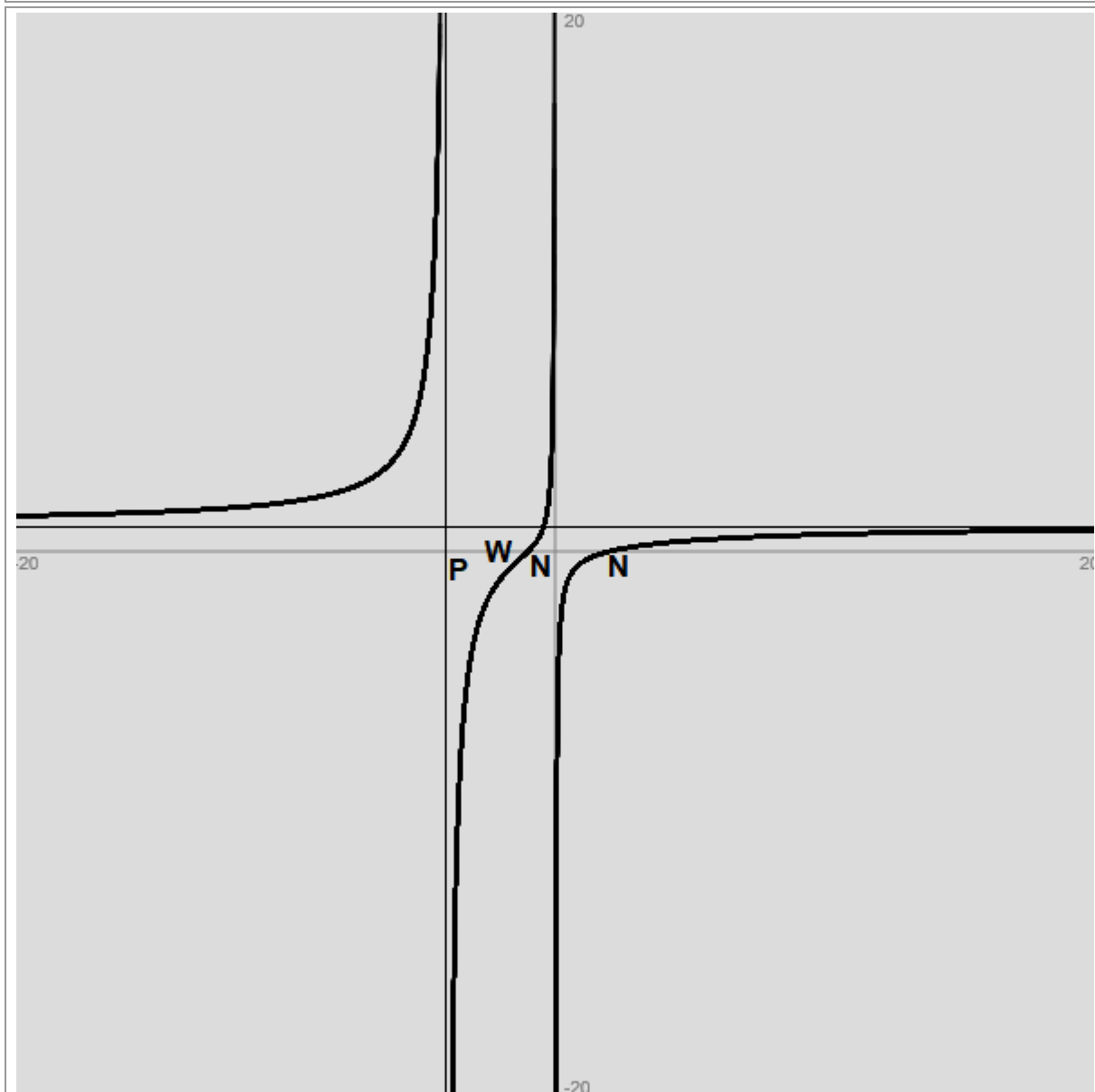
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
4	-Infinity	-179999.97	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -4$
-1.3	-0.2821	0.91	0	Wendepunkt $W(-1.3 -0.28)$
-1	0	1	0.67	Nullstelle $N(-1 0)$
0	-Infinity	-19999.72	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 0$
2	0	0.25	-0.17	Nullstelle $N(2 0)$

