Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Geraden, Parabeln I

Einleitung: Geraden sind (als ganz rationale Funktionen 1. Grades, lineare Funktionen) von der Form: y = mx + c mit Geradensteigung m und y-Achsenabschnitt c, m, c reell (Funktionsgleichung, Geradenterm). Geraden besitzen (bei x=0) den y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|c)$ und (bei m≠0, y=0) die Nullstelle N(-c/m|0) als Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems. Der Steigungswinkel einer Geraden errechnet sich aus: $\tan\varphi = |m| \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}|m|$. Die Geradensteigung errechnet sich aus zwei Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ mit dem Differenzenquotienten als: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Geraden vom Typ y = mx (c = 0) heißen Ursprungsgeraden (als proportionale Funktionen). Die Ursprungsgerade y = x ist die 1. Winkelhalbierende, die Ursprungsgerade y = -x die 2. Winkelhalbierende.

Normalparabeln sind quadratische Funktionen von der Form: $y = x^2 + bx + c$ (Normalform), $y = (x–d)^2 + e$ (Scheitelform) mit reellen Zahlen b, c, e, dem Scheitelpunkt S(d|e) und den Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. Von der Scheitel- zur Normalform einer Parabelgleichung gelangt man durch Anwenden der binomischen Formeln: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ bzw. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, von der Normal- zur Scheitelform durch die quadratische Ergänzung, also der Addition und Subtraktion des Quadrats von b/2 : $y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + (b/2)^2 + c - (b/2)^2 = (x+b/2)^2 + c - (b/2)^2$ mit Scheitelpunkt $S(-b/2|c-(b/2)^2)$. Eine spezielle allgemeine Parabel besitzt die Form $y = ax^2 + c$ mit Scheitel S(0|c) (auf der y-Achse); sie ist nach oben geöffnet, wenn a>0, nach unten geöffnet, wenn a<0; für a=-1 ergibt sich eine nach unten geöffnete Normalparabel. Ist -1<a<1, so ist die Parabel gestaucht, ist a<-1 oder a>1, so ist die Parabel gestreckt im Vergleich zur nach oben geöffneten Normalparabel $y = x^2$.

Die Schnittpunkte von Geraden und Parabeln mit den Achsen des Koordinatensystems bestimmen sich mit: a) Schnittpunkt mit der y-Achse: x=0 => y = c (Gerade, Parabel) -> y-Achsenabschnittspunkt S_y; b) Schnittpunkte mit der x-Achse als Nullstellen: y = 0 -> $N(x_0|0)$ (Gerade; auch keine Nullstelle ist möglich), $N(x_1|0)$, $N(x_2|0)$ (Parabel; auch keine oder eine Nullstelle sind möglich).
Schnittpunkte zwischen zwei Geraden, einer Geraden und einer Parabel bzw. zwischen zwei Parabeln ergeben sich aus dem Gleichsetzen der jeweiligen Geraden- bzw. Parabelgleichungen: y = y. Die Gleichungen sind nach x umzustellen.

Der Abstand zwischen zwei (Scheitel-, Schnitt-) Punkten $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ (oder ähnlich) berechnet sich als: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$ (Satz des Pythagoras).

Für lineare Gleichungen vom Typ ax + b = c ergibt sich als Lösung: x = (c-b)/a. Für rein quadratische Gleichungen gilt die Umformung: $ax^2 + b = c \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{b-c}{a}}$. Für gemischt quadratische Gleichungen gilt die b-c-Formel: $x^2 + bx + c \Leftrightarrow$ $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.

Aufgabe 1: Zeige, dass der Scheitelpunkt S der Parabel p: $y = x^2 + 6x + 5$ auf der Geraden g: y = x – 1 liegt.

Aufgabe 2: Bestimme die Nullstellen N_1, N_2 der Parabel p: $y = (x-4)^2 – 9$.

