Michael Buhlmann

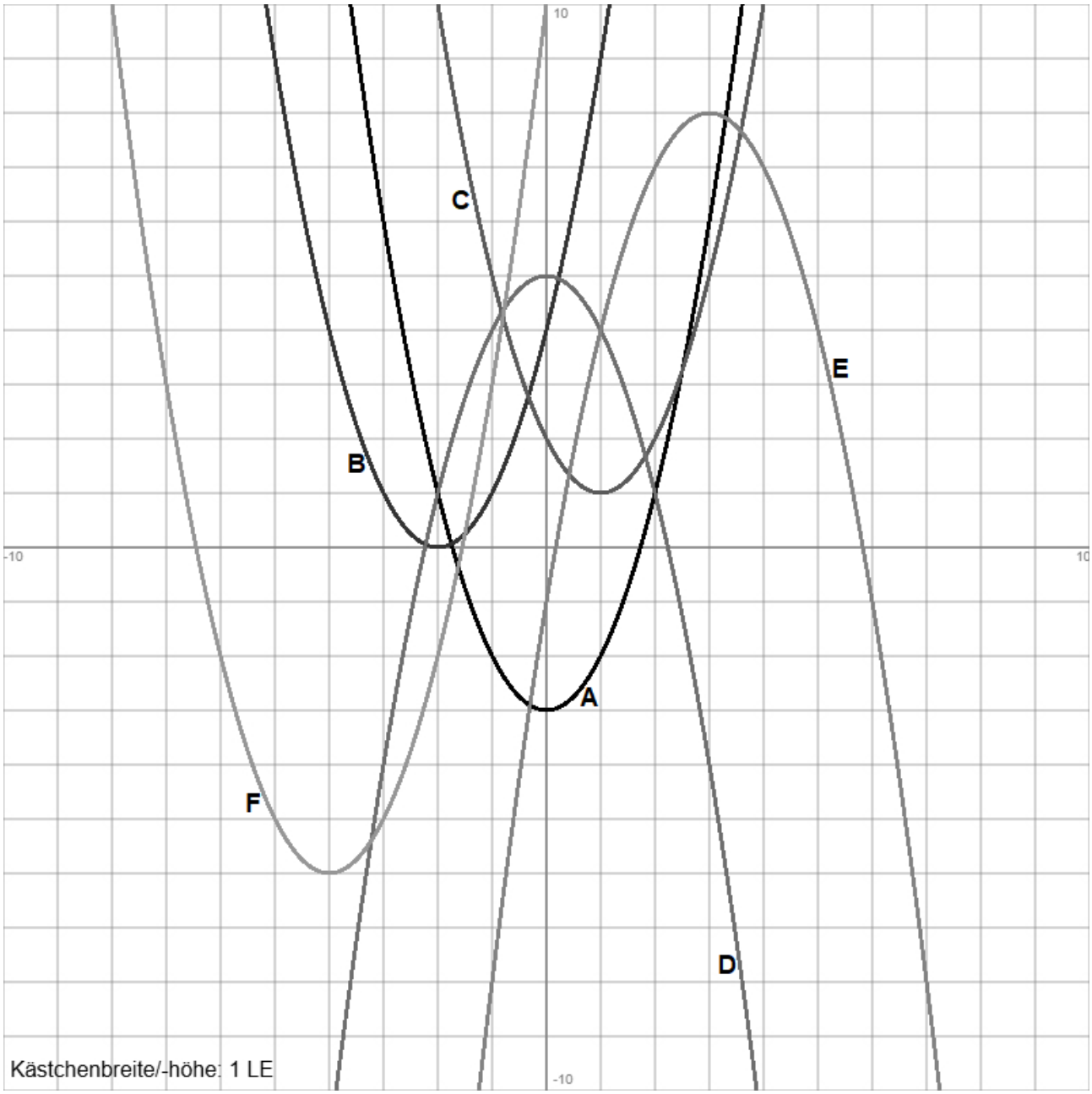
Mathematik-Aufgabenpool
> Allgemeine Parabeln I

Einleitung: Allgemeine Parabeln sind Funktionen z.B. in der Scheitelform: $y = a(x–d)^2 + e$ mit Scheitelpunkt S(d|e) und Streckfaktor a≠0. Eine Parabel heißt Normalparabel, wenn a=±1 erfüllt ist. Die Parabel ist um d>0 nach rechts, um d<0 nach links, um e>0 nach oben, um e<0 nach unten im x-y-Koordinatensystem verschoben. Die Parabel ist nach oben geöffnet, wenn a>0, nach unten geöffnet, wenn a<0; für a=-1 ergibt sich eine nach unten geöffnete Normalparabel. Ist -1<a<1, so ist die Parabel gestaucht, ist a<-1 oder a>1, so ist die Parabel gestreckt im Vergleich zur (nach oben geöffneten, nicht verschobenen Standard-) Normalparabel $y = x^2$ mit Scheitelpunkt S(0|0).

Aufgabe 1: Bestimme die Funktionsgleichungen der nach oben geöffneten Normalparabeln $y = (x-d)^2 + e$, wenn der Scheitelpunkt S(d|e) gegeben ist. Zeichne die Parabeln.

a) S(1|3) b) S(-4|1) c) S(-3|-4) d) S(2|-5).

Aufgabe 2: Bestimme die Funktionsgleichungen der Normalparabeln aus den Graphen.



Aufgabe 3: Die (Standard-) Normalparabel $y = x^2$ wird im x-y-Koordinatensystem verschoben um:

a) 3 nach rechts, 5 nach oben
b) 2 nach links, 6 nach unten
c) 5 nach links, 1 nach unten
d) 4 nach oben

