Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Kurvendiskussion (Funktionen allgemein) I

Einleitung: Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> $N(x_1\|0)$, $N(x_2\|0)$, …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x) = 0$ -> x_1, x_2, … b) $f''(x_1) < 0$ -> $H(x_1\|f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0$ -> $T(x_1\|f(x_1))$; $f''(x_2) < 0$ -> $H(x_2\|f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0$ -> $T(x_2\|f(x_2))$; …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen): $f'(x) = 0$ -> x_1, x_2, … -> $P_1(x_1\|f(x_1))$, $P_2(x_2\|f(x_2))$, …
IV. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x) = 0$ -> x_1, x_2, … b) $f'''(x_1) \neq 0$ -> $W(x_1\|f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0$ -> $W(x_2\|f(x_2))$; …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ -> $S(x_0\|f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) x->x_1, $x>x_1$: f(x) -> +∞, x->x_1, $x<x_1$: f(x) -> -∞ oder: x->x_1, $x>x_1$: f(x) -> -∞, x->x_1, $x<x_1$: f(x) -> +∞ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) x->x_2, $x>x_2$: f(x) -> +∞, x->x_2, $x<x_2$: f(x) -> +∞ oder: x->x_2, $x>x_2$: f(x) -> -∞, x->x_2, $x<x_2$: f(x) -> -∞ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) x->x_3: f(x) -> r => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0)>0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0)<0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0)>0$); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0)>0$) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0)>0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0)<0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.
VIII. Symmetrie: a) Achsensymmetrie zur y-Achse: f(-x) = f(x) (gerade) b) Punktsymmetrie zum Ursprung: f(-x) = -f(x) (ungerade) c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch. d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse ach-

sensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.

d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.

e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.

f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞):

a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n>0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞

$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

x -> ±∞: f(x) -> 0 = y (n < m)
x -> ±∞: f(x) -> a/b = y (n = m; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
x -> ±∞: f(x) -> ±∞ (n > m)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil:

x->-∞: e^x -> 0, x->+∞: e^x -> +∞
x->-∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> ±∞ (b<0), -> d = y (b>0); x-> +∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> d = y (b<0), -> ±∞ (b>0)
x->-∞: f(x) = ae^{bx+c} + dx + e -> ±∞ (b<0), -> dx+e = y (b>0); x-> +∞: f(x) = ae^{bx+c} + dx + e -> dx+e = y (b<0), -> ±∞ (b>0)
x->-∞: f(x) = $(a_nx^n+\dots)e^{bx}$ -> ±∞ (b<0), -> 0 = y (b>0); x-> +∞: f(x) = $(a_nx^n+\dots)e^{bx}$ -> 0 = y (b<0), -> ±∞ (b>0)

mit y als waagerechter bzw. schiefer Asymptote

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

Aufgabe 1: Untersuche die ganz rationale Funktion 2. Grades

$$f(x) = \frac{5}{2}x^2 - 10x + \frac{15}{2}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Monotonie, Krümmung und Verhalten für betragsmäßig große x.

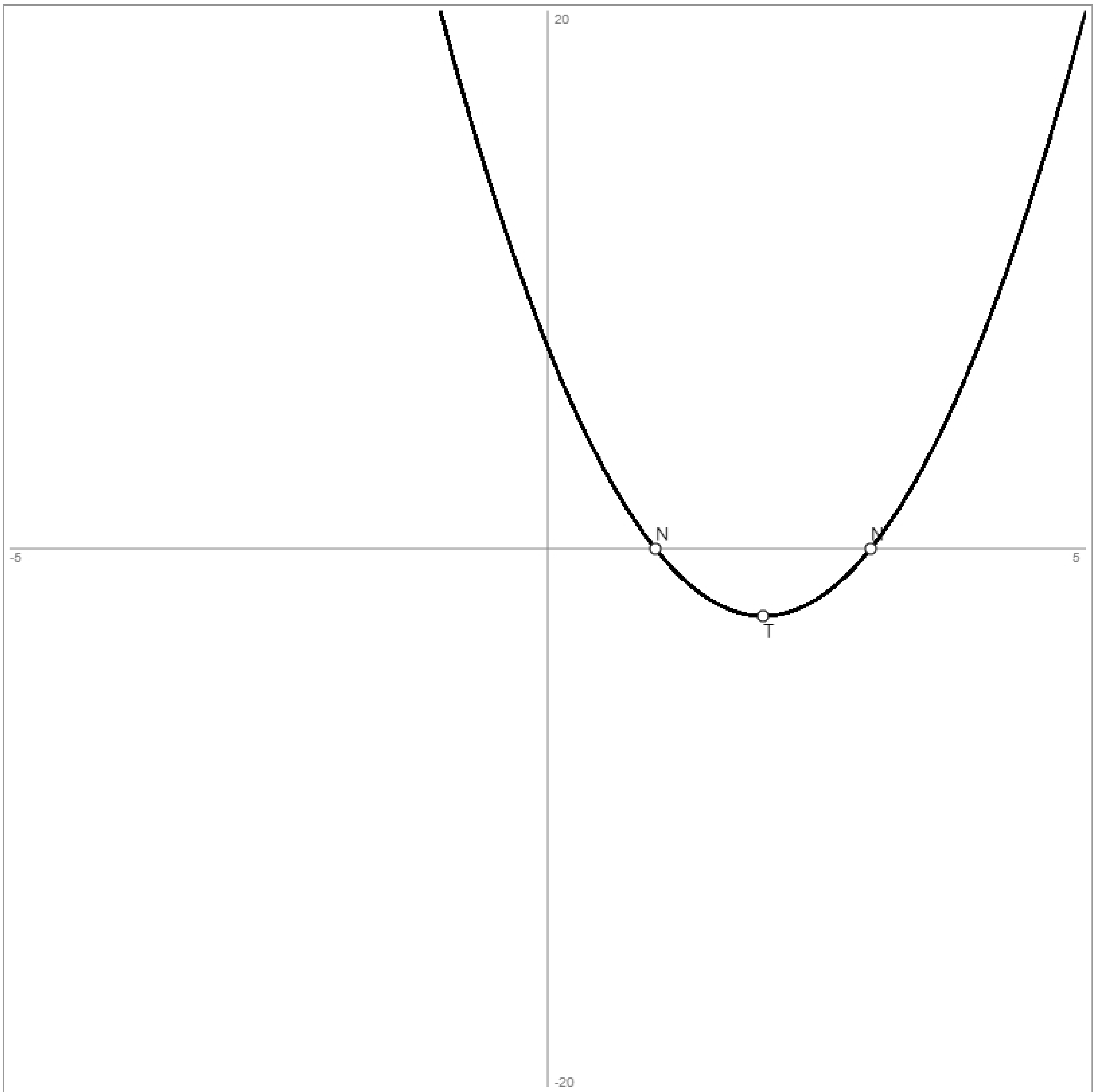
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte -> Monotonie; f''(x) -> Krümmung; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	7.5	-10	5	Schnittpunkt $S_y(0\|7.5)$
1	0	-5	5	Nullstelle N(1|0)
2	-2.5	0	5	Tiefpunkt T(2|-2.5)
3	0	5	5	Nullstelle N(3|0)

Graph:



Monotonie: Tiefpunkt T(2|-2,5) -> (-∞; 2) fallende Monotonie; (2; +∞) steigende Monotonie

Krümmung: f''(x) ≥ 0 -> Linkskrümmung auf ganz **R**

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 2: Untersuche die ganz rationale Funktion 3. Grades

$$f(x) = x^3 - x^2$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen und Verhalten für betragsmäßig große x.