Aufgabe 3: Die allgemeine Parabel p: $y = ax^2 + c$ besitzt den Scheitelpunkt S(0|5); der Punkt A(4|3) liegt auf der Parabelkurve. Bestimme die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4: Zeige, dass die Gerade g: $y = -\frac{1}{2}x + 4$ und die Parabel p: $y = x^2 – x + 1$ sich im Punkt P(2|3) schneiden. Bestimme den zweiten Schnittpunkt Q von Gerade und Parabel.

Aufgabe 5: Der Punkt A(-2|-5) liegt auf der Parabel p: $y = x^2 + bx + 3$. Bestimme die Funktionsgleichung und den Scheitelpunkt S.

Aufgabe 6: Von den zwei nachstehenden Wertetabellen gehört eine zu einer Geraden g, die andere zu einer Parabel p:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1,5	-1	-2,5	-3	-2,5	-1	1,5

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-2	-1	0	1	2	3	4

Bestimme die Geraden- und die Parabelgleichung. Berechne die Schnittpunkte zwischen Gerade und Parabel.

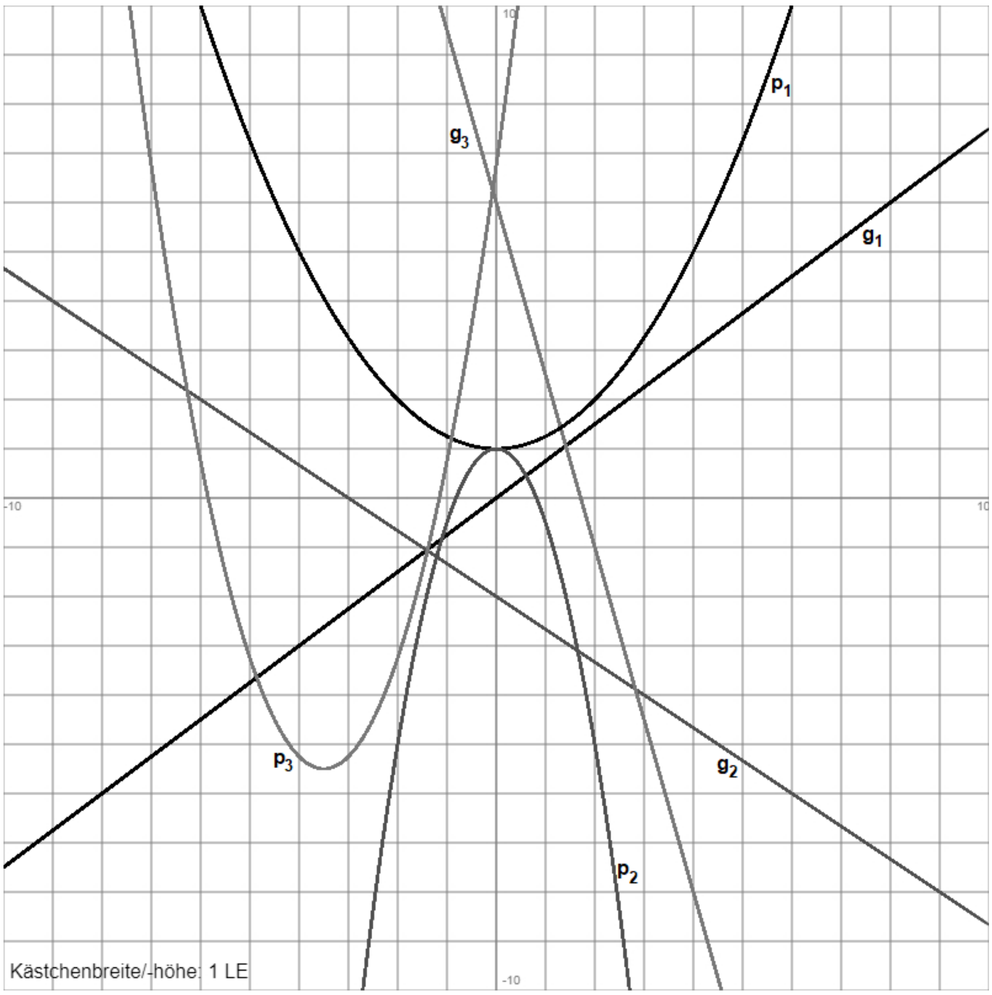
Aufgabe 7: Ergänze die nachstehende Wertetabelle einer verschobenen Normalparabel p:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y			1		-3		1

Aufgabe 8: Bestimme den Abstand zwischen dem Scheitelpunkt und den Nullstellen der verschobenen Normalparabel p: $y = x^2 + 4x - 5$.