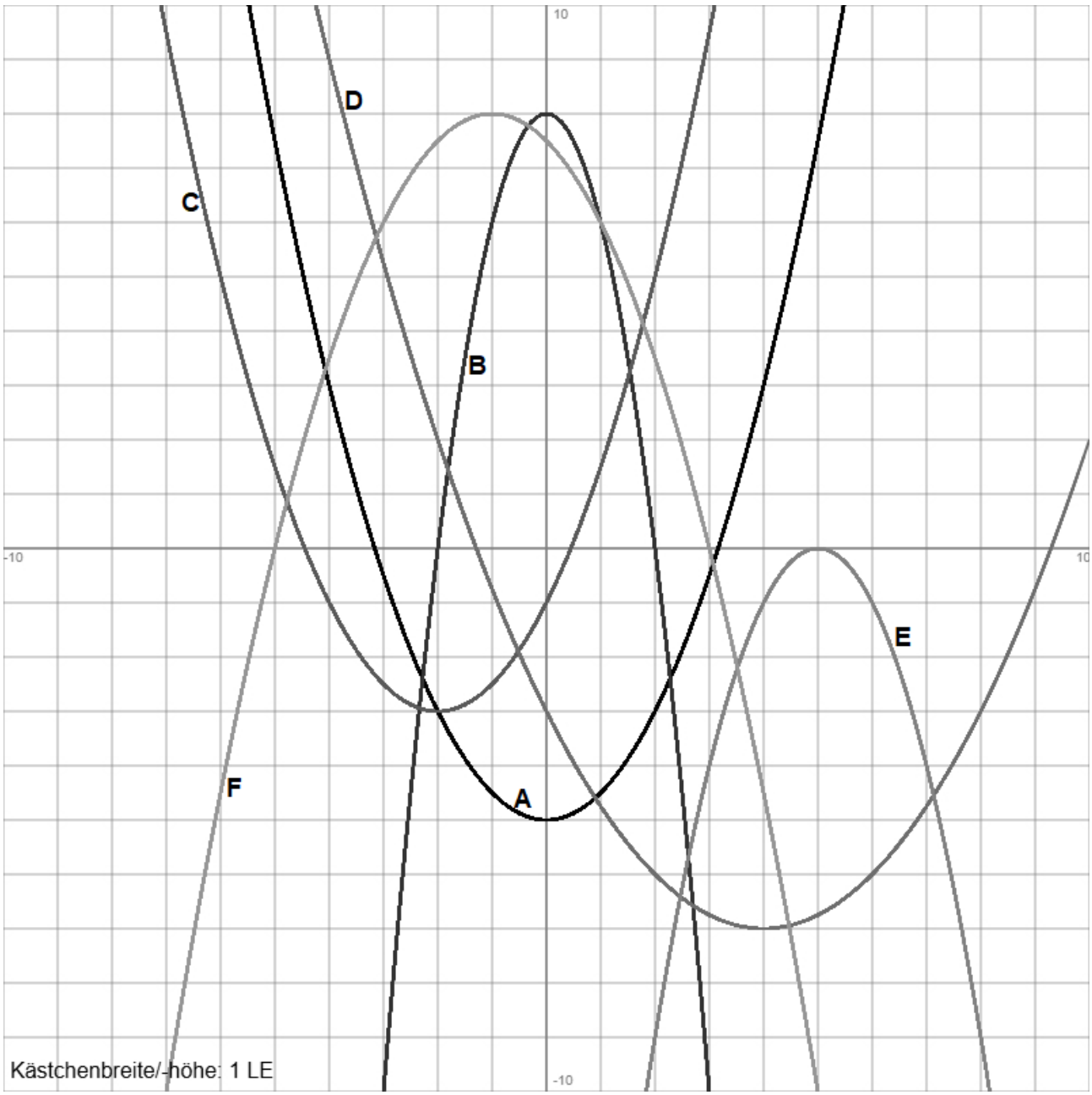
(in Längeneinheiten). Bestimme die Funktionsgleichungen. Zeichne die Parabeln.

Aufgabe 4: Gegeben sind der Scheitelpunkt S(d|e) und der Streckfaktor a einer allgemeinen Parabel $y = a(x-d)^2 + e$.

a) S(0|-4), a = 2 b) S(-2|0), a = $\frac{1}{2}$ c) S(-1|3), a = $-\frac{1}{4}$ d) S(2|-5), a = 1,5.

Bestimme die Funktionsgleichungen. Zeichne die Parabeln.

Aufgabe 5: Bestimme die Funktionsgleichungen der allgemeinen Parabeln aus den Graphen.



Aufgabe 6: Gegeben sind die folgenden allgemeinen Parabeln:

a) $y = 2(x-3)^2$ b) $y = -\frac{3}{5}x^2 + 4$ c) $y = \frac{2}{3}(x+\frac{11}{4})^2 - 3{,}7$ d) $y = -1{,}2(x-0{,}7)^2 + \frac{23}{9}$.

Bestimme jeweils den Scheitelpunkt und den Streckfaktor der Parabel. Erörtere, ob die Parabel nach oben oder unten geöffnet, enger/schmaler oder weiter/breiter als oder eine Normalparabel ist.

Aufgabe 7: Eine allgemeine Parabel mit Scheitelpunkt S(0|0) hat die Form $y = a \cdot x^2$. Bestimme die Funktionsgleichungen der Parabeln, wenn der Punkt P auf dem Graphen der Funktion liegt.

a) P(1|3) b) P(-1|0,5) c) P(-3|-9) d) P(4|-4).

Zeichne die Parabeln.

Aufgabe 8: Der Graph der allgemeinen Parabel $y = a(x-d)^2 + e$ läuft durch den Scheitelpunkt S(d|e) und den Punkt $P(x_0|y_0)$. Bestimme die Funktionsgleichung.

a) S(3|-2), P(0|7) b) S(-2|1), P(2|-7) c) S(4|-5), P(2|-2) d) S(-5|-1), P(-4|-3).

Erörtere, ob die Parabel nach oben oder unten geöffnet, enger/schmaler oder weiter/breiter oder gleich weit wie eine Normalparabel ist.

Aufgabe 9: Zeichne die nachstehenden Parabeln aufgrund einer Wertetabelle mir x-Werten, die maximal um 3 von der x-Koordinate des Scheitelpunkts abweichen.

a) $y = 2(x+1)^2 - 4$ b) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$ c) $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$ d) $y = 1{,}5(x+5{,}5)^2 - 6$.

Aufgabe 10: Ordne die Funktionsgleichungen den Graphen der allgemeinen Parabeln im x-y-Koordinatensystem zu:

p_1: $y = 2x^2 - 6$

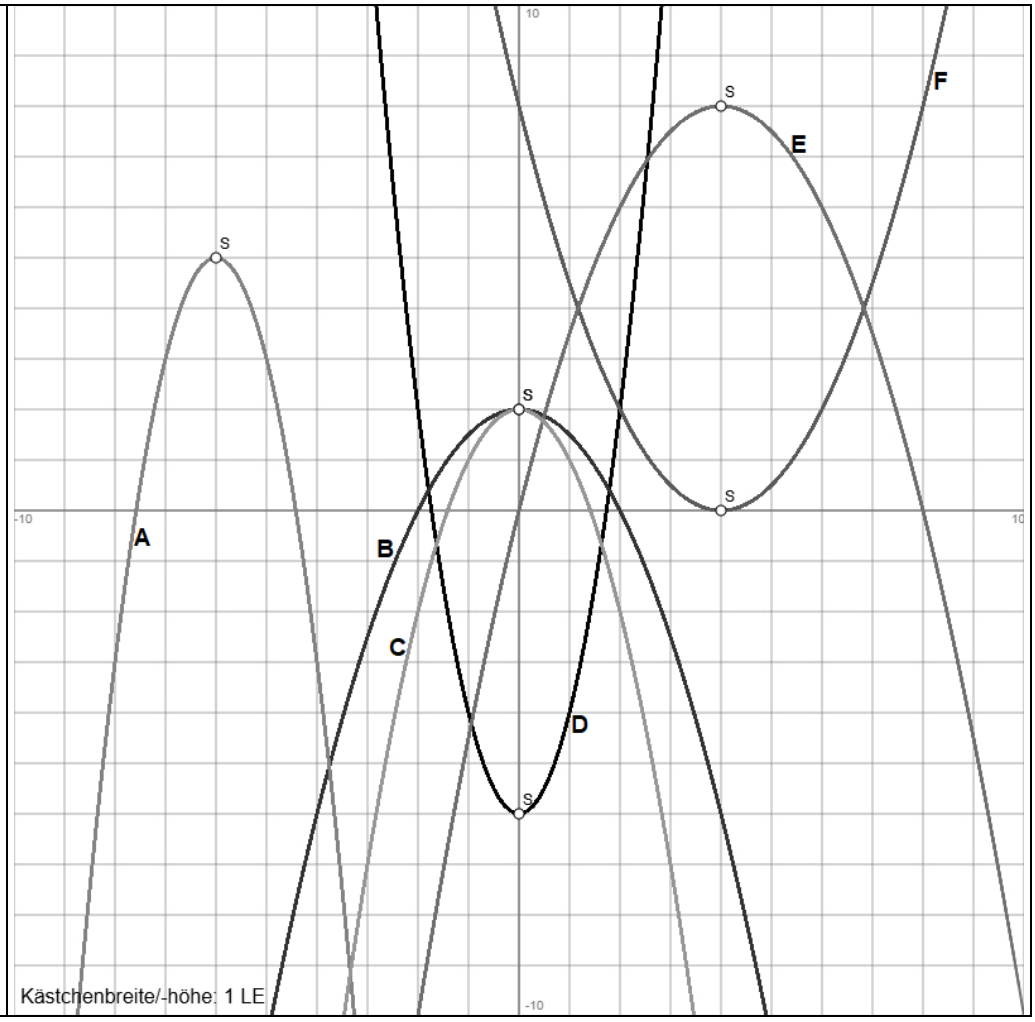
p_2: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

p_3: $y = -x^2 + 2$

p_4: $y = \frac{1}{2}(x-4)^2$

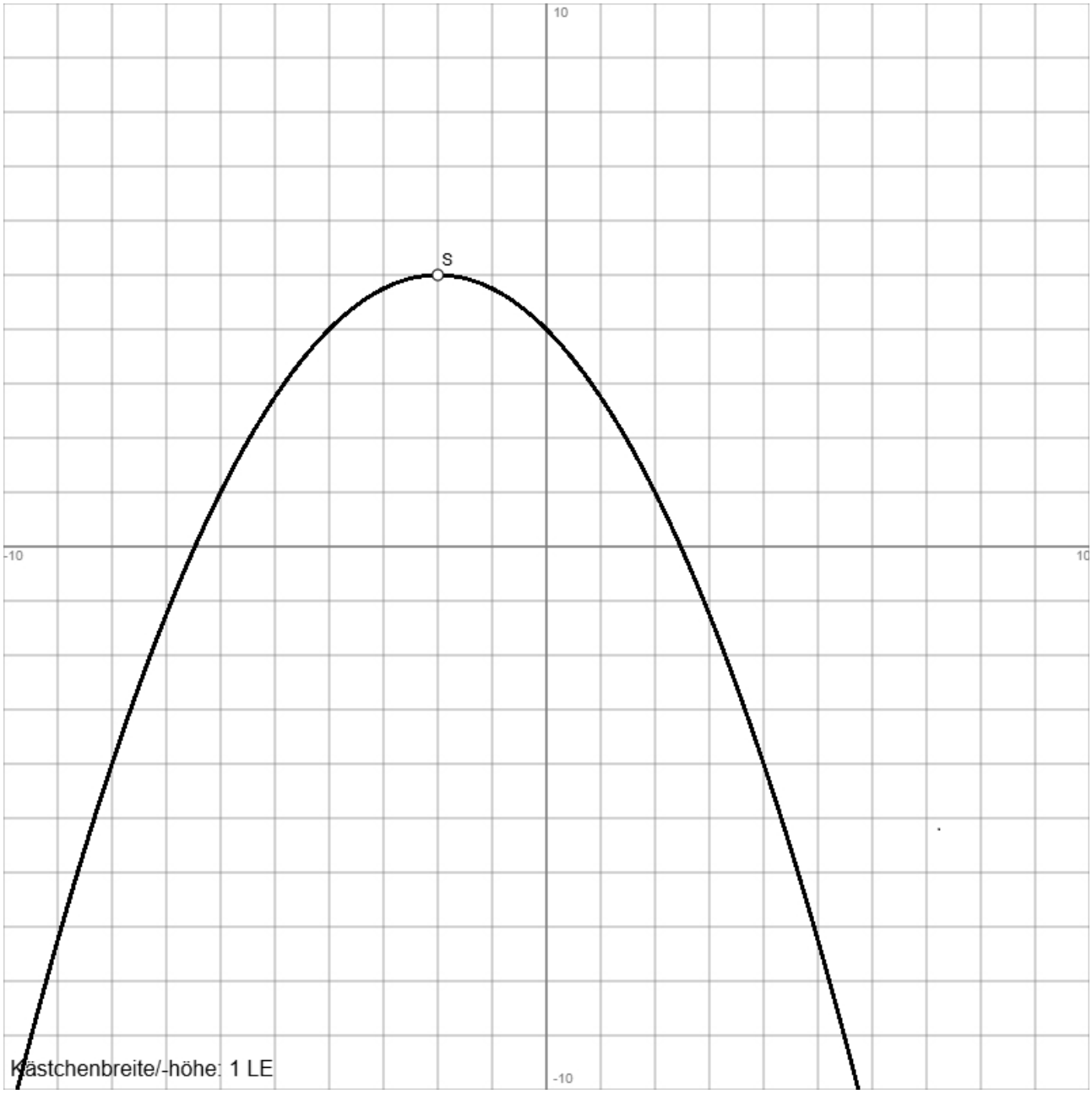
p_5: $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 8$

p_6: $y = -2(x+6)^2 + 5$



Aufgabe 11: Die allgemeine Parabel $y = \frac{1}{2}(x+5)^2 - 2$ wird um 8 Längeneinheiten nach rechts, um 5 Längeneinheiten nach oben verschoben. Bestimme die Funktionsgleichung der verschobenen Parabel. Zeichne die beiden Parabeln.

