

Mathematik-Aufgabenpool

> Quadratische Gleichungen (p-q-Formel) I

Einleitung: Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Quadratische Gleichungen sind innerhalb der mathematischen Algebra Gleichungen mit der Variablen x, die letztlich der Form: $ax^2 + bx + c = 0$ mit reellen Zahlen a, b, c genügen. Ist $b=0$, so liegt eine rein quadratische Gleichung vor, ansonsten eine gemischt quadratische.

a) Bei einer rein quadratischen Gleichung ergeben sich als (keine bis zwei) Lösungen: $ax^2+c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

b) Bei einer gemischt quadratischen Gleichung (mit Koeffizient vor x^2 als 1) ergeben sich als (keine bis zwei) Lösungen:

$$x^2+px+q = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (\text{p-q-Formel}).$$

Komplexere quadratische Gleichungen sind dann durch Term- (Auflösen von Klammern, binomische Formeln; Zusammenfassen von x^2 , x und Zahlen) und Gleichungsumformungen (Addition, Subtraktion von Summanden; Division, Multiplikation von Faktoren) auf die vorerwähnten Grundformen der rein oder gemischt quadratischen Gleichung zu bringen, so dass die oben genannten Vorgehensweisen greifen.

Aufgabe 1: Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 = 289$

b) $x^2 - 64 = 0$

c) $2x^2 = 72$

d) $4x^2 - 9 = 0$

e) $0,5x^2 - 6 = 2$

f) $16x^2 = -\frac{9}{4}$

g) $0,25x^2 + 8 = 8 - 0,75x^2$

h) $2x^2 + \frac{3}{2} = 2$

i) $\frac{2}{3}x^2 - 5 = \frac{14}{3}x^2 - 30$

j) $3(x^2-1) = 0,5(106-x^2)$

k) $\frac{4}{5}x(x-5) = \frac{7}{6}x^2 - 4x$

l) $5x^2 + 3 = 2(x^2+39)$

m) $8(x^2-2x) = -2(x^2+8x) + 1000$

n) $-\frac{5}{4}x^2 = \frac{2}{5}(x^2+10)$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der rein quadratischen Gleichungen ist die Gleichung nach x^2 umzustellen und dann die Wurzel zu ziehen.

Lösungen: L =: a) $\{-17; 17\}$; b) $\{-8; 8\}$; c) $\{-6; 6\}$; d) $\{-1,5; 1,5\}$; e) $\{-4; 4\}$; f) $\{\}$; g) $\{0\}$; h) $\{-0,5; 0,5\}$; i) $\{-2,5; 2,5\}$; j) $\{-4; 4\}$, k) $\{0\}$; l) $\{-5; 5\}$; m) $\{-10; 10\}$; n) $\{\}$.

Aufgabe 2: Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 - 2x - 35 = 0$

b) $x^2 + x - 6 = 0$

c) $x^2 + 3x - 40 = 0$

d) $x^2 + 4x = 0$

e) $x^2 - 5x - 24 = 0$

f) $x^2 + 2x + 10 = 0$

g) $x^2 - 10x - 39 = 0$

h) $x^2 - 9x + 18 = 0$

i) $x^2 + 8x + 16 = 0$

j) $x^2 + 9x + 20 = 0$

k) $x^2 - 10x + 25 = 0$

l) $x^2 + 4x - 21 = 0$

m) $x^2 - 7x = 0$

n) $x^2 + 6x + 8 = 0$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der gemischt quadratischen Gleichungen ist die p-q-Formel zu verwenden.

Lösungen: L =: a) {-5; 7}; b) {-3; 2}; c) {-8; 5}; d) {-4; 0}; e) {-3; 8}; f) {}; g) {-3; 13}; h) {3; 6}; i) {-4}; j) {-5; -4}; k) {-5}; l) {-7; 3}; m) {0; 7}; n) {-4; -2}.

Aufgabe 3: Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $3x^2 + 36x - 84 = 0$

b) $x^2 - 34x - 72 = 0$

c) $2x^2 + 25x - 93 = 0$

d) $-2x^2 + 46x - 84 = 0$

e) $-x^2 - 28x - 96 = 0$

f) $-4x^2 + 32x - 64 = 0$

g) $5x^2 + 34x - 99 = 0$

h) $3x^2 + 44x - 100 = 0$

i) $-7x^2 + x = 0$

j) $-x^2 + 49x - 94 = 0$

k) $9x^2 + 5x = 0$

l) $6x^2 - 25x - 100 = 0$

m) $4x^2 - 34x - 84 = 0$

n) $5x^2 + 44x - 60 = 0$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der gemischt quadratischen Gleichungen ist zunächst durch den Koeffizienten vor dem x^2 zu teilen und dann die p-q-Formel anzuwenden.

Lösungen: L =: a) {-14; 2}; b) {-2; 36}; c) {-15,5; 3}; d) {2; 21}; e) {-24; -4}; f) {-4}; g) {-9; 11/5}; h) {-50/3; 2}; i) {0; 1/7}; j) {2; 47}; k) {-5/9; 0}; l) {-2,5; 20/3}; m) {-2; 10,5}; n) {-10; 6/5}.