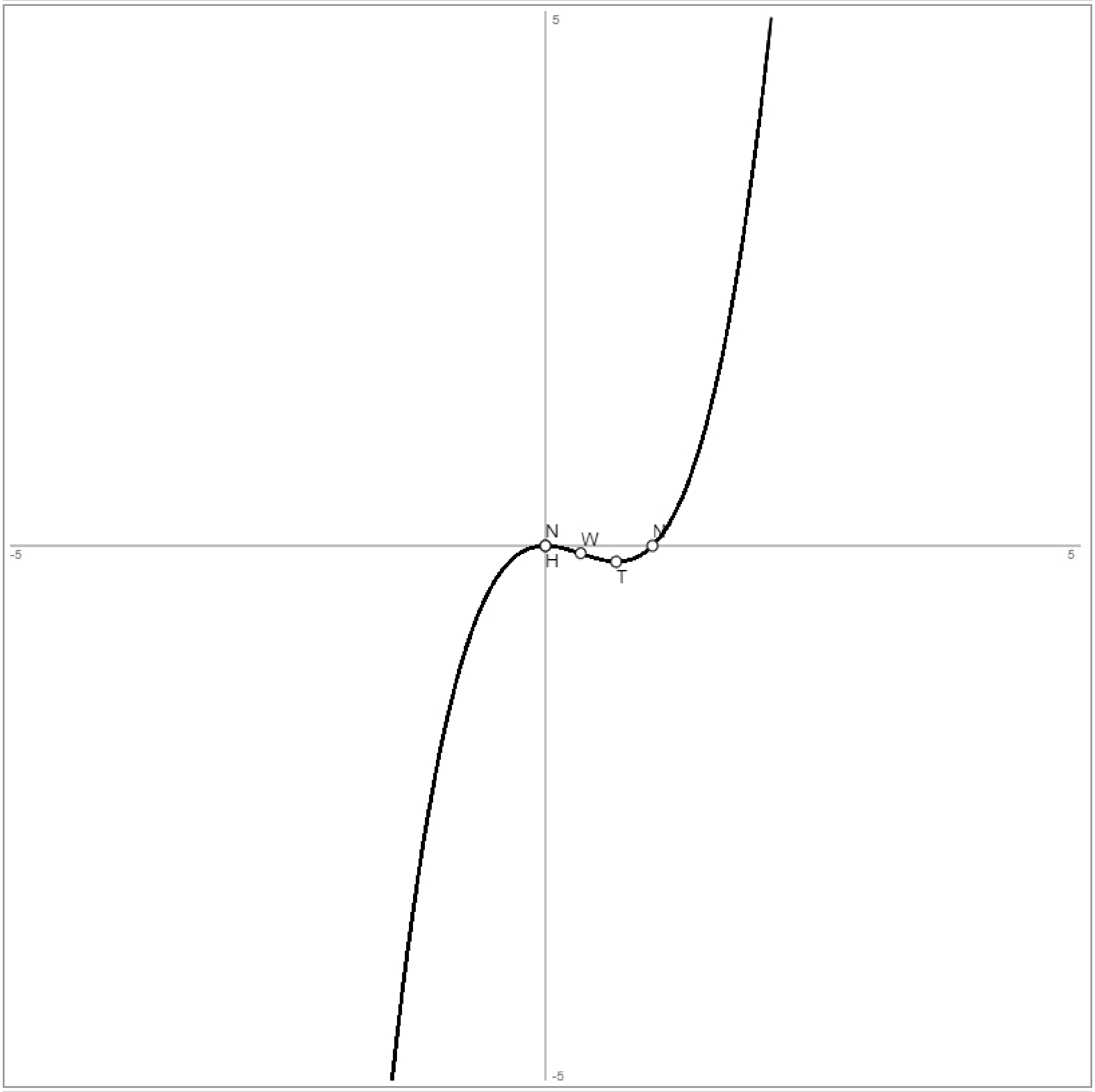
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	-2	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
0.33	-0.073	-0.33	-0.02	Wendepunkt W(0.33|-0.07)
0.66	-0.1481	-0.01	1.96	Tiefpunkt T(0.66|-0.15)

Graph:



x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 3: Untersuche die ganz rationale Funktion 3. Grades

$$f(x) = x^3 - 3x$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Monotonie, Krümmung, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

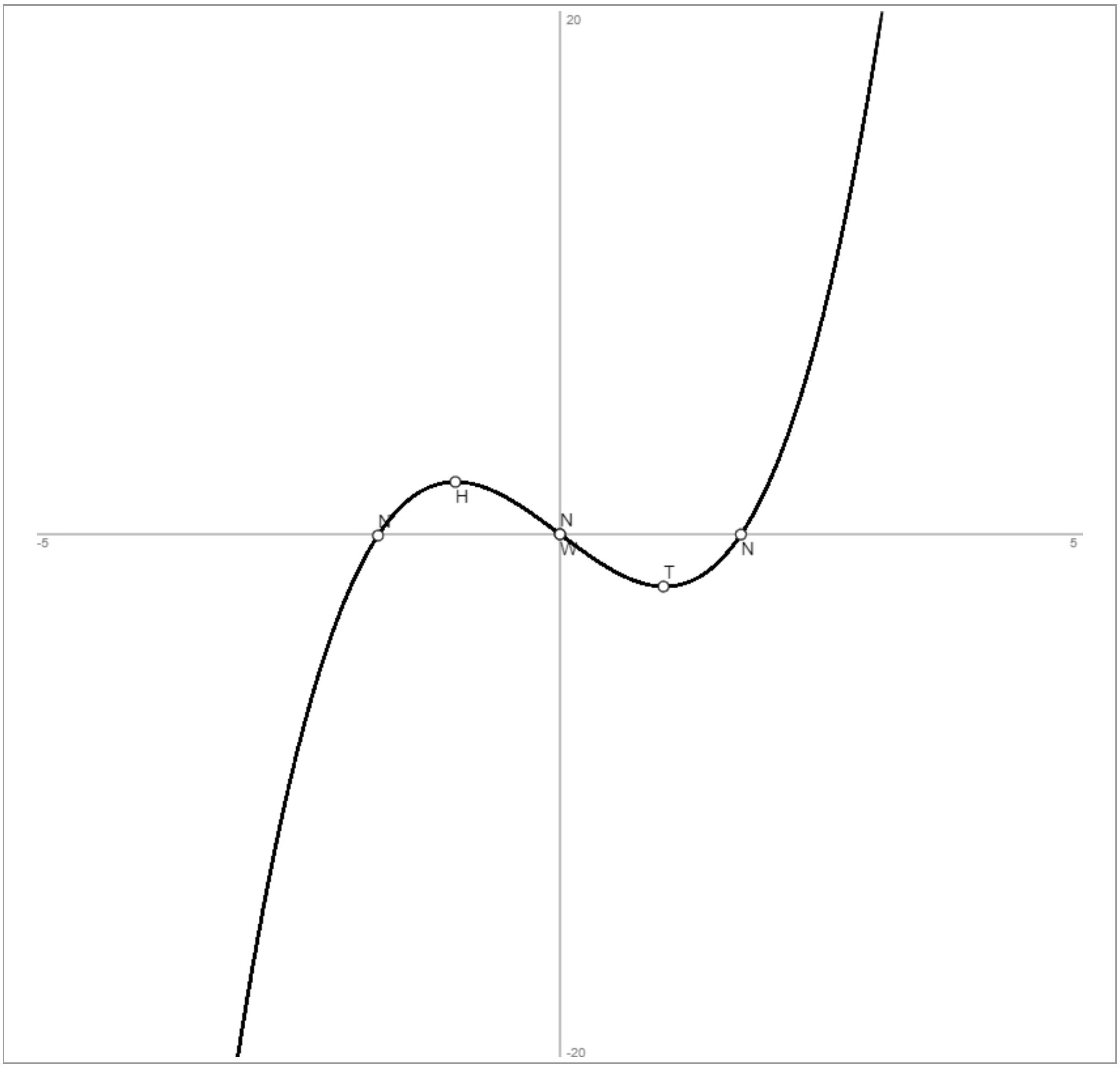
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte -> Monotonie; f''(x) = 0 -> Wendepunkte -> Krümmung; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th><th>f'(x)</th><th>f''(x)</th><th>Besondere Kurvenpunkte</th></tr>
<tr><td>-1.74</td><td>-0.048</td><td>6.08</td><td>-10.44</td><td>Nullstelle N(-1.74|-0.05)</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>2</td><td>0</td><td>-6</td><td>Hochpunkt H(-1|2)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>-3</td><td>0</td><td>Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-2</td><td>-0.06</td><td>5.94</td><td>Tiefpunkt T(1|-2)</td></tr>
<tr><td>1.73</td><td>-0.0123</td><td>5.98</td><td>10.38</td><td>Nullstelle N(1.73|-0.01)</td></tr>
</table>

Graph:



Monotonie: Extrempunkte H(-1|2), T(1|-2) -> (-∞; -1) steigende, (-1; 1) fallende, (1; +∞) steigende Monotonie

Krümmung: Wendepunkt W(0|0) -> (-∞; 0) Rechtskrümmung; (0; +∞) Linkskrümmung

f(-x) = -f(x) -> Punktsymmetrie zum Ursprung des Koordinatensystems

x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 4: Untersuche die ganz rationale Funktion 3. Grades

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 4$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Monotonie, Krümmung und Verhalten für betragsmäßig große x.