**Graph:**



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0\}$
$x = -4$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, $x = 0$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel
$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$ ; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$ mit: $y = 1$ als waagerechter Asymptote

**Aufgabe 10:** Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{10}{x+2} - \frac{5}{(x-4)^2}$$

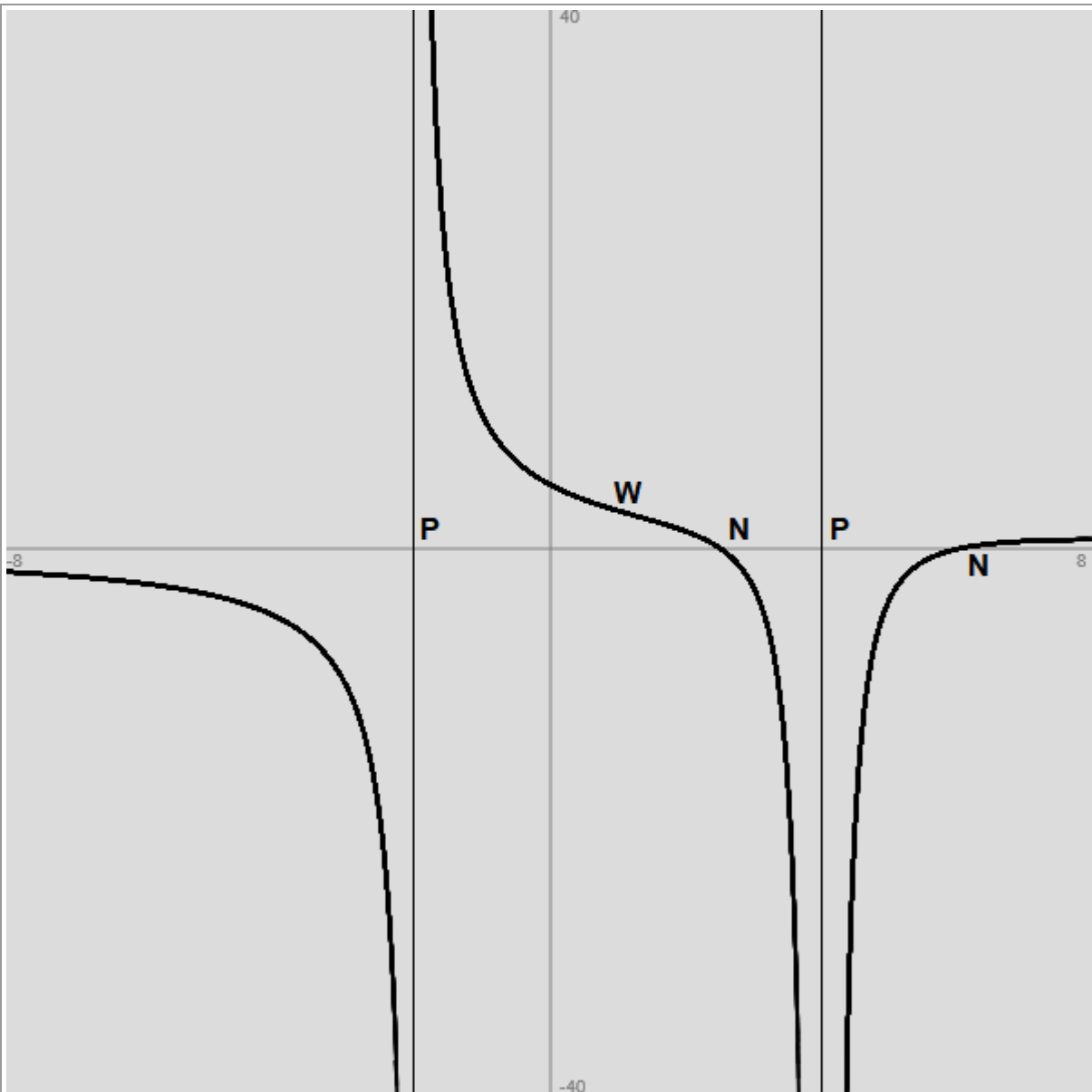
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	Infinity	399999.95	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -2$
0	4.6875	-2.66	2.38	Schnittpunkt $S_y(0 4.69)$
1.29	2.3587	-1.43	0.01	Wendepunkt $W(1.29 2.36)$
2.5	0	-3.46	-5.71	Nullstelle $N(2.5 0)$
4	-Infinity	-0.28	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 4$
6	0	1.09	-1.84	Nullstelle $N(6 0)$