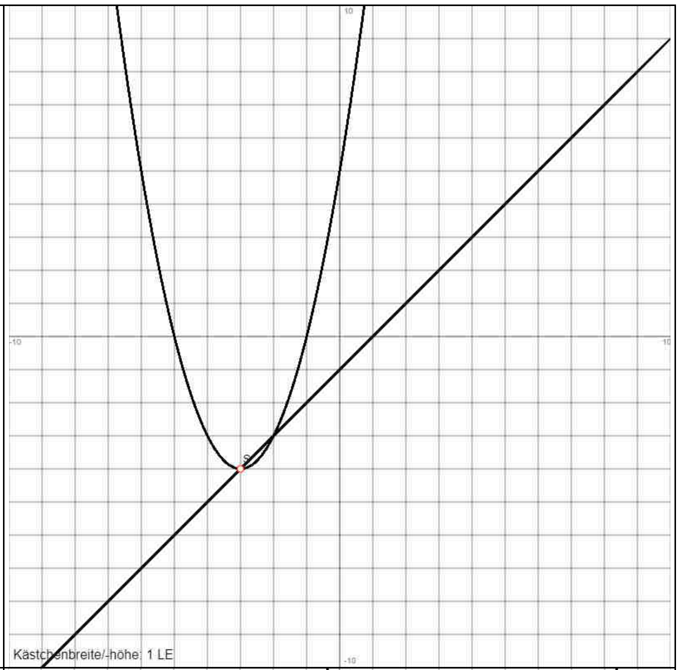
Aufgabe 9: Eine nach unten geöffnete Normalparabel p_1 mit Scheitelpunkt $S_1(0|4)$ schneidet eine verschobene Normalparabel p_2 mit Scheitelpunkt $S_2(-1|-9)$ in den Schnittpunkten P und Q. Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte.

Aufgabe 10: Bestimme die Geraden- und Parabelgleichungen:



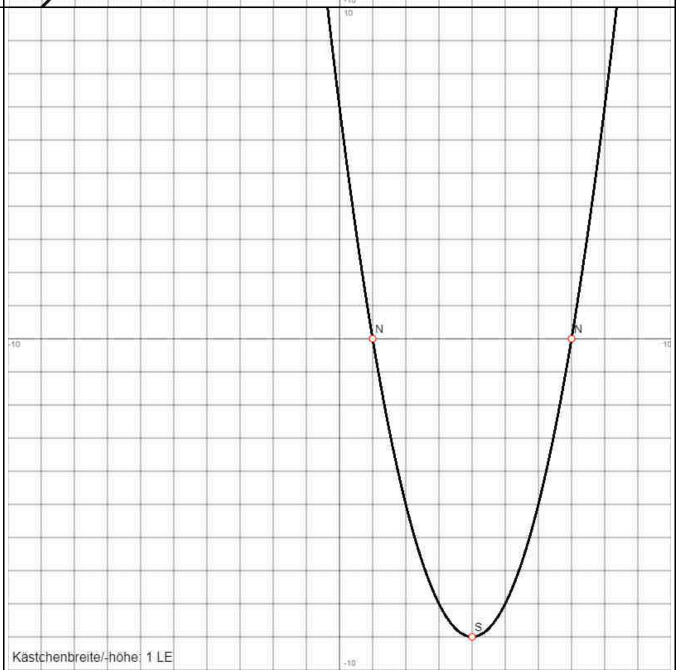
Aufgabe 1: Lösung:

Scheitelpunkt der Parabel: S(-3|-4)
Punktprobe:g: $y = x-1$ -> $-4 = -3-1 = -4$ -> Scheitelpunkt auf Gerade



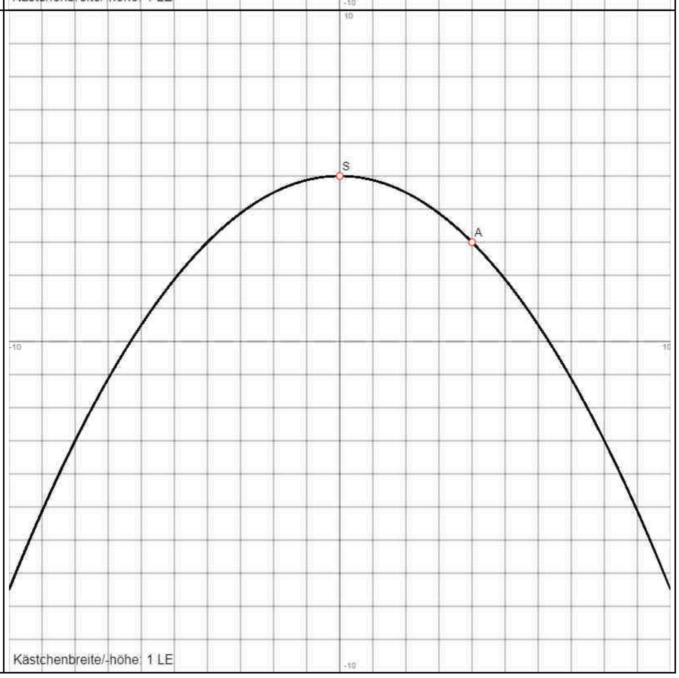
Aufgabe 2: Lösung:

Parabelgleichung: p: $y = x^2 - 8x + 7$
Nullstellen: $N_1(1|0)$, $N_2(7|0)$



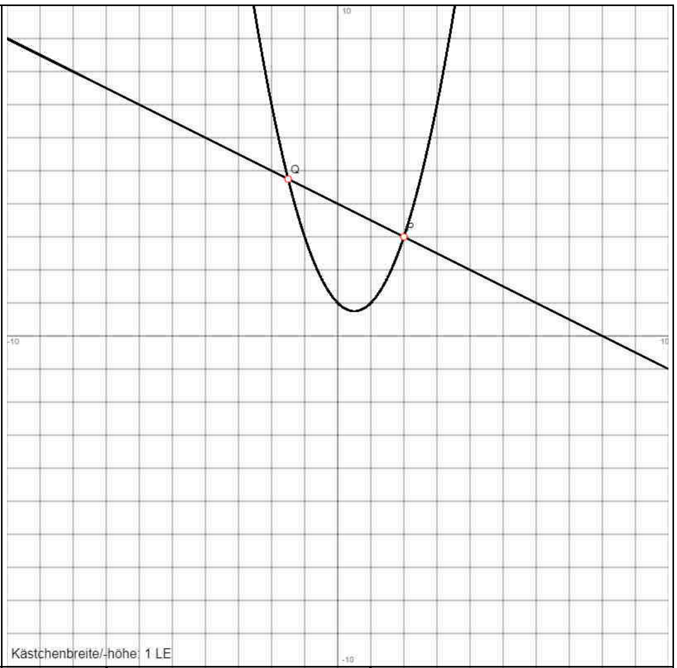
Aufgabe 3: Lösung:

Parabelbestimmung: S(0|5) -> c = 5, A(4|3) -> a = -0,125
-> p: $y = -0{,}125x^2 + 5$