Aufgabe 4: Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 - 44x - 92 = 0$

b) $9x^2 + 15x - 84 = 0$

c) $6x^2 - 150 = 0$

d) $x^2 - 13x = 90$

e) $4x^2 + 4x = 99$

f) $-33x - 30 = 9x^2$

g) $x^2 = 28x - 96$

h) $8x^2 - 8x - 96 = 0$

i) $-8x^2 = x$

j) $5(x^2 - x) = 100$

k) $4(x^2 - 81) = 0$

l) $4x^2 - 2x = 0$

m) $7x^2 + 44x - 96 = 0$

n) $x^2 - 88 = 18x$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der reinen oder gemischt quadratischen Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen: L =: a) {-2; 46}; b) {-4; 7/3}; c) {-5; 5}; d) {-5; 18}; e) {-5,5; 4,5}; f) {-2; -5/3}; g) {4; 24}; h) {-3; 4}; i) {-1/8; 0}; j) {-4; 5}; k) {-9; 9}; l) {0; 0,5}; m) {-8; 12/7}; n) {-4; 22}.

Aufgabe 5: Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{1}{4} = 0$

b) $-9x^2 + 18x - 9 = 0$

c) $x^2 - \frac{40}{3}x + \frac{100}{3} = 0$

d) $x(3x - 11) = 92$

e) $x^2 + 2,8x = 0,6$

f) $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{12} = 0$

g) $2x^2 = 1 + \frac{24}{5}x$

h) $12x^2 - 11x + 2 = 0$

i) $\frac{25}{9}x^2 = \frac{64}{121}$

j) $8x^2 + 39x - 54 = 0$

k) $x^2 - 2,8x - 9,6 = 0$

l) $\frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4}x = 21$

$$m) -7x^2 = -5x$$

$$n) \frac{1}{3}x(38-x) = 24$$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der reinen oder gemischt quadratischen Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen: L =: a) $\{-3/4; 1/3\}$; b) $\{1\}$; c) $\{-5; 5\}$; d) $\{-4; 23/3\}$; e) $\{-3; 0,2\}$; f) $\{-0,5; 5/6\}$; g) $\{-2,5; 0,2\}$; h) $\{1/4; 2/3\}$; i) $\{-24/55; 24/55\}$; j) $\{-6; 9/8\}$; k) $\{-2; 4,8\}$; l) $\{-28/9; 3\}$; m) $\{0; 5/7\}$; n) $\{2; 36\}$.

Aufgabe 6: Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

$$a) x^2 + 39x - 82 = 0$$

$$b) 9x^2 - 100 = 0$$

$$c) 5x^2 - 32x - 84 = 0$$

$$d) x^2 + 3x = 88$$

$$e) x = \frac{9}{5}x^2$$

$$f) x = 84 - 9x^2$$

$$g) 6x^2 + 12x - 90 = 0$$

$$h) \frac{1}{6}(9x-3) = x^2$$

$$i) x^2 + \frac{17}{6}x - \frac{44}{3} = 0$$

$$j) 7x^2 = 6x + 88$$

$$k) 9x^2 - 98 = 49x$$

$$l) x^2 + \frac{31}{4}x = 22,5$$

$$m) -3x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$n) -6x(x-1,5) = 3$$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der reinen oder gemischt quadratischen Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen: L =: a) $\{-41; 2\}$; b) $\{-10/3; 10/3\}$; c) $\{-2; 8,4\}$; d) $\{-11; 8\}$; e) $\{0; 5/9\}$; f) $\{-28/9; 3\}$; g) $\{-5; 3\}$; h) $\{0,5; 1\}$; i) $\{-5,5; 8/3\}$; j) $\{-22/7; 4\}$; k) $\{-14/9; 7\}$; l) $\{-10; 9/4\}$; m) $\{1/3; 1\}$; n) $\{0,5; 1\}$.

Aufgabe 7: Berechne die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

$$a) 3x^2 + 10x - 88 = -5x^2 - 18x$$

$$b) 11x^2 + 10x - 35 = 4x^2 + 41x + 55$$

$$c) 3x(x-1) - 100 = -7x^2 - 1$$

$$d) 23(1-x) = 2(4x^2+19)$$

$$e) 5x(x+10) - 60 = 2x^2 + 13(x+2)$$

$$f) -3x(x-1) = x(3x-4)$$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der quadratischen Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen: L =: a) $\{-5,5; 2\}$; b) $\{-2; 45/7\}$; c) $\{-3; 3,3\}$; d) $\{-15/8; -1\}$; e) $\{-43/3; 2\}$; f) $\{0,5; 2/3\}$.

Aufgabe 8: Berechne die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

$$a) 2x^2 - 10x + 11 = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + 60$$

$$b) (x-1)(x-4) = x^2 + 3x + 12$$

$$c) \frac{5}{3}x(x-2) = x\left(\frac{5}{3}x+1\right) + \frac{7}{6}$$

$$d) (x+5)(2x+3) = 30$$

$$e) x^2 - 3x = \frac{1}{2}(x-3)^2$$

$$f) x^2 + \frac{11}{3}x + 17\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(x^2 - 40x)$$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der quadratischen Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen: L =: a) {-2; 7}; b) {-1}; c) {7/26}; d) {-7,5; 1}; e) {-3; 3}; f) {3,25; 4}.

Aufgabe 9: Löse die quadratische Gleichung:

$$x(1-5x) = -x^2 + 10x - 9$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x(1-5x) &= -x^2 + 10x - 9 && \text{(Klammern auflösen)} \\ x - 5x^2 &= -x^2 + 10x - 9 && | + 5x^2 \\ x &= 4x^2 + 10x - 9 && | -x \\ 0 &= 4x^2 + 9x - 9 && | :4 \\ 0 &= x^2 + 2,25x - 2,25 && \text{(p-q-Formel: } p = 2,25, q = -2,25) \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = -1,125 \pm \sqrt{1,125^2 + 2,25} = -1,125 \pm \sqrt{\frac{225}{64}} = -1,125 \pm \frac{15}{8}$$

$$x_1 = -1,125 + 1,875 = 0,75, x_2 = -1,125 - 1,875