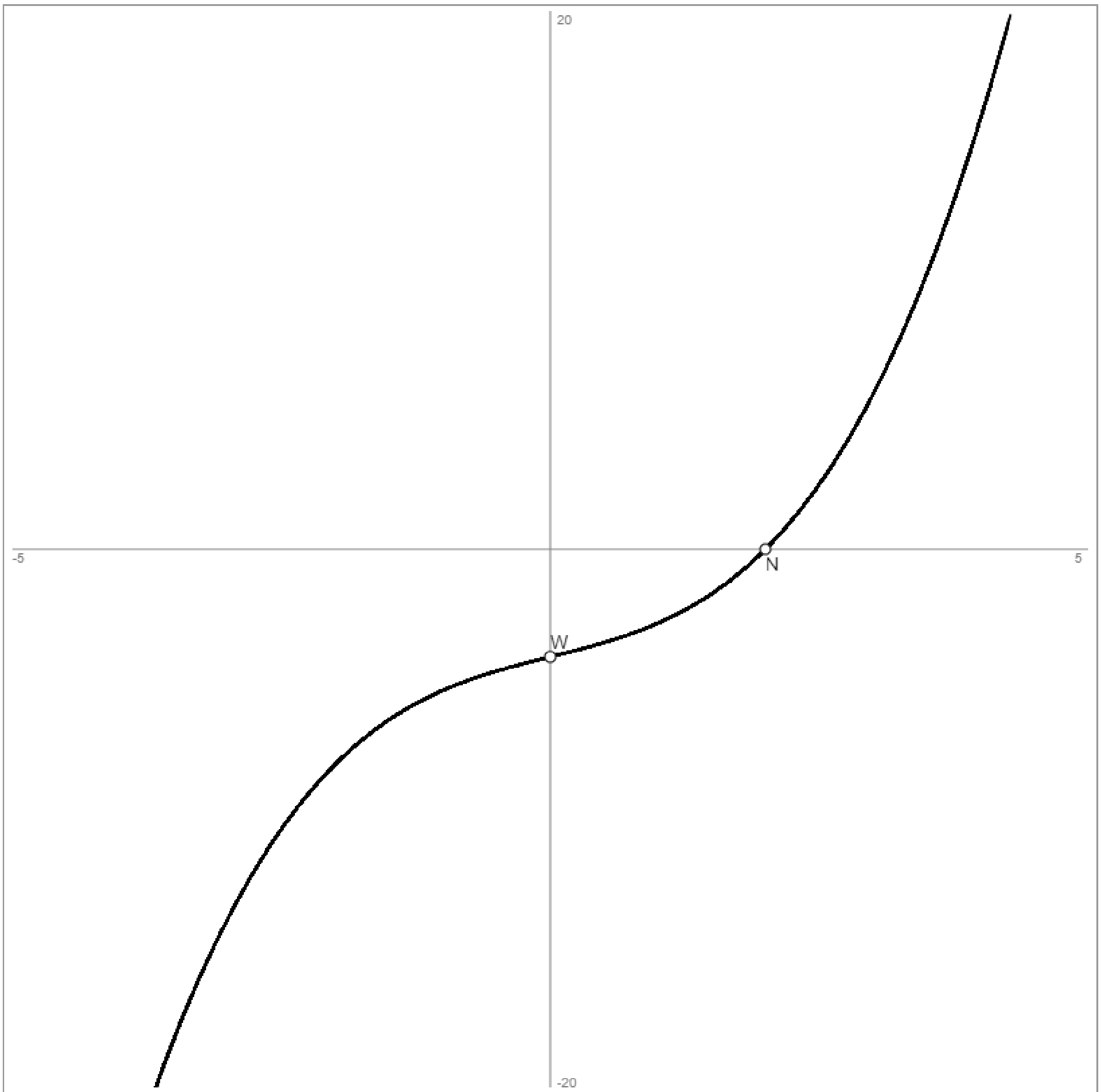
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte -> Monotonie; f''(x) = 0 -> Wendepunkte -> Krümmung; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	-4	1	0	Schnittpunkt $S_y(0\|-4)$ = Wendepunkt W(0|-4)
2	0	4	3	Nullstelle N(2|0)

Graph:



Monotonie: steigende Monotonie auf ganz **R**

Krümmung: Wendepunkt W(0|-4) -> (-∞; 0) Rechtskrümmung; (0; +∞) Linkskrümmung

x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 5: Untersuche die ganz rationale Funktion 3. Grades

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^2+4)(x-4)$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Monotonie, Krümmung und Verhalten für betragsmäßig große x.

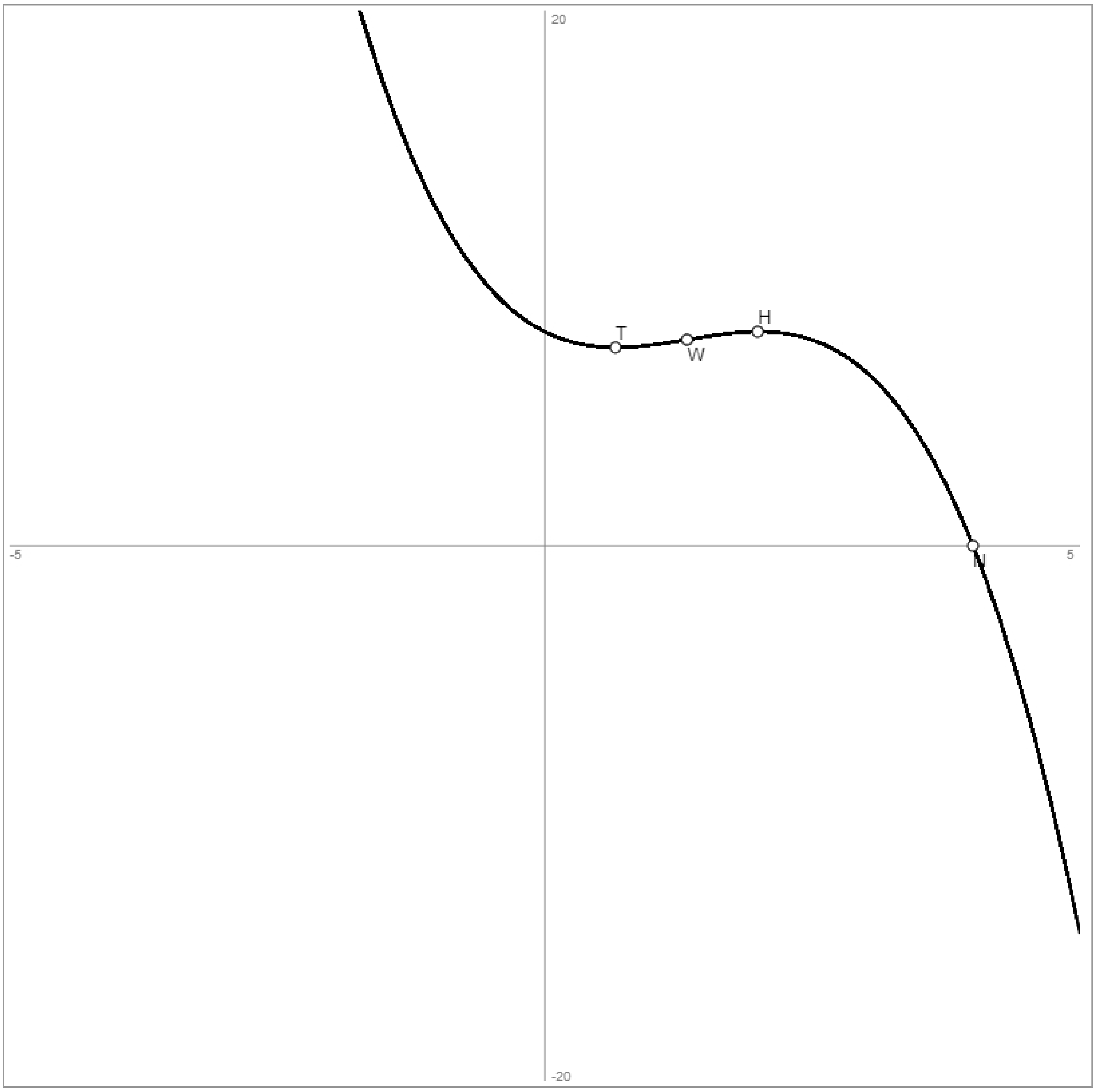
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte -> Monotonie; f''(x) = 0 -> Wendepunkte -> Krümmung; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle: $f(x) = -0{,}5(x^2+4)(x-4) = -0{,}5(x^3-4x^2+4x-16)$

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	8	-2	4	Schnittpunkt $S_y(0\|8)$
0.66	7.4075	0	2.02	Tiefpunkt T(0.66|7.41)
1.33	7.7015	0.67	0	Wendepunkt W(1.33|7.7)
2	8	0	-1.97	Hochpunkt H(1.99|8)
4	0	-10	-8	Nullstelle N(4|0)

Graph:



Monotonie: Extrempunkte T(2/3|7,4), H(2|8) -> (-∞; 2/3) fallende, (-2/3; 2) steigende, (2; +∞) fallende Monotonie

Krümmung: Wendepunkt W(4/3|7,7) -> (-∞; 4/3) Linkskrümmung; (4/3; +∞) Rechtskrümmung