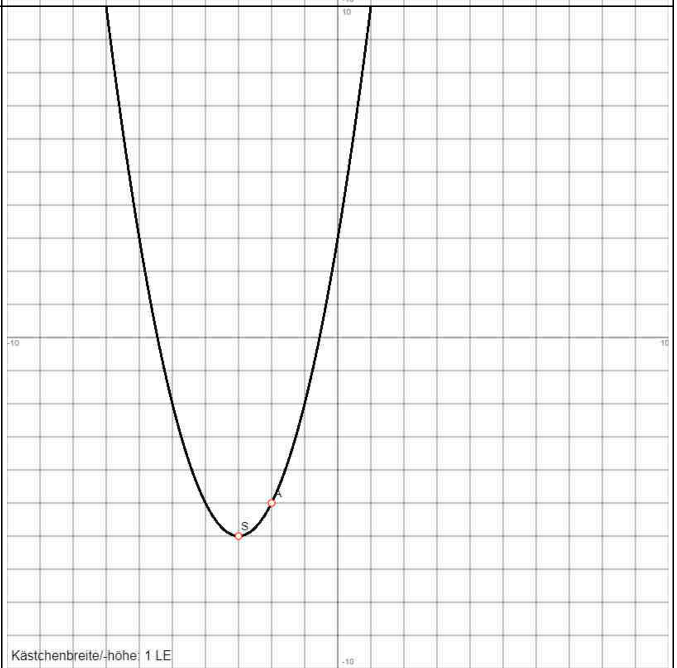
Aufgabe 4: Lösung:

Schnittpunkt Gerade g-Parabel p: P(2|3) <- Punktprobe
Schnittpunkt Gerade g-Parabel p: Q(-1,5|4,75)



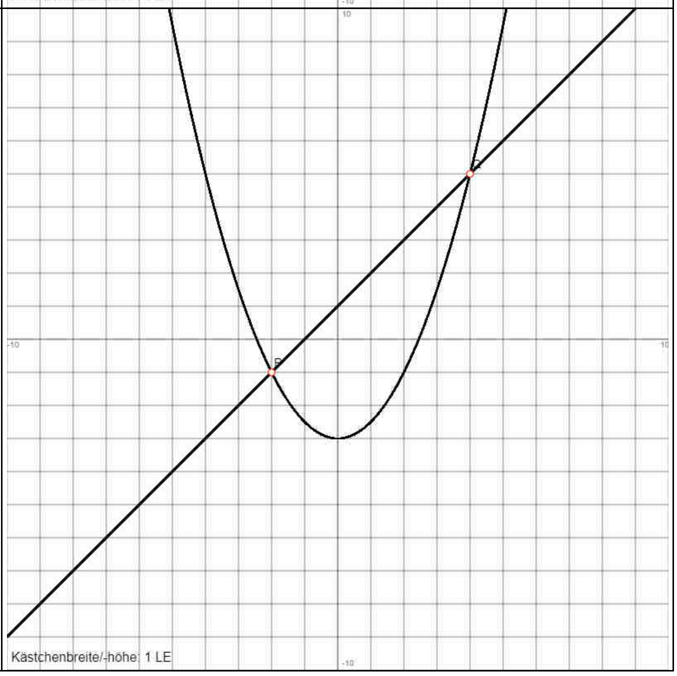
Aufgabe 5: Lösung:

Parabelbestimmung: A(-2|-5) -> b = 6 -> p: $y = x^2 + 6x + 3$
Scheitelpunkt der Parabel: S(-3|-6)



Aufgabe 6: Lösung:

Tabelle 1: Parabel p: $y = 0,5x^2 – 3$
Tabelle 2: Gerade g: y = x + 1
Schnittpunkte Gerade g-Parabel p: P(-2|-1), Q(4|5)