Aufgabe 12: Der Graph einer allgemeinen Parabel ist nachstehend im x-y-Koordinatensystem eingezeichnet. Die Parabel wird um 5 Längeneinheiten nach rechts, um 7 Längeneinheiten nach unten verschoben. Zeichne die verschobene Parabel im x-y-Koordinatensystem ein. Gib die Funktionsgleichungen beider Parabeln an.



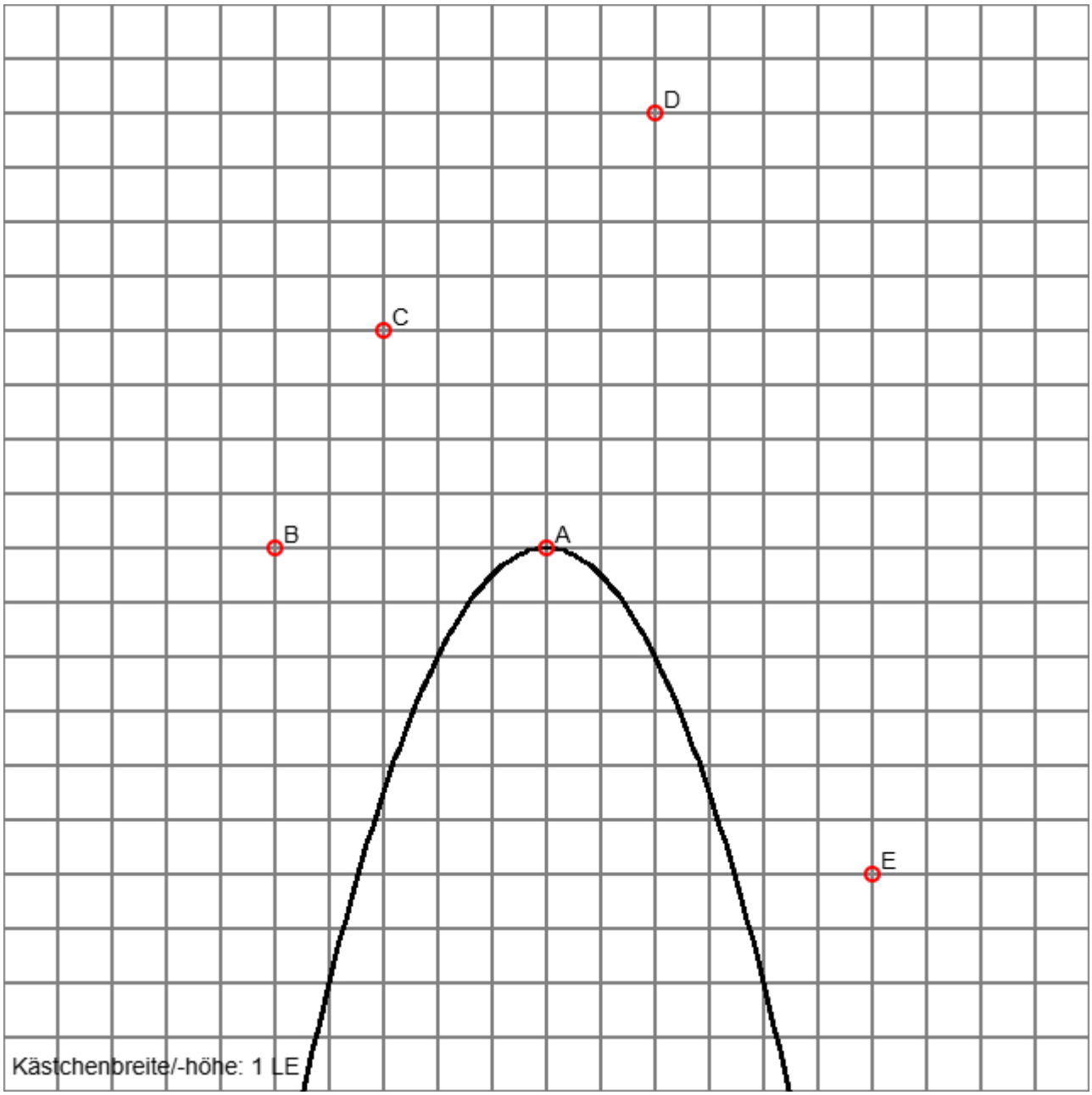
Aufgabe 13: Prüfe, ob der Punkt P auf der Parabelkurve p liegt.

a) P(-1|4), p: $y = x^2 + 3$
b) P(2|-10), p: $y = -2x^2 - 2$
c) P(-4|-8), p: $y = -0{,}5(x-1)^2 + 3{,}5$
d) P(3|1), p: $y = 0{,}25(x+3)^2 - 8$.

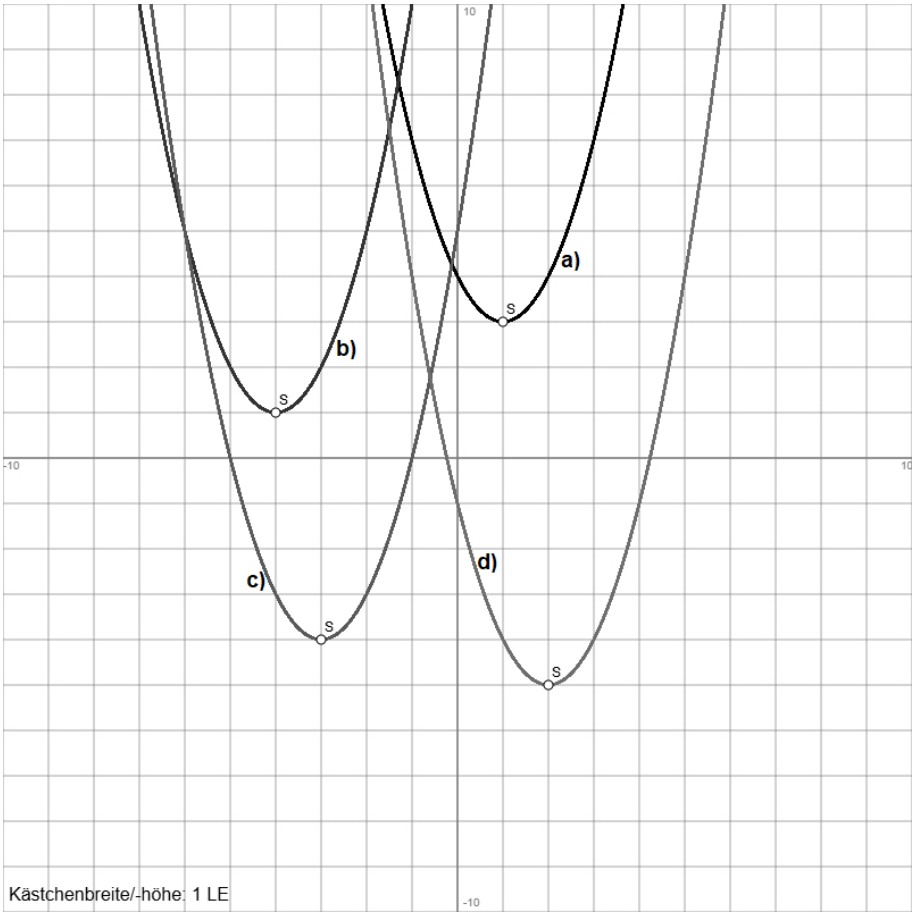
Aufgabe 14: Ordne den Punkten A, B, C, … die Parabel p_1, p_2, p_3, …, auf deren Kurve der Punkt liegt.