Graph:



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$

$x = -2$  als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel,  $x = 4$  als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ ;  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$  mit:  $y = 0$  (x-Achse) als waagerechte Asymptote

### Aufgabe 11: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{x}{(x-2)^2}$$

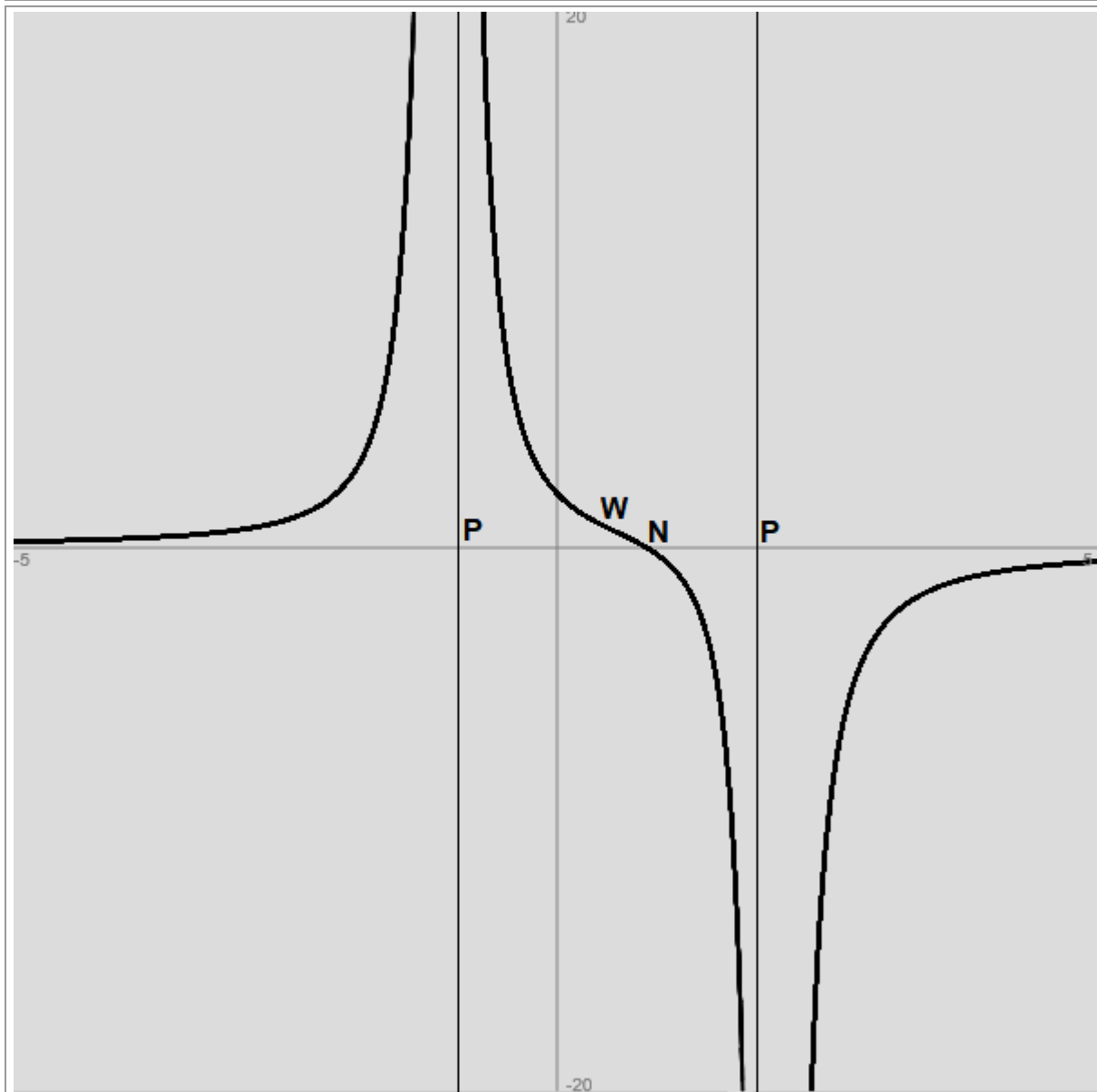
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3	-Infinity	-350000.15	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -3
0	0	0	-2.22	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt $S_y(0 0)$ = Hochpunkt H(0 0)
1	Infinity	30000.23	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 1
2.47	1.6443	-0.7	0	Wendepunkt W(2.47 1.64)
4	0	-1.9	-2	Nullstelle N(4 0)
6	Infinity	320000.08	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 6