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> -∞

Aufgabe 6: Untersuche die ganz rationale Funktion 4. Grades

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

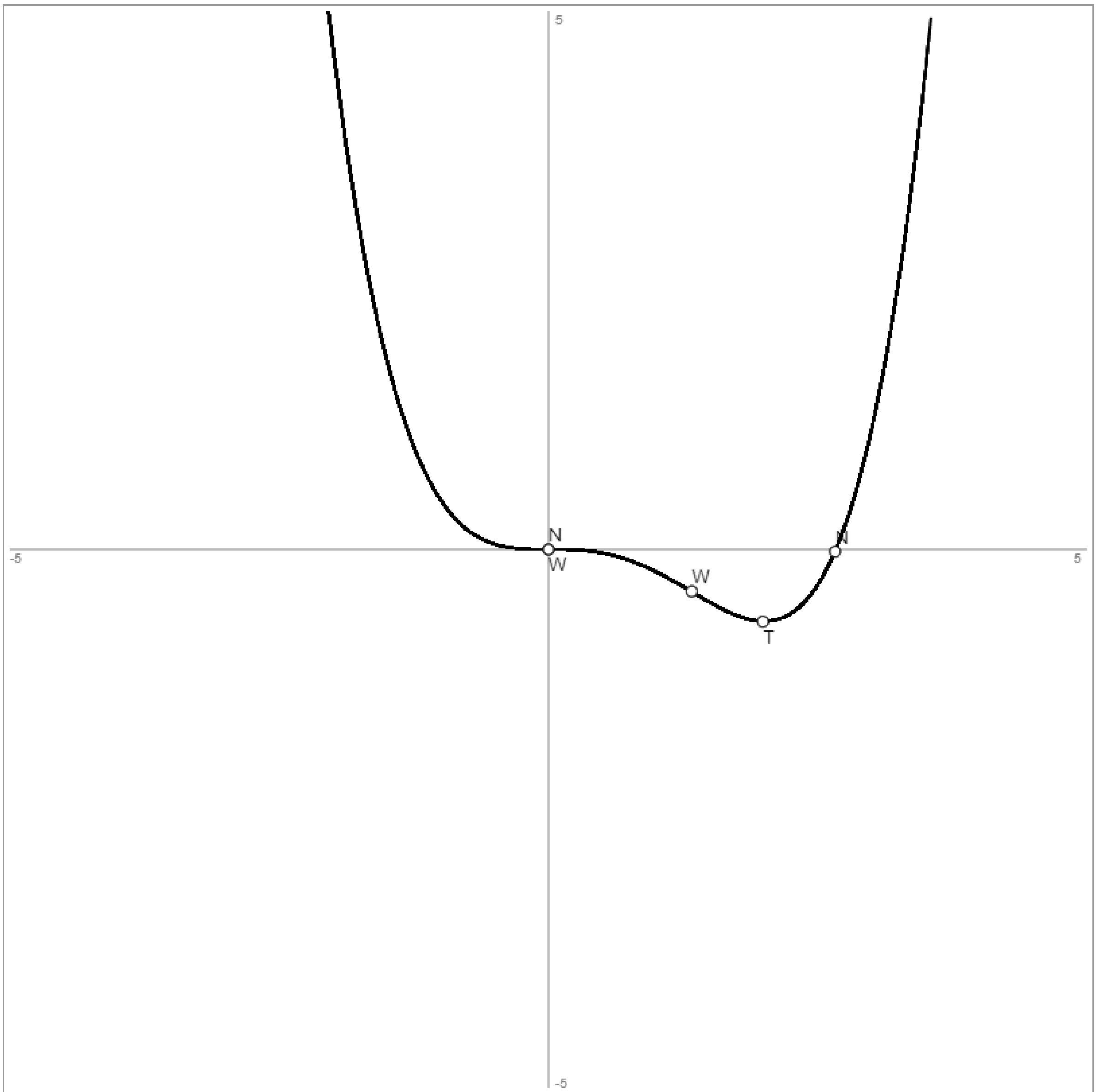
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wende-/Sattelpunkt W(0|0)
1.33	-0.3931	-0.59	0	Wendepunkt W(1.33|-0.39)
2	-0.6666	0	1.96	Tiefpunkt T(2|-0.67)
2.67	0	2.34	5.29	Nullstelle N(2.67|0)

Graph:



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Achsensymmetrie zur y-Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung.

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 7: Untersuche die ganz rationale Funktion 4. Grades

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x^2 + 16$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

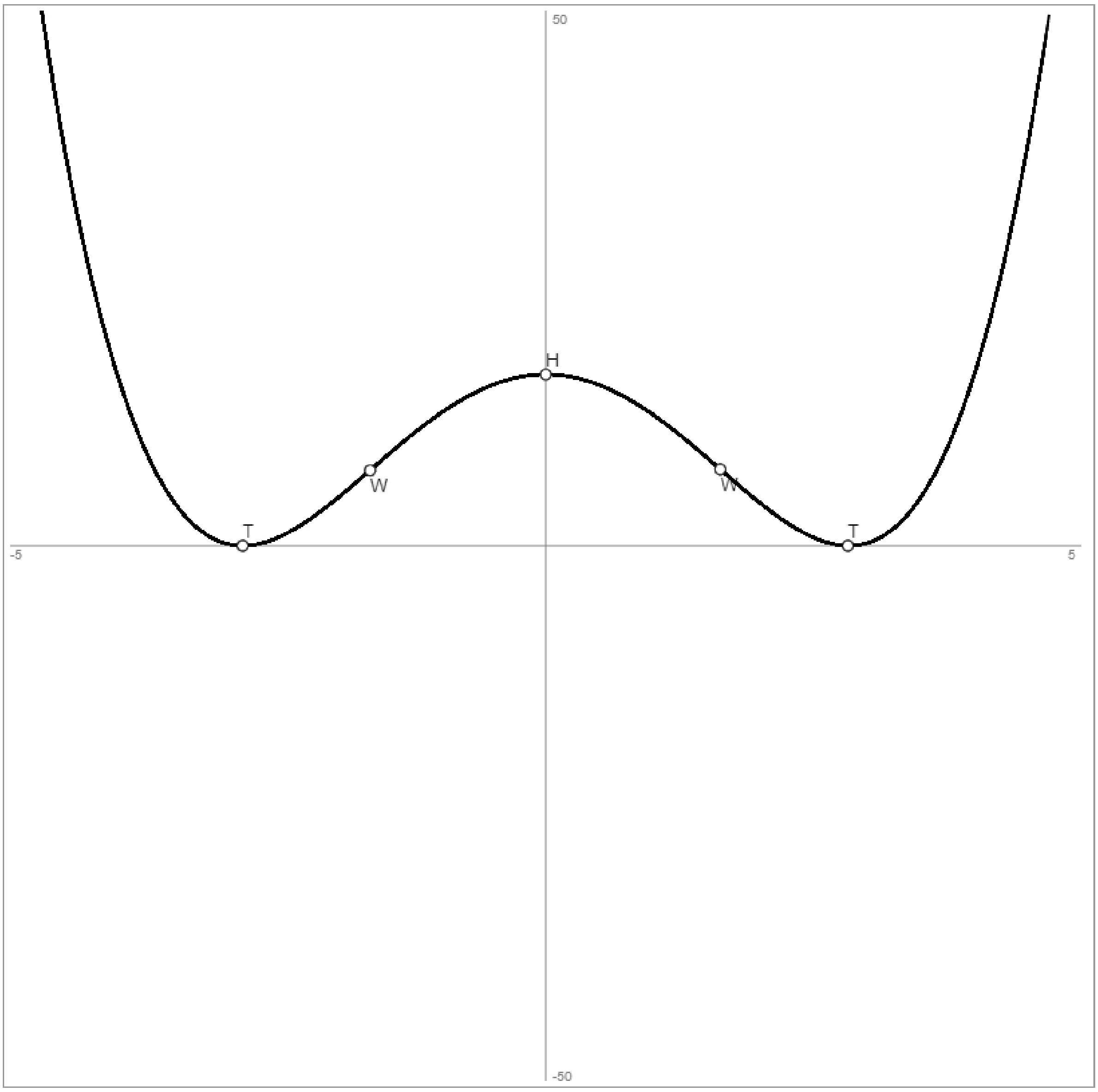
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-2.83	0	-0.03	16.03	Nullstelle = Tiefpunkt T(-2.83|0)
-1.64	7.0501	8.71	0.07	Wendepunkt W(-1.64|7.05)
0	16	0	-8	Schnittpunkt S_y(0|16) = Hochpunkt H(0|16)
1.63	7.1372	-8.71	-0.03	Wendepunkt W(1.63|7.14)
2.82	0.0006	-0.13	15.86	Nullstelle = Tiefpunkt T(2.82|0)

Graph:



Gerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> Achsensymmetrie zur y-Achse.

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 8: Untersuche die ganz rationale Funktion 4. Grades

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Monotonie, Krümmung und Verhalten für betragsmäßig große x.