A(-2|-2) B(0|5) C(3|2) D(-2|4) E(-1|70) F(3|46)	p_1: $y = (x-3)^2 + 2$ p_2: $y = -\frac{1}{2}x^2$ p_3: $y = \frac{5}{4}(x+3)^2 + 1$ p_4: $y = 3(x-4)^2 - 5$ p_5: $y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 + 4$ p_6: $y = -(x-2)^2 + 9$

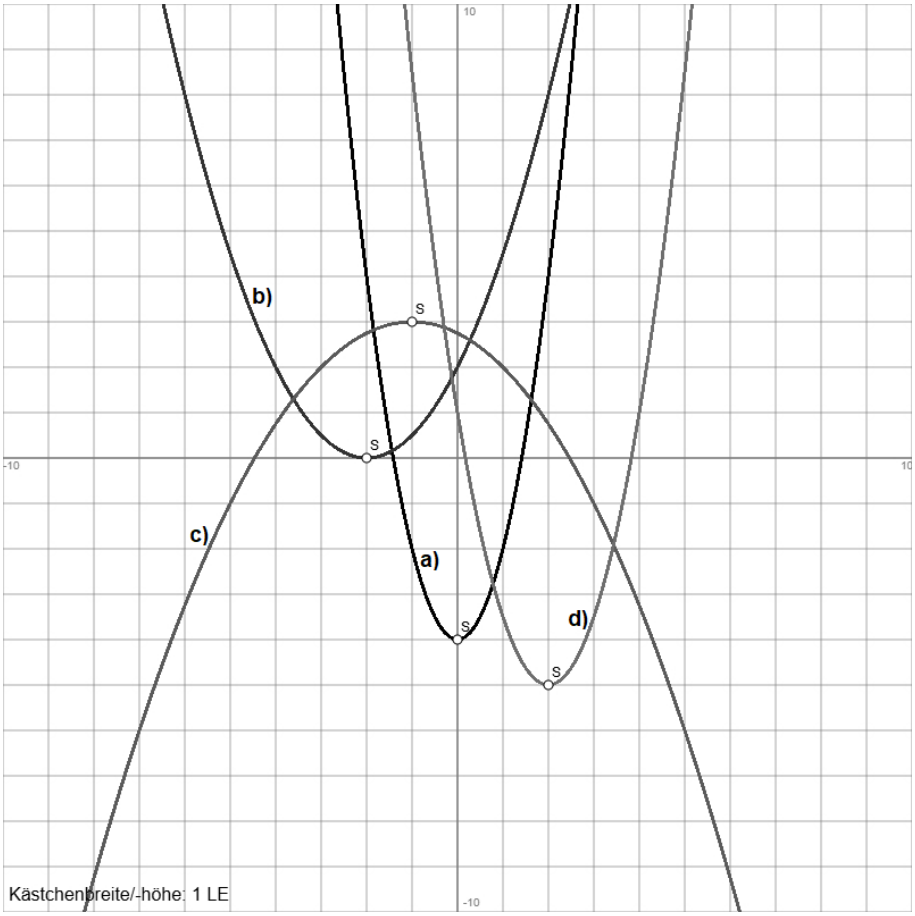
Aufgabe 15: Gib die Funktionsgleichungen einer Parabel mit Streckfaktor a = -0,5 an, wenn der Ursprung des x-y-Koordinatensystems in den Punkten A, B, C, D, E liegt:



Lösungen: 1a) $y = (x-1)^2+3$, b) $y = (x+4)^2+1$, c) $y = (x+3)^2-4$, d) $y = (x-2)^2-5$; Graphen:



2. A: $y = x^2-3$; B: $y = (x+2)^2$, C: $y = (x-1)^2+1$, D: $y = -x^2+5$, E: $y = -(x-3)^2+8$, F: $y = (x+4)^2-6$. – 3a) S(3|5) -> $y = (x-3)^2+5$, b) S(-2|6) -> $y = (x+2)^2+6$, c) S(-5|-1) -> $y = (x+5)^2-1$, d) S(0|4) -> $y = x^2+4$. – 4a) $y = 2x^2-4$, b) $y = 0,5(x+2)^2$, c) $y = -0,25(x+1)^2+3$, d) $y = 1,5(x-2)^2-5$; Graphen:



5. A: $y = 0{,}5x^2-5$, B: $y = -2x^2+8$, C: $y = 0{,}5(x+2)^2-3$, D: $y = 0{,}25(x-4)^2-7$, E: $y = -(x-5)^2$, F: $y = -0{,}5(x+1)^2+8$.

6a) $y = 2\cdot(x-3)^2$:

Scheitelform, Eigenschaften der (allgemeinen, Normal-) Parabel $y = 2\cdot(x-3)^2$: Es ergibt sich das folgende Eigenschaften-Schema:

	y =	a	$(x-d)^2 + e$
	y =	2	$(x-3)^2$
	y =	2	$(x-3)^2 + 0$
			d = 3 | e = 0
			Scheitelpunkt S(3|0)
		Streckfaktor a = 2	
	a = 2 > 0		a = 2 > 1
	Parabel ist nach oben geöffnet.		Parabel ist enger/schmaler als eine Normalparabel.