**Graph:**



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

x = -1 als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel, x = 2 als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ ;  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$  mit: y = 0 (x-Achse) als waagerechter Asymptote

### Aufgabe 12: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{5x^2(x-4)}{(x+3)(x-1)(x-6)}$$

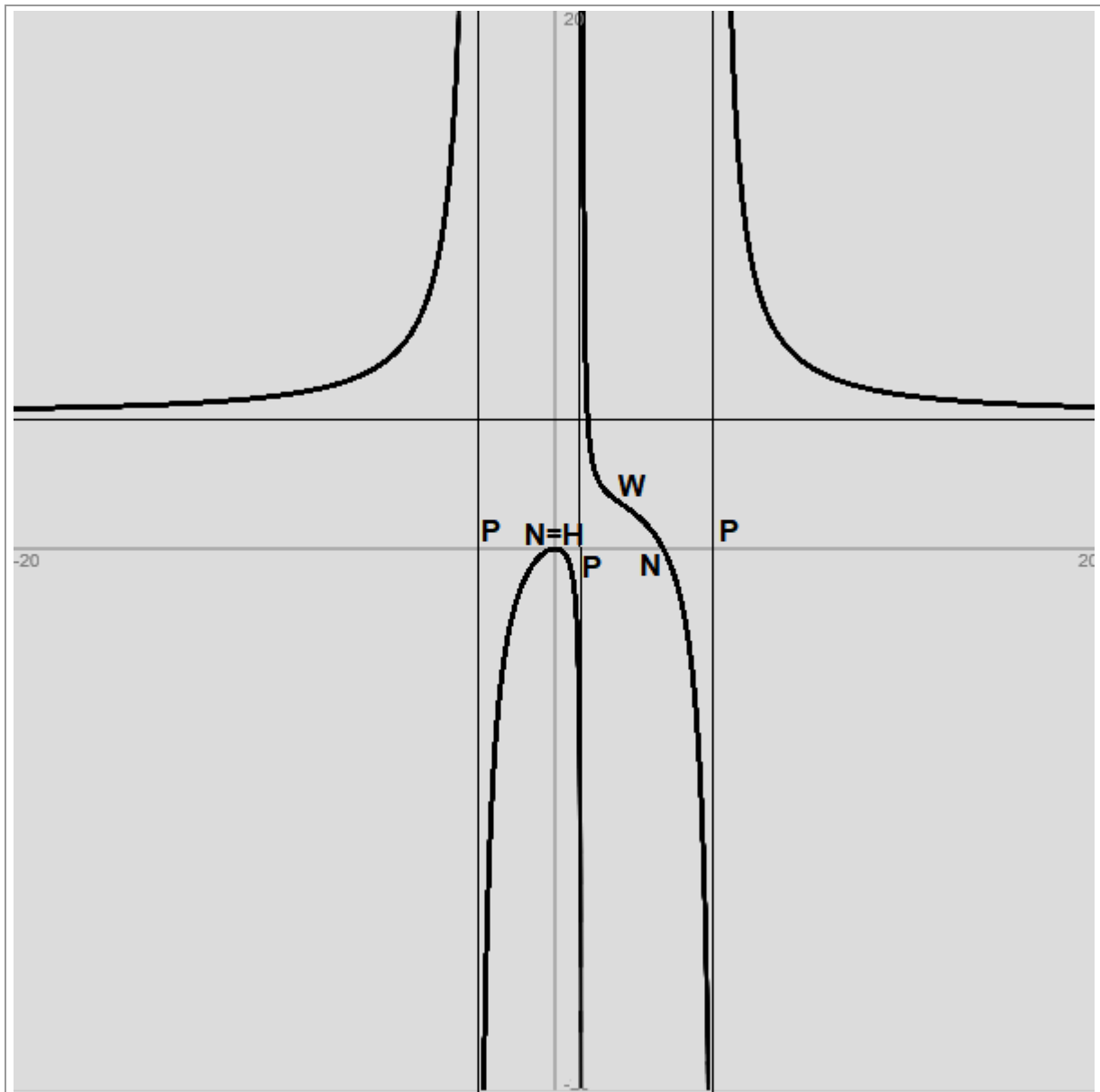
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1	Infinity	-0.04	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -1$
0	2	-4.25	11.5	Schnittpunkt $S_y(0 2)$
0.55	0.5709	-1.91	0.02	Wendepunkt $W(0.55 0.57)$
0.825	0.0029	-2.4	-3.98	Nullstelle $N(0.83 0)$
2	-Infinity	-160000.15	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 2$