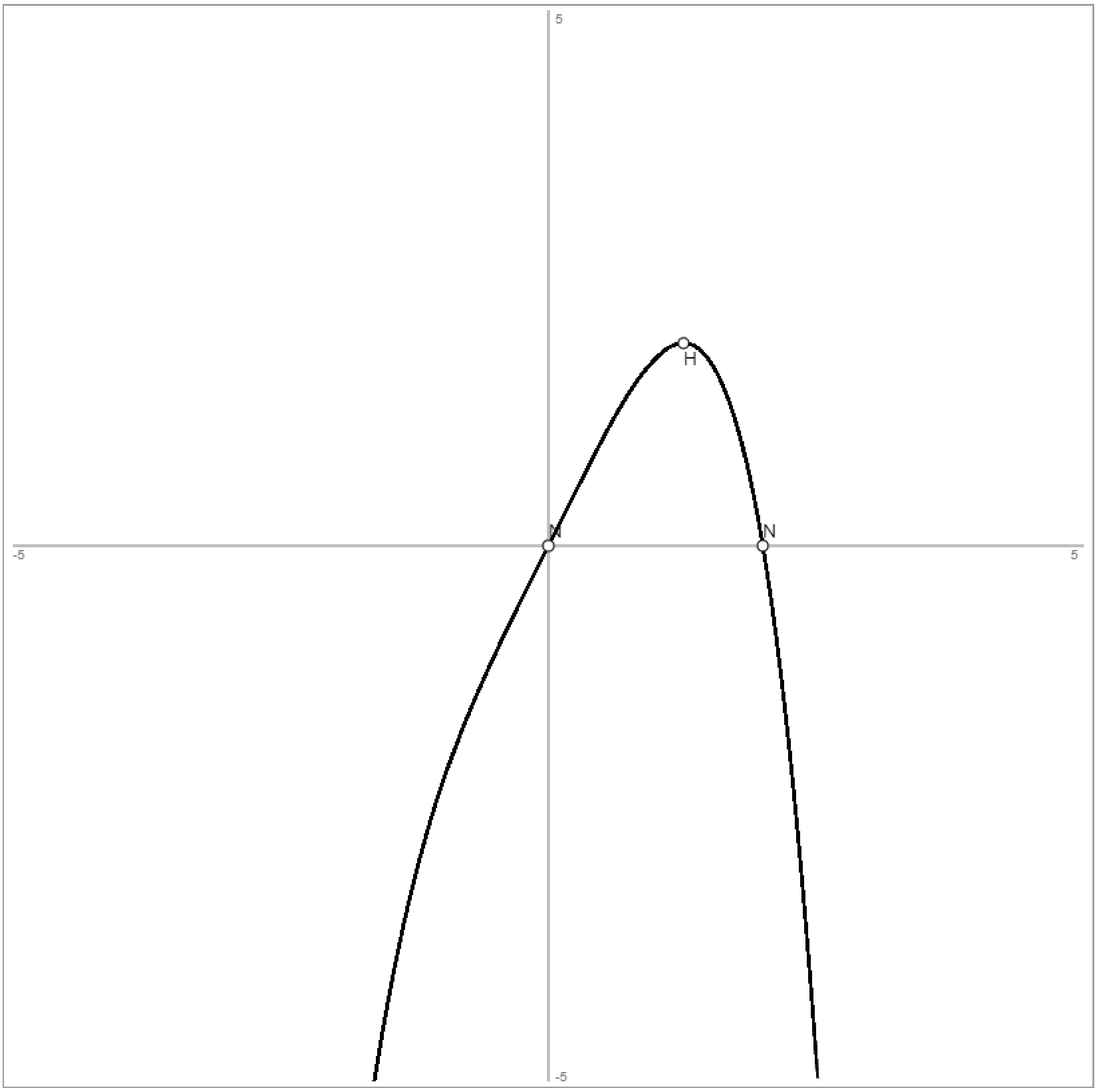
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte -> Monotonie; f''(x) = 0 -> Wendepunkte -> Krümmung; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	2	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
1.255	1.8898	0.02	-4.73	Hochpunkt H(1.26|1.89)
2	0	-6	-12	Nullstelle N(2|0)

Graph:



Monotonie: Hochpunkt H(1,26|1,89) -> (-∞; 1,26) steigende Monotonie; (1,26; +∞) fallende Monotonie

Krümmung: f''(x) ≤ 0 -> Rechtskrümmung auf ganz **R**

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> -∞

Aufgabe 9: Untersuche die ganz rationale Funktion 4. Grades

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 16x$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Monotonie, Krümmung und Verhalten für betragsmäßig große x.

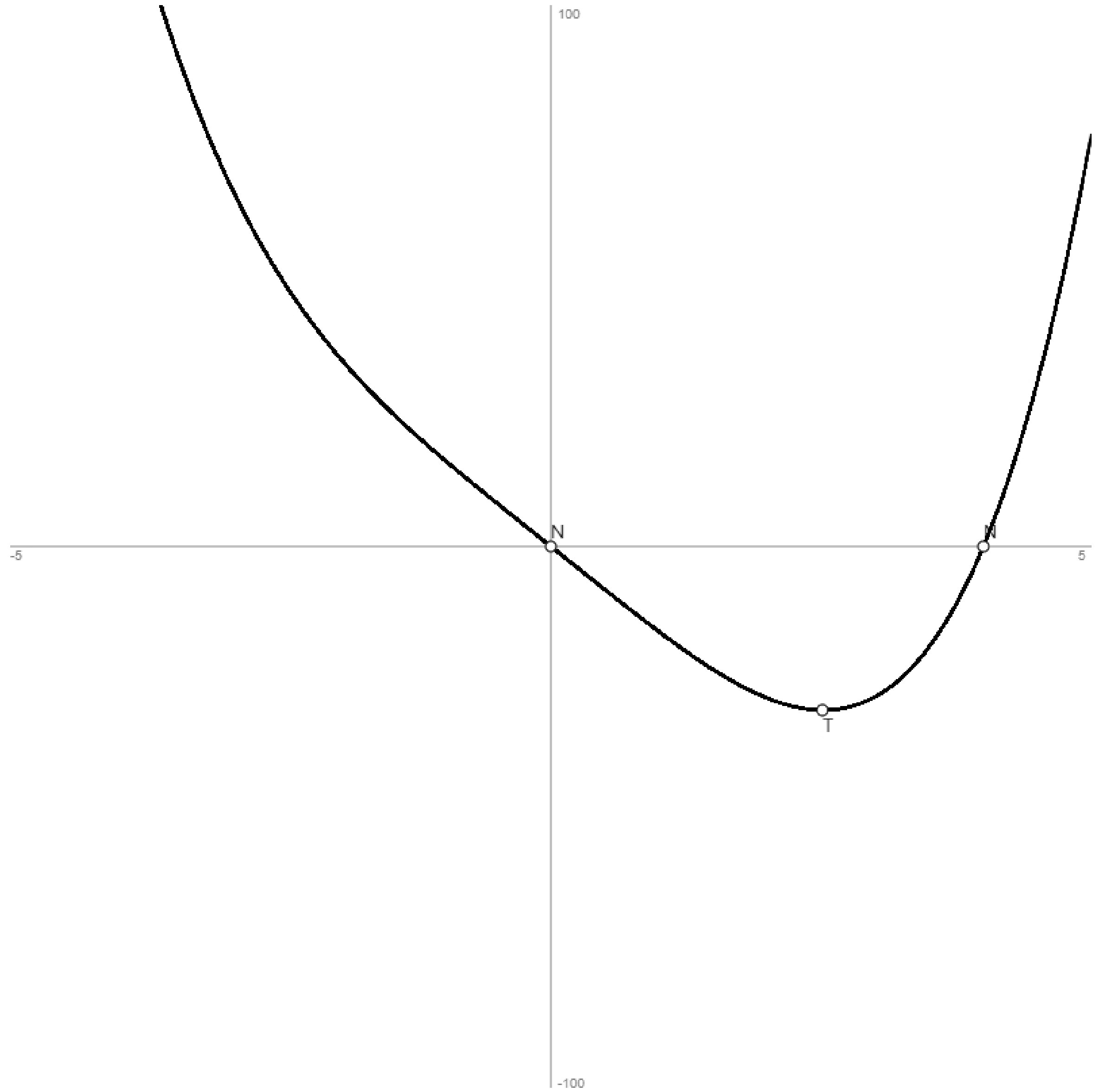
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte -> Monotonie; f''(x) = 0 -> Wendepunkte -> Krümmung; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	-16	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
2.51	-30.2372	-0.19	18.9	Tiefpunkt T(2.51|-30.24)
4	0	48	48	Nullstelle N(4|0)

Graph:



Monotonie: Tiefpunkt T(2,51|-30,24) -> (-∞; 2,51) fallende Monotonie; (2,51; +∞) steigende Monotonie