Insgesamt liegt eine nach oben geöffnete, im Vergleich zu einer Normalparabel engere/schmalere allgemeine Parabel mit Scheitelpunkt S(3|0) und Streckfaktor a = 2 vor.

b) $y = -0{,}6\cdot x^2+4$:

Scheitelform, Eigenschaften der (allgemeinen, Normal-) Parabel $y = -0.6\cdot x^2 + 4$: Es ergibt sich das folgende Eigenschaften-Schema:

	y =	a	$(x-d)^2 + e$
	y =	-0.6	$x^2 + 4$
	y =	-0.6	$(x-0)^2 + 4$
			d = 0 | e = 4
			Scheitelpunkt S(0|4)
		Streckfaktor a = -0.6	
	a = -0.6 < 0		a = -0.6 > -1
	Parabel ist nach unten geöffnet.		Parabel ist weiter/breiter als eine Normalparabel.

Insgesamt liegt eine nach unten geöffnete, im Vergleich zu einer Normalparabel weitere/breitere allgemeine Parabel mit Scheitelpunkt S(0|4) und Streckfaktor a = -0.6 vor.

c) $y = 2\cdot(x+2{,}75)^2/3-3{,}7$:

Scheitelform, Eigenschaften der (allgemeinen, Normal-) Parabel $y = 2(x+2.75)^2/3 - 3.7$: Es ergibt sich das folgende Eigenschaften-Schema:

	y =	a	$(x-d)^2 + e$
	y =	2/3	$(x+2.75)^2 - 3.7$
	y =	2/3	$(x-(-2.75))^2 + (-3.7)$
			d = -2.75 | e = -3.7
			Scheitelpunkt S(-2.75|-3.7)
		Streckfaktor a = 2/3	
	a = 2/3 > 0		a = 2/3 < 1
	Parabel ist nach oben geöffnet.		Parabel ist weiter/breiter als eine Normalparabel.

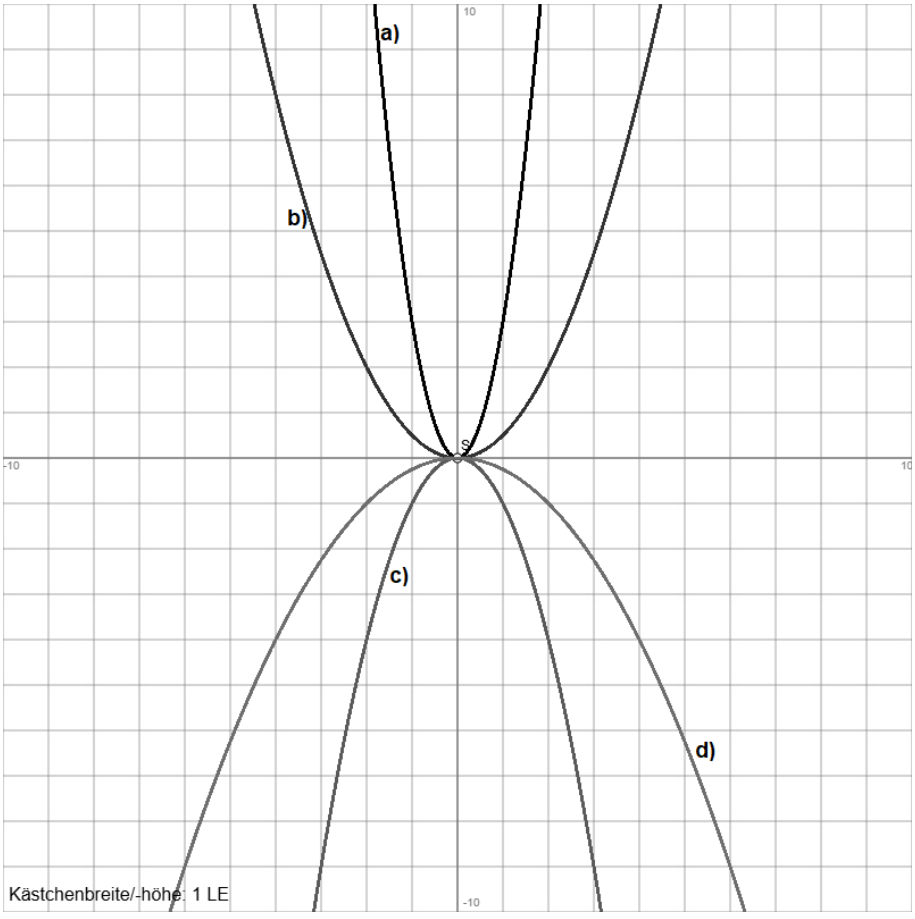
Insgesamt liegt eine nach oben geöffnete, im Vergleich zu einer Normalparabel weitere/breitere allgemeine Parabel mit Scheitelpunkt S(-2.75|-3.7) und Streckfaktor a = 2/3 vor.

d) $y = -1{,}2\cdot(x-0{,}7)^2+23/9$:
Scheitelform, Eigenschaften der (allgemeinen, Normal-) Parabel $y = -1.2\cdot(x-0.7)^2 + 23/9$: Es ergibt sich das folgende Eigenschaften-Schema:

	y =	a	$(x-d)^2 + e$
	y =	-1.2	$(x-0.7)^2 + 23/9$
			d = 0.7 | e = 23/9
			Scheitelpunkt S(0.7|23/9)
		Streckfaktor a = -1.2	
	a = -1.2 < 0		a = -1.2 < -1
	Parabel ist nach unten geöffnet.		Parabel ist enger/schmaler als eine Normalparabel.

Insgesamt liegt eine nach unten geöffnete, im Vergleich zu einer Normalparabel engere/schmalere allgemeine Parabel mit Scheitelpunkt S(0.7|23/9) und Streckfaktor a = -1.2 vor.

7a) P(1|3) -> Punktprobe -> $3 = a\cdot1^2 \Leftrightarrow a = 3$ -> $y = 3x^2$; b) P(-1|3) -> Punktprobe -> $0{,}5 = a\cdot(-1)^2 \Leftrightarrow a = 0{,}5$ -> $y = 0{,}5\cdot x^2$; c) P(-3|-9) -> Punktprobe -> $-9 = a\cdot(-3)^2 \Leftrightarrow -9 = 9a \Leftrightarrow a = -1$ -> $y = -x^2$; d) P(4|-2) -> Punktprobe -> $-4 = a\cdot4^2 \Leftrightarrow -4 = 16a \Leftrightarrow a = -1/4$ -> $y = -x^2/4$; Graphen:



8. Parabelbestimmung: a) S(3|-2) -> $y = a(x-3)^2-2$, P(0|7) -> $7 = a(0-3)^2-2 \Leftrightarrow 9 = a\cdot(-3)^2 \Leftrightarrow 9 = 9a \Leftrightarrow a = 1$ -> $y = (x-3)^2-2$;
b) S(-2|1) -> $y = a(x+2)^2+1$, P(2|-7) -> $-7 = a\cdot(2+2)^2+1 \Leftrightarrow -7\ a\cdot4^2+1 \Leftrightarrow -8 = 16a \Leftrightarrow a = -0{,}5$ -> $y = -0{,}5(x+2)^2+1$;
c) S(4|-5) -> $y = a(x-4)^2-5$, P(2|-2) -> $-2 = a\cdot(2-4)^2-5 \Leftrightarrow 3 = a\cdot(-2)^2 \Leftrightarrow 3 = 4a \Leftrightarrow a = 0{,}75$ -> $y = 0{,}75(x-4)^2-5$;
d) S(-5|-1) -> $y = a(x+5)^2-1$, P(-4|-3) -> $-3 = a\cdot(-4+5)^2-1 \Leftrightarrow -2 = a\cdot1^2 \Leftrightarrow a = -2$ -> $y = -2(x+5)^2-1$;

Eigenschaften: a) $y = (x-3)^2-2$:
Scheitelform, Eigenschaften der (allgemeinen, Normal-) Parabel $y = 1\cdot(x-3)^2 - 2$: Es ergibt sich das folgende Eigenschaften-Schema:

	y =	a	$(x-d)^2 + e$
	y =	1	$(x-3)^2 - 2$
	y =	1	$(x-3)^2 + (-2)$
			d = 3 | e = -2
			Scheitelpunkt S(3|-2)
		Streckfaktor a = 1	
a = 1 > 0		a = 1	
Parabel ist nach oben geöffnet.		Parabel ist eine Normalparabel.	

Insgesamt liegt eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt S(3|-2) und Streckfaktor a = 1 vor.

b) $y = -0{,}5\cdot(x+2)^2+1$:
Scheitelform, Eigenschaften der (allgemeinen, Normal-) Parabel $y = -0.5\cdot(x+2)^2 + 1$: Es ergibt sich das folgende Eigenschaften-Schema:

	y =	a	$(x-d)^2 + e$
	y =	-0.5	$(x+2)^2 + 1$
	y =	-0.5	$(x-(-2))^2 + 1$
			d = -2 | e = 1
			Scheitelpunkt S(-2|1)
		Streckfaktor a = -0.5	
a = -0.5 < 0		a = -0.5 > -1	
Parabel ist nach unten geöffnet.		Parabel ist weiter/breiter als eine Normalparabel.	

Insgesamt liegt eine nach unten geöffnete, im Vergleich zu einer Normalparabel weitere/breitere allgemeine Parabel mit Scheitelpunkt S(-2|1) und Streckfaktor a = -0.5 vor.

c) $y = 0{,}75\cdot(x-4)^2-5$:
Scheitelform, Eigenschaften der (allgemeinen, Normal-) Parabel $y = 0.75\cdot(x-4)^2 - 5$: Es ergibt sich das folgende Eigenschaften-Schema:

	y =	a	$(x-d)^2 + e$
	y =	0.75	$(x-4)^2 - 5$
	y =	0.75	$(x-4)^2 + (-5)$
			d = 4 | e = -5
			Scheitelpunkt S(4|-5)
		Streckfaktor a = 0.75	
a = 0.75 > 0		a = 0.75 < 1	
Parabel ist nach oben geöffnet.		Parabel ist weiter/breiter als eine Normalparabel.	

Insgesamt liegt eine nach oben geöffnete, im Vergleich zu einer Normalparabel weitere/breitere allgemeine Parabel mit Scheitelpunkt S(4|-5) und Streckfaktor a = 0.75 vor.

d) $y = -2\cdot(x+5)^2-1$:

Scheitelform, Eigenschaften der (allgemeinen, Normal-) Parabel $y = -2\cdot(x+5)^2 - 1$: Es ergibt sich das folgende Eigenschaften-Schema:

	y =	a	$(x-d)^2 + e$
	y =	-2	$(x+5)^2 - 1$
	y =	-2	$(x-(-5))^2 + (-1)$
			d = -5 | e = -1
			Scheitelpunkt S(-5|-1)
		Streckfaktor a = -2	
	a = -2 < 0		a = -2 < -1
	Parabel ist nach unten geöffnet.		Parabel ist enger/schmaler als eine Normalparabel.

Insgesamt liegt eine nach unten geöffnete, im Vergleich zu einer Normalparabel engere/schmalere allgemeine Parabel mit Scheitelpunkt S(-5|-1) und Streckfaktor a = -2 vor.

9. Graphen: Wertetabellen:

x	-8,5	-8	-7,5	-7	-6,5	-6	-5,5	-5
$y=2(x+1)^2-4$								
$y=0,5(x-2)^2+1$								
$y=-0,5(x-4)^2+3$								
$y= 1,5(x+5,5)^2-6$	7,5	3,375	0	-2,625	-4,5	-5,625	-6 Scheitel	-5,625

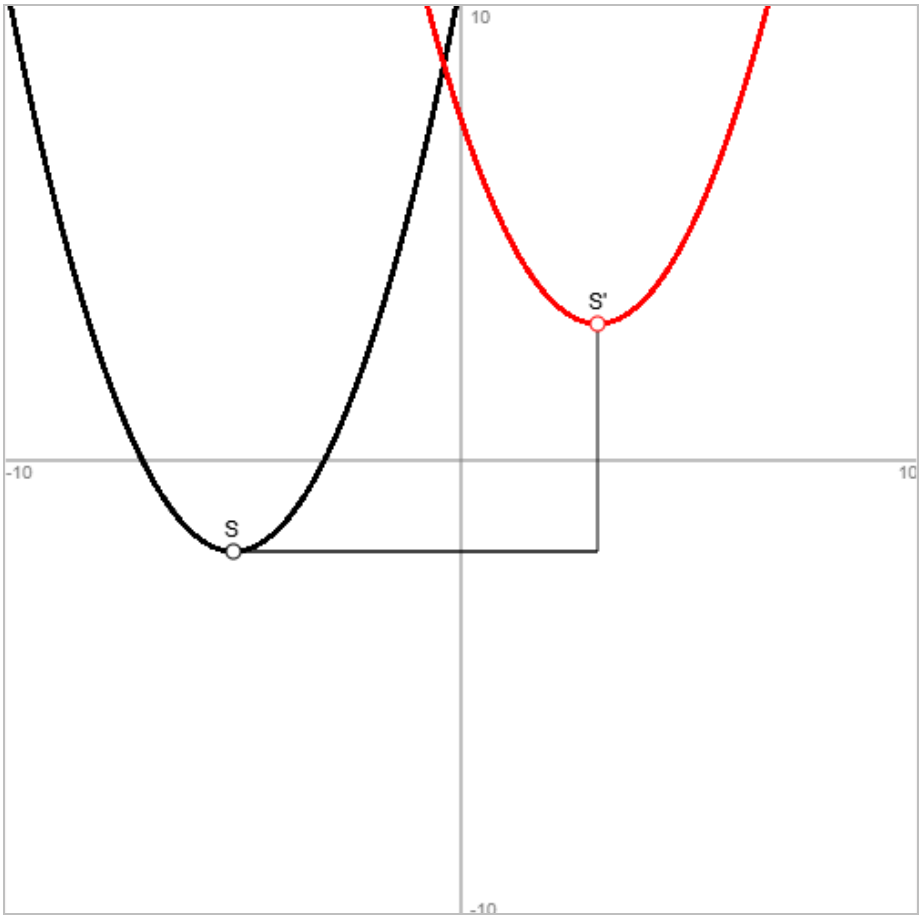
x	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1
$y=2(x+1)^2-4$		14	8,5	4	0,5	-2	-3,5	-4 Scheitel
$y=0,5(x-2)^2+1$								5,5
$y=-0,5(x-4)^2+3$								
$y= 1,5(x+5,5)^2-6$	-4,5	-2,625	0	3,375	7,5			