**Graph:**





$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1; 6\}$$

$x = -3$  als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel,  $x = 1$  als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel,  $x = 6$  als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 5$ ;  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 5$  mit:  $y = 5$  als waagerechter Asymptote

### Aufgabe 13: Untersuche die Funktion

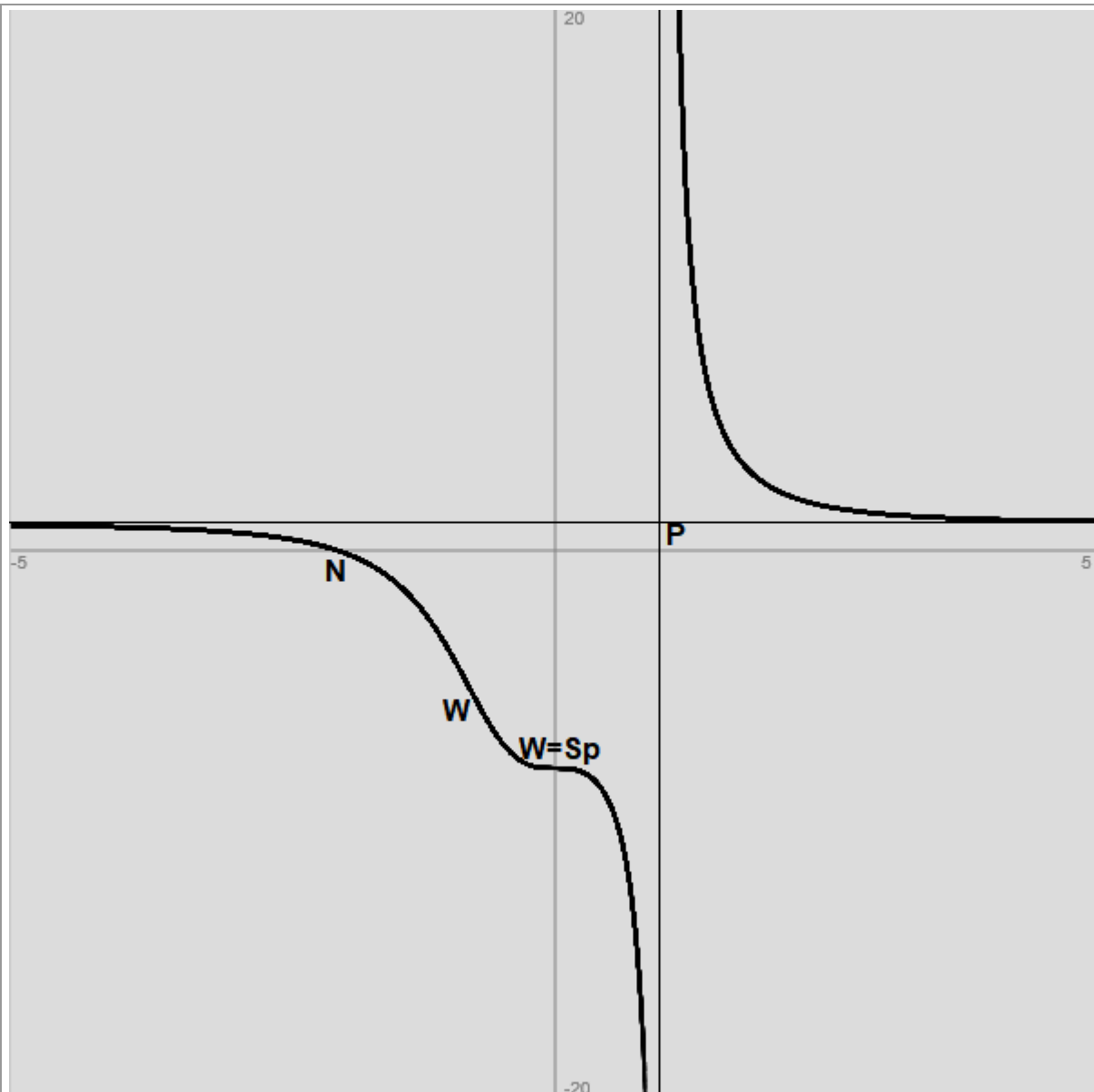
$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^3 - 1}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie). **Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	-1.33	-2.22	Nullstelle N(-2 0)
-0.795	-4.9902	-7.56	-0.06	Wendepunkt W(-0.79 -4.99)
0	-8	0	0	Schnittpunkt $S_y(0 -8)$ = Wendepunkt W(0 -8) = Sattelpunkt $W_s(0 -8)$
1	Infinity	480002	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 1$

Graph:



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x = 1$  als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$ ;  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$  mit:  $y = 1$  als waagerechter Asymptote