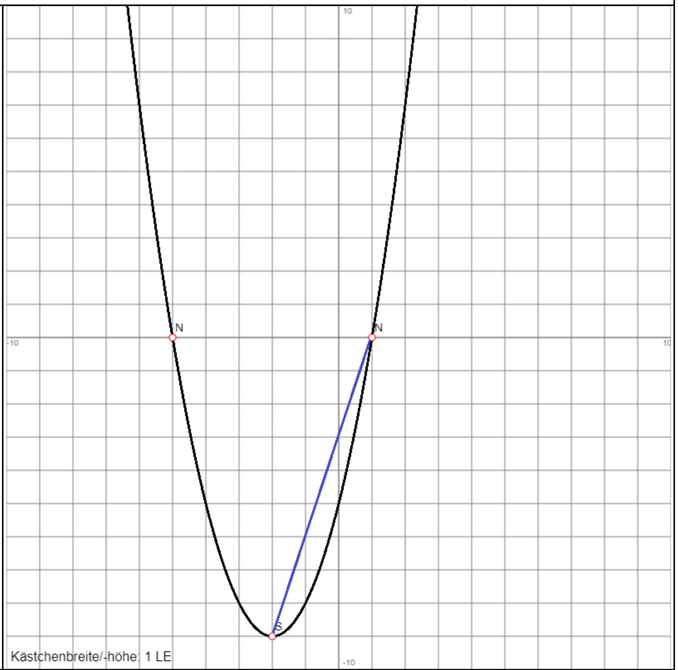
Aufgabe 7: Lösung:

Scheitelpunkt der Parabel: S(1|-3) ->
Parabelgleichung: p: $y = (x-1)^2 - 3 = x^2 - 2x - 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	13	6	1	-2	-3	-2	1

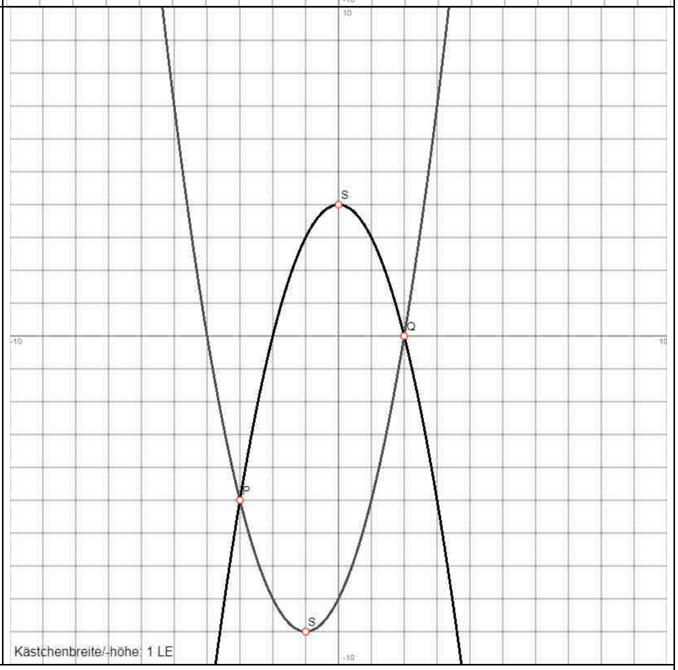
Aufgabe 8: Lösung:

Parabelgleichung: p: $y = x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 9$ ->
Scheitelpunkt S(-2|-9)
Nullstellen: $N_1(-5|0)$, $N_2(1|0)$
Abstand $\overline{SN_1} = \overline{SN_2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (0-(-9))^2}$ =
$\sqrt{90}$ = 9,5 LE (Längeneinheiten)



Aufgabe 9: Lösung:

Parabelgleichung: p_1: $y = -x^2 + 4$
Parabelgleichung: p_2: $y = x^2 + 2x - 8$
Schnittpunkte Parabel p_1-Parabel p_2: P(-3|-5), Q(2|0)



Aufgabe 10: Lösung:

Gerade g_1: $y = 0{,}75x$, Gerade g_2: $y = -2x/3 - 2$, Gerade g_3: $y = -3{,}5x + 6$
Parabel p_1: $y = 0{,}25x^2 + 1$, Parabel p_2: $y = -1{,}5x^2 + 1$, Parabel p_3: $y = x^2 + 7x + 6{,}75$

Abkürzung: LE = Längeneinheiten.