Krümmung: f''(x) ≥ 0 -> Linkskrümmung auf ganz **R**

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 10: Untersuche die Exponentialfunktion

$$f(x) = 8 - 2e^{-0,5x}$$

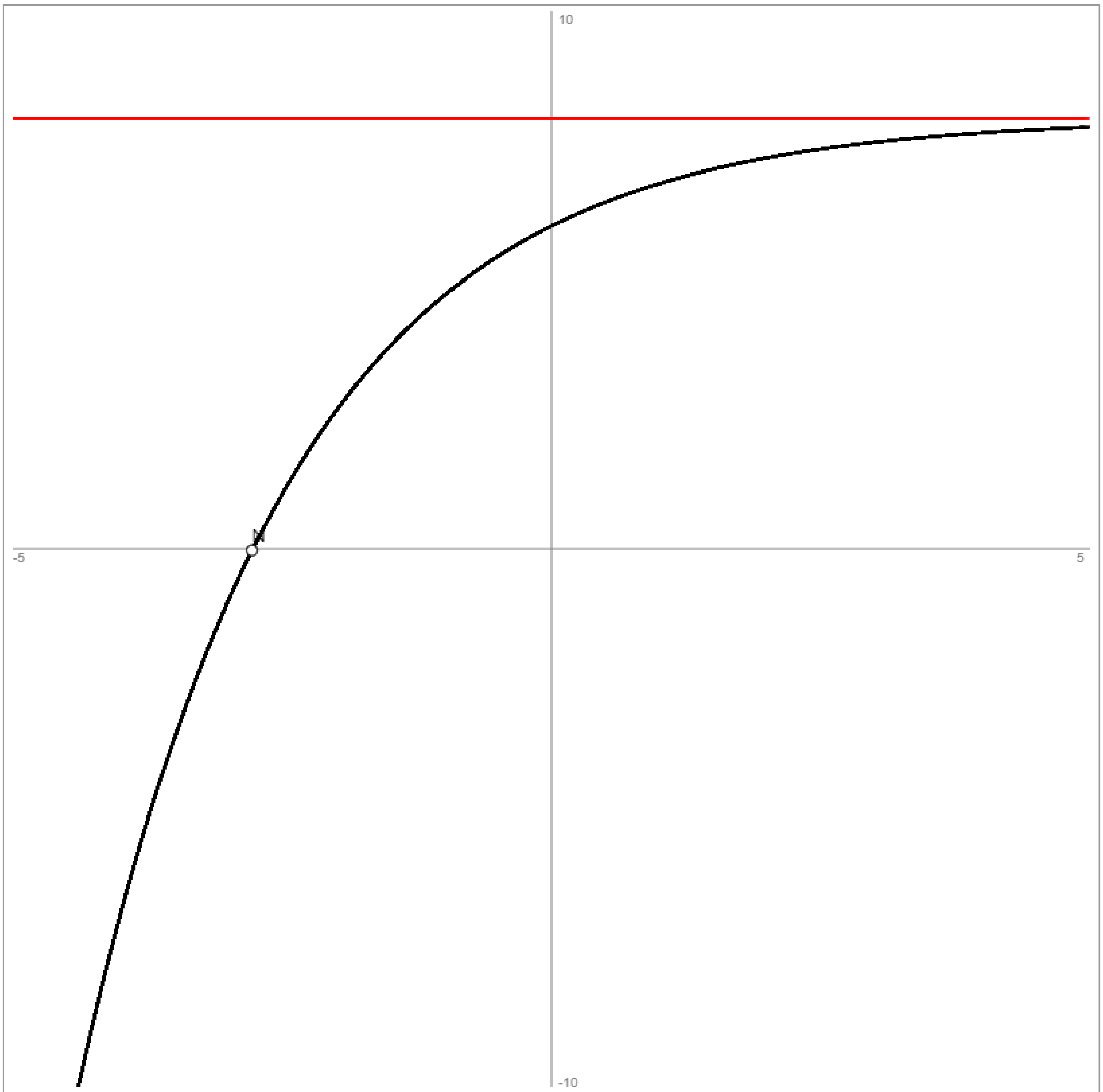
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Monotonie, Krümmung und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte -> Monotonie; f''(x) = 0 -> Wendepunkte -> Krümmung; x-> -∞ oder +∞ => f(x) -> y als Asymptote).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-2.78	-0.0297	4.01	-2.01	Nullstelle N(-2.78|-0.03)
0	6	1	-0.5	Schnittpunkt S_y(0|6)

Graph:



Monotonie: f'(x) > 0 -> steigende Monotonie auf ganz **R**

Krümmung: f''(x) < 0 -> Rechtskrümmung auf ganz **R**

x->+∞ => f(x) -> 8 = y (waagerechte Asymptote)

Aufgabe 11: Untersuche die Exponentialfunktion

$$f(x) = 0{,}5e^{x} - 2x - 3$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Monotonie, Krümmung und Verhalten für betragsmäßig große x.

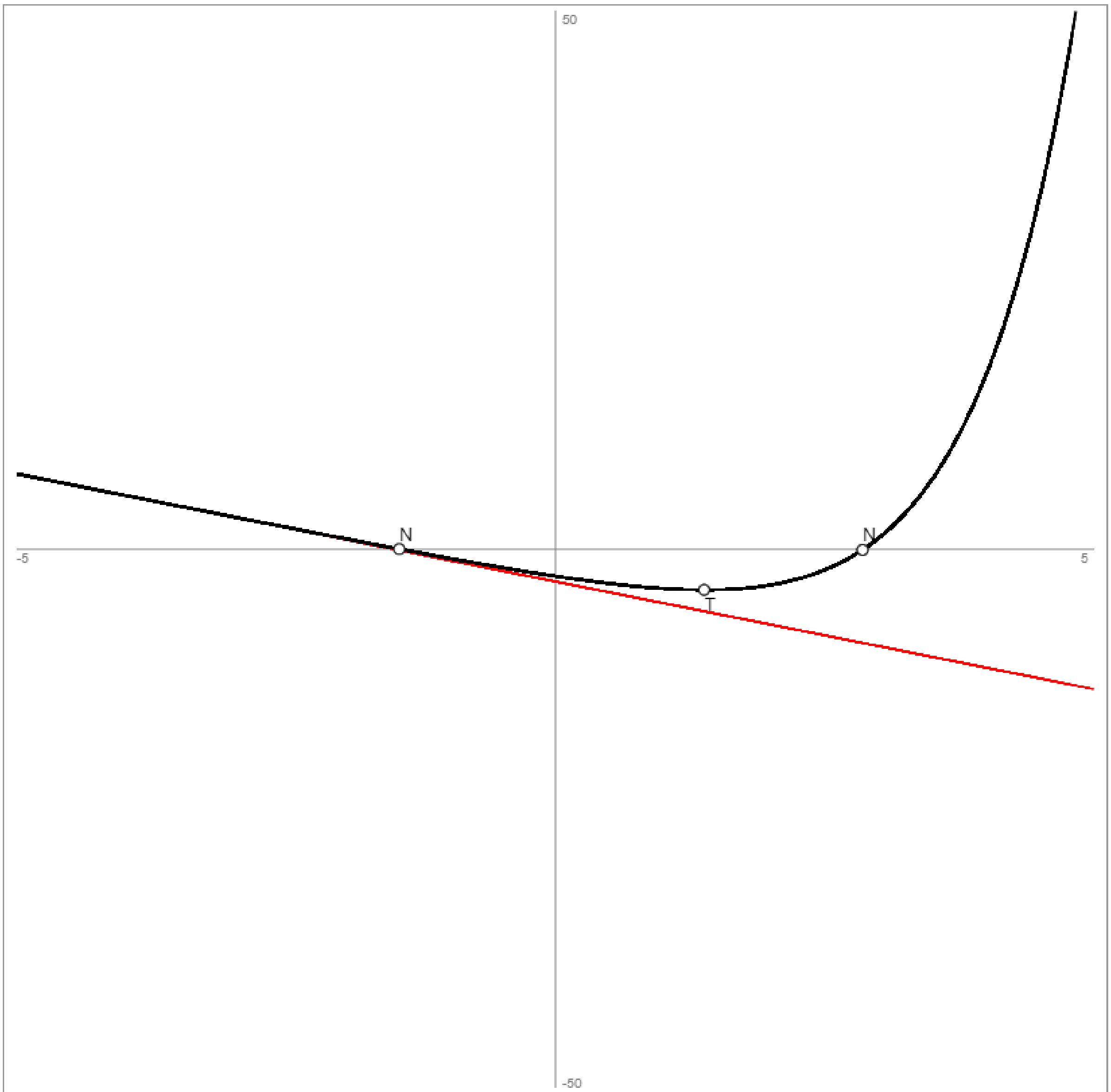
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte -> Monotonie; f''(x) = 0 -> Wendepunkte -> Krümmung; x-> -∞ oder +∞ => f(x) -> y als Asymptote).