**Aufgabe 14:** Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^3 - 4x}$$

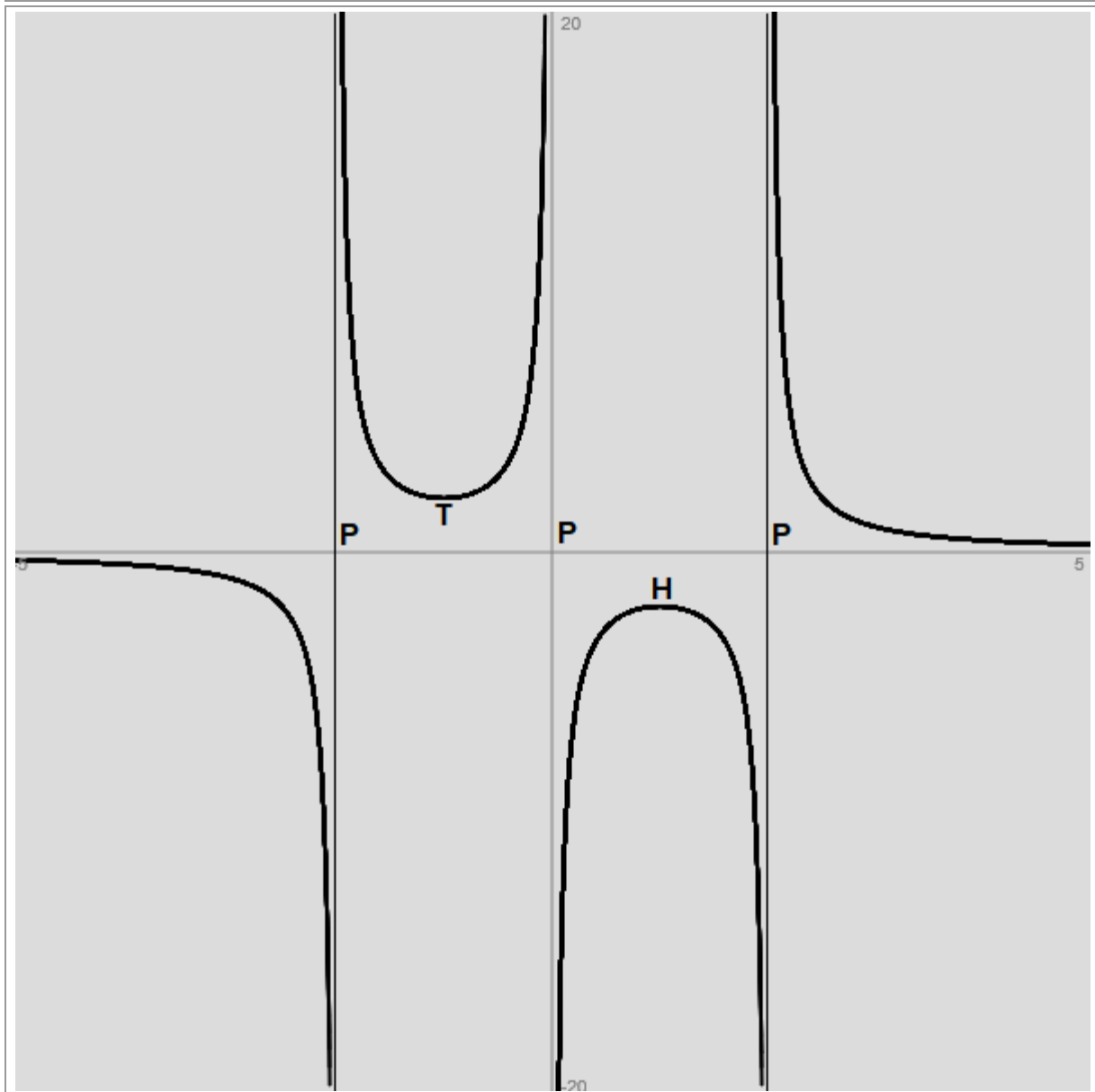
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	Infinity	281250.24	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -2
-1.002	2	-0.01	4.67	Tiefpunkt T(-1 2)
0	Infinity	-312500.56	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
1	-2	0	-4.67	Hochpunkt H(1 -2)
2	Infinity	281250.24	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 2

**Graph:**



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$

$x = -2$  als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel,  $x = 0$  als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel,  $x = 2$  als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ ;  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$  mit:  $y = 0$  (x-Achse) als waagerechter Asymptote