x	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y=2(x+1)^2-4$	-3,5	-2	0,5	4	8,5	14		
$y=0,5(x-2)^2+1$	4,125	3	2,125	1,5	1,125	1 Scheitel	1,125	1,5
$y=-0,5(x-4)^2+3$				-1,5	-0,125	1	1,875	2,5
$y= 1,5(x+5,5)^2-6$								

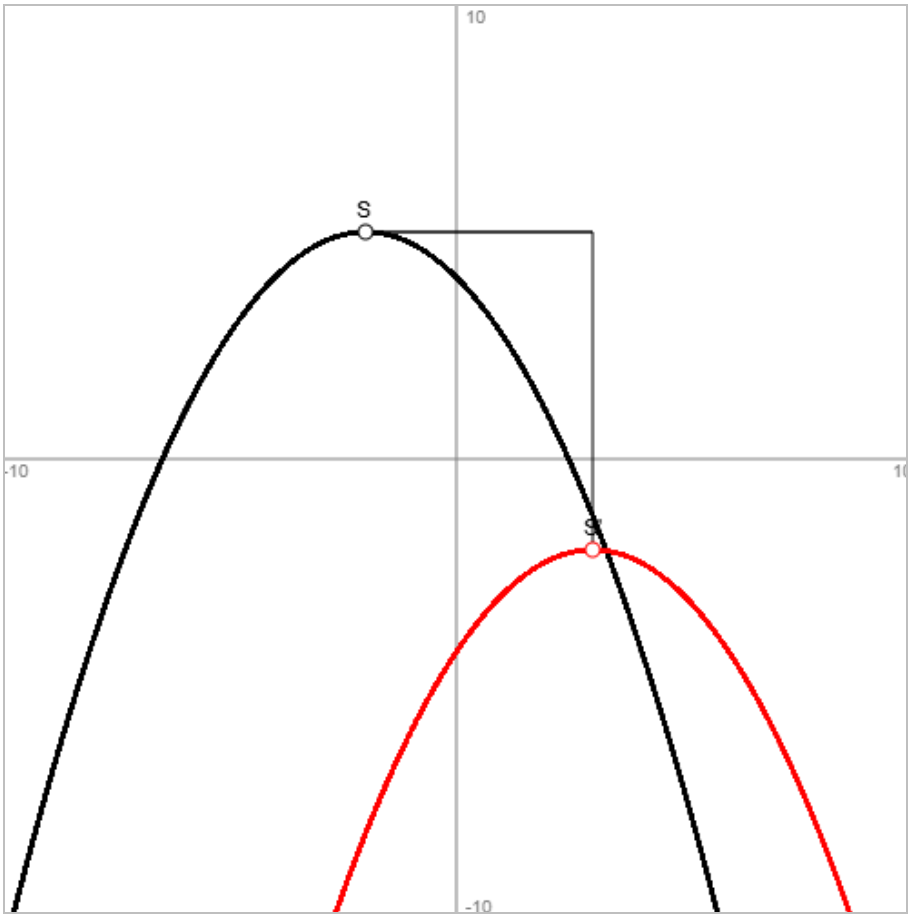
x	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
$y=2(x+1)^2-4$								
$y=0,5(x-2)^2+1$	2,125	3	4,125	5,5				
$y=-0,5(x-4)^2+3$	2,875	3 Scheitel	2,875	2,5	1,875	1	-0,125	-1,5
$y= 1,5(x+5,5)^2-6$								

Graphen:

10. Zuordnungen: p_1 – D, p_2 – B, p_3 – C, p_4 – F, p_5 – E, p_6 – A. – 11. Parabel $y = 0{,}5(x+5)^2-2$ -> Verschiebung um 8 nach rechts, 5 nach oben -> $y = 0{,}5(x-3)^2+3$; Graphen:



12. Parabel $y = -0{,}25(x+2)^2+5$ -> Verschiebung um 5 nach rechts, 7 nach unten -> $y = -0{,}25(x-3)^2-2$; Graphen:



13a) P(-1|4), p: $y = x^2+3$ -> Punktprobe -> $4 = (-1)^2+3 = 1+3 = 4$ -> Punkt P liegt auf Parabel p;
b) P(2|-10), p: $y = -2x^2-2$ -> Punktprobe -> $-10 = -2 \cdot 2^2-2 = -8-2 = -10$ -> Punkt P liegt auf Parabel p;
c) P(-4|-8), p: $y = -0,5(x-1)^2+3,5$ -> Punktprobe -> $-8 \neq -0,5 \cdot (-4-1)^2+3,5 = -0,5 \cdot 25+3,5 = -12,5+3,5 = -9$ -> Punkt P liegt nicht auf Parabel p;
d) P(3|1), p: $y = 0,25(x+3)^2-8$ -> Punktprobe -> $1 = 0,25(3+3)^2-8 = 0,25 \cdot 36-8 = 9-8 = 1$ -> Punkt P liegt auf Parabel p.

14. Punktprobe -> Zuordnungen: A – p_2, B – p_6, C – p_1, D – p_5, E – p_4, F – p_3. – 15. A: $y = -0,5x^2$, B: $y = -0,5(x-5)^2$, C: $y = -0,5(x-3)^2-4$, D: $y = -0,5(x+2)^2-8$, E: $y = -0,5(x-6)^2+6$.

(Abkürzung: LE = Längeneinheit)