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-1.45	0.0173	-1.88	0.12	Nullstelle N(-1.45|0.02)
0	-2.5	-1.5	0.5	Schnittpunkt S_y(0|-2.5)
1.38	-3.7725	-0.01	1.99	Tiefpunkt T(1.38|-3.77)
2.85	-0.0561	6.64	8.64	Nullstelle N(2.85|-0.06)

Graph:



Monotonie: Tiefpunkt T(1,38|-3,77) -> (-∞; 1,38) fallende Monotonie; (1,38; +∞) steigende Monotonie

Krümmung: f''(x) > 0 -> -> Linkskrümmung auf ganz **R**

x-> -∞ => f(x) -> -2x–3 = y (schiefe Asymptote)

Aufgabe 12: Untersuche die Exponentialfunktion

$$f(x) = -e^{-x} - x + 1$$

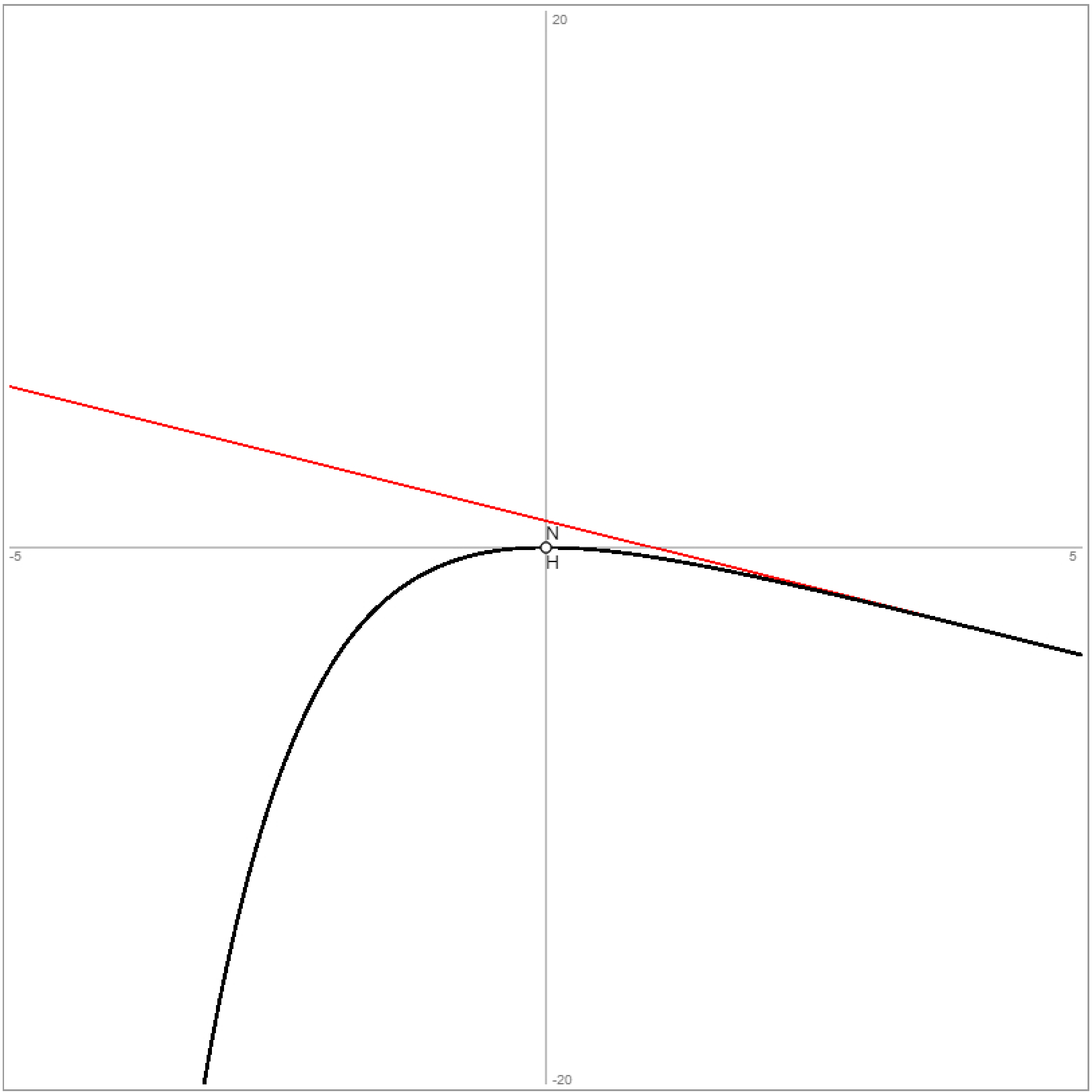
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Monotonie, Krümmung und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte -> Monotonie; f''(x) = 0 -> Wendepunkte -> Krümmung; x-> -∞ oder +∞ => f(x) -> y als Asymptote).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	0	-1	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)

Graph:



Monotonie: Hochpunkt H(0|0) -> (-∞; 0) steigende Monotonie; (0; +∞) fallende Monotonie

Krümmung: f''(x) < 0 -> Rechtskrümmung auf ganz **R**

x->+∞ => f(x) -> -x+1 = y (schiefe Asymptote)

Aufgabe 13: Untersuche die trigonometrische Funktion

$$f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}x) + 1,\ 0 \le x \le 2\pi$$

auf: Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen.

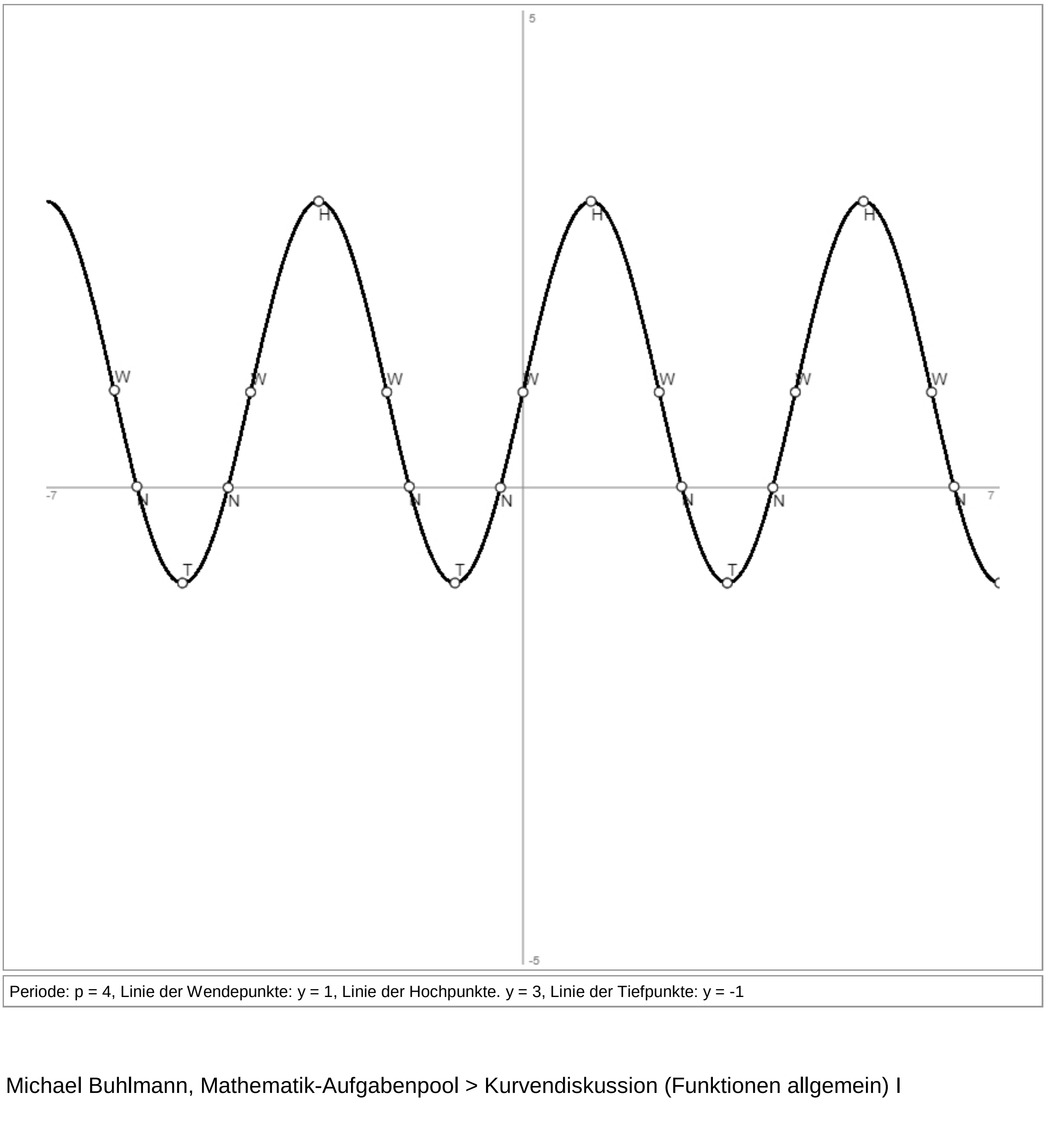
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	1	3.14	0	Schnittpunkt $S_y(0\|1)$ = Wendepunkt W(0|1)
1	3	0	-4.93	Hochpunkt H(1|3)
2	1	-3.14	0	Wendepunkt W(2|1)
2.33	0.0091	-2.73	2.44	Nullstelle N(2.33|0.01)
3	-1	0	4.93	Tiefpunkt T(3|-1)
3.66	-0.0181	2.7	2.51	Nullstelle N(3.66|-0.02)
4	1	3.14	0.08	Wendepunkt W(4|1)
5	3	0	-4.93	Hochpunkt H(5|3)
6	1	3.14	0.08	Wendepunkt W(6|1)

Graph:



Periode: p = 4, Linie der Wendepunkte: y = 1, Linie der Hochpunkte. y = 3, Linie der Tiefpunkte: y = -1

Aufgabe 14: Untersuche die trigonometrische Funktion

$$f(x) = -\frac{3}{2}\cos(2x) + 2 \text{, } -\pi \le x \le \pi$$

auf: Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen.