Punktsymmetrie zum Ursprung  $O[0|0]$

### Aufgabe 15: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^4}{x^5 + 32}$$

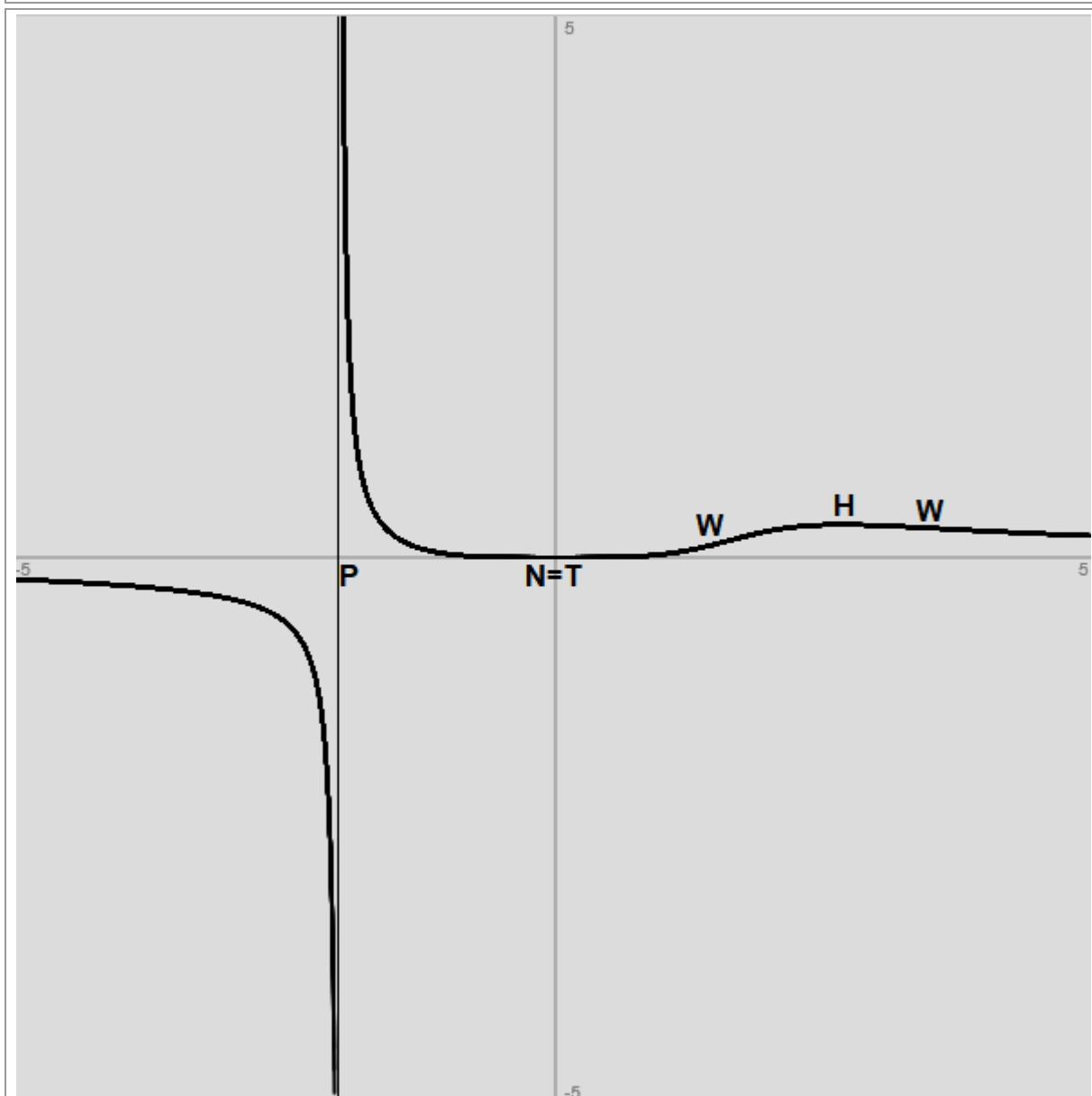
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Vorgehensweise:** Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ( $f(x) = 0 \rightarrow$  Nullstellen;  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Hoch-/Tiefpunkte;  $f''(x) = 0 \rightarrow$  Wendepunkte; Nenner von  $f(x) = 0 \rightarrow$  senkrechte Asymptoten/Pole  $\rightarrow$  Definitionsbereich  $D_f$ ;  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$  mit  $y=c$  als waagerechter Asymptote;  $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$  Achsen-/Punktsymmetrie).

**Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	Infinity	50000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -2$
0	0	0	0	Nullstelle $N(0 0) =$ Schnittpunkt $S_y(0 0) =$ Tiefpunkt $T(0 0)$
1.61	0.1569	0.27	0	Wendepunkt $W(1.61 0.16)$
2.638	0.3031	0	-0.17	Hochpunkt $H(2.64 0.3)$
3.55	0.2666	-0.05	0	Wendepunkt $W(3.55 0.27)$

**Graph:**



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$x = -2$  als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ ;  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$  mit:  $y = 0$  (x-Achse) als waagerechter Asymptote

www.michael-buhlmann.de / 08.2017 / Mathematik-Aufgabenpool: Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen I /  
Aufgaben 436-450