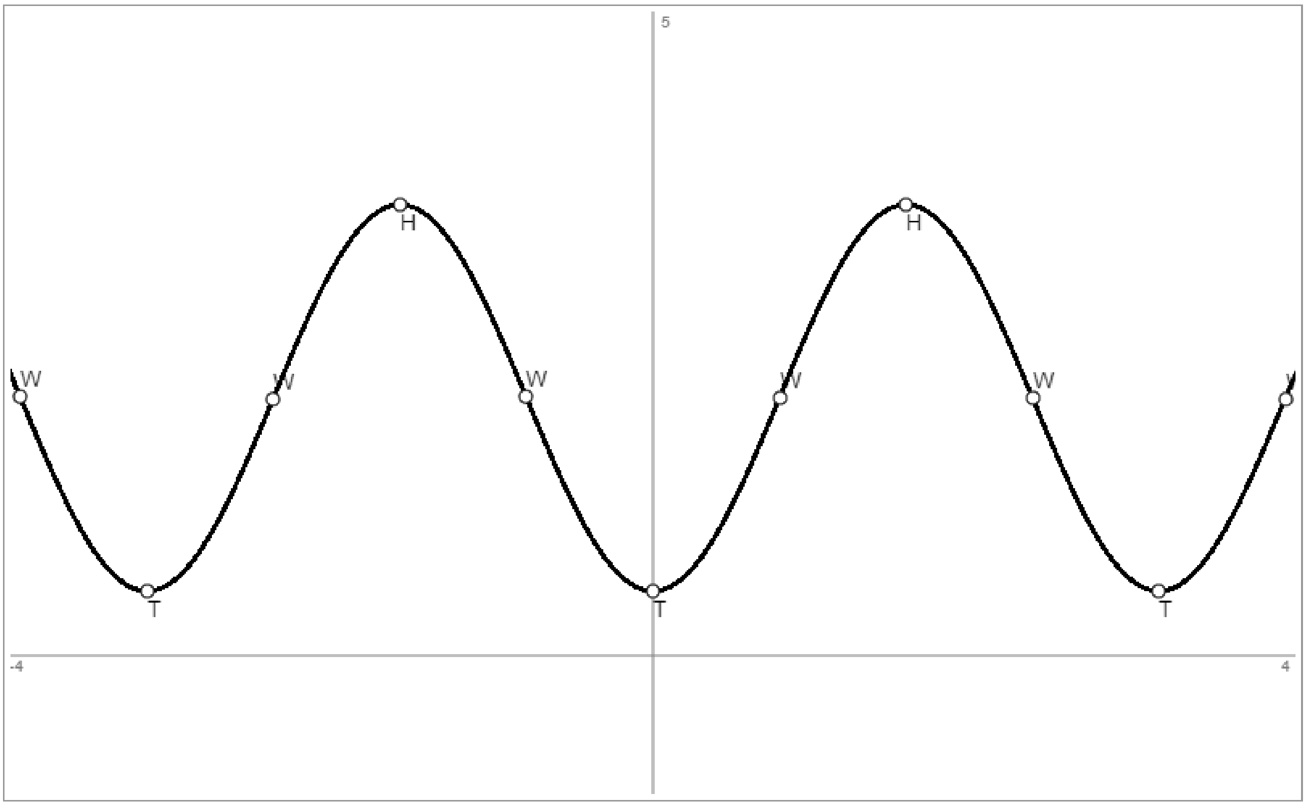
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte).

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-3.15	0.5002	-0.05	6	Tiefpunkt T(-3.15|0.5)
-2.36	1.9886	3	0.05	Wendepunkt W(-2.36|1.99)
-1.58	3.4997	0.06	-6	Hochpunkt H(-1.58|3.5)
-0.79	2.0138	-3	-0.06	Wendepunkt W(-0.79|2.01)
0	0.5	0	6	Schnittpunkt S_y(0|0.5) = Tiefpunkt T(0|0.5)
0.78	1.9838	3	0.06	Wendepunkt W(0.78|1.98)
1.57	3.5	0	-6	Hochpunkt H(1.57|3.5)
2.35	2.0186	-3	-0.07	Wendepunkt W(2.35|2.02)
3.14	0.5	-0.01	6	Tiefpunkt T(3.14|0.5)

Graph:



Periode p = π, Linie der Wendepunkte: y = 2, Linie der Hochpunkte: y = 3,5, Linie der Tiefpunkte: y = 0,5

Aufgabe 15: Untersuche die trigonometrische Funktion

$$f(x) = 3 - 3\sin(\frac{\pi}{4}(x-1)),\ -8 \le x \le 8$$

auf: Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen.

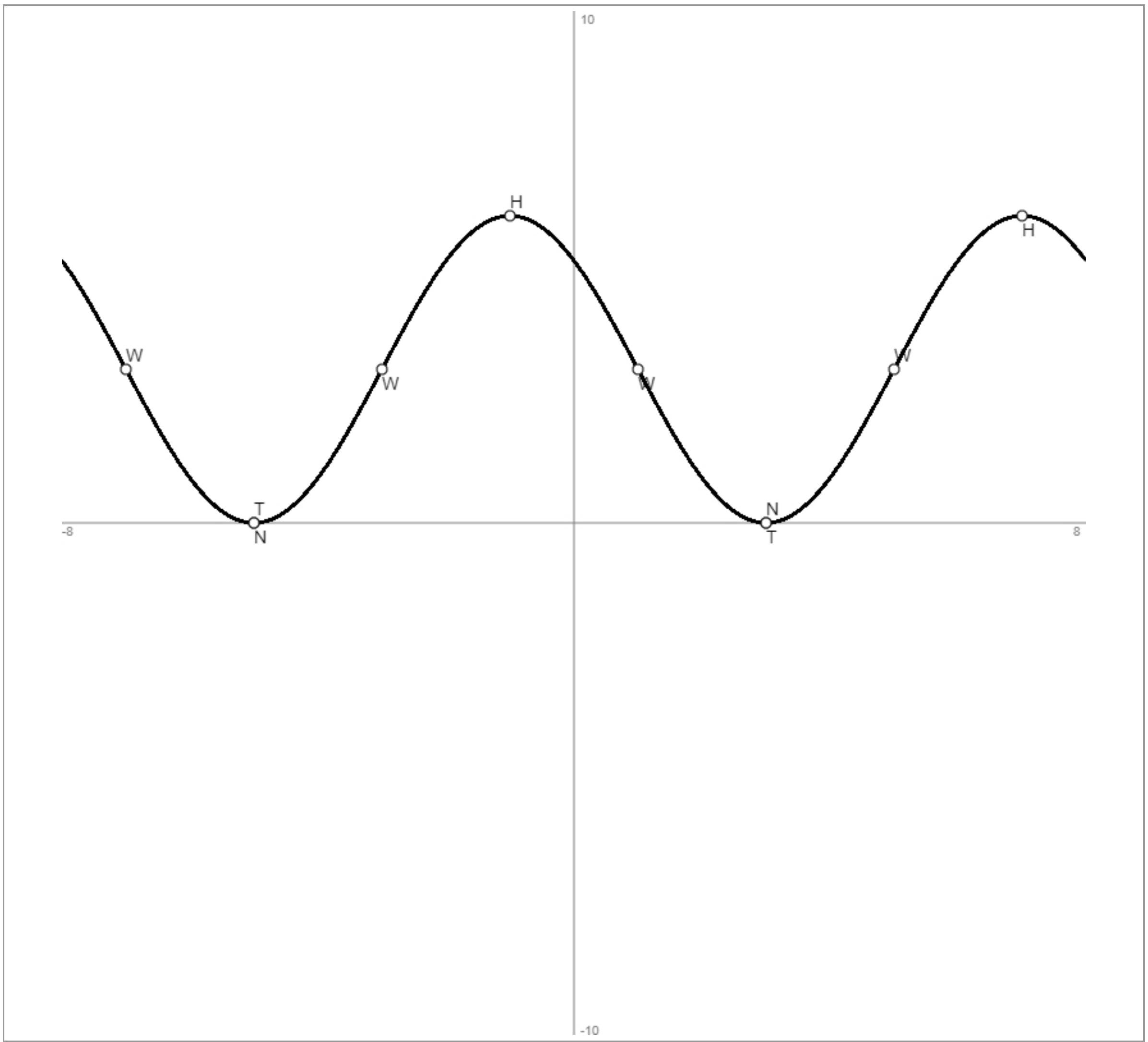
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-7	3	-2.36	0	Wendepunkt W(-7|3)
-5	0	0	1.85	Nullstelle N(-5|0) = Tiefpunkt T(-5|0)
-3	2.9764	2.36	0.01	Wendepunkt W(-3|3)
-1	6	0	-1.85	Hochpunkt H(-1|6)
0	5.1213	-1.67	-1.31	Schnittpunkt S_y(0|5.12)
1	3	-2.36	0	Wendepunkt W(1|3)
3	0	0	1.85	Nullstelle N(3|0) = Tiefpunkt T(3|0)
5	3	2.36	0	Wendepunkt W(5|3)
7	6	0	-1.85	Hochpunkt H(7|6)

Graph:



Periode: p = 8, Linie der Wendepunkte: y = 3, Linie der Hochpunkte: y = 6, Linie der Tiefpunkte: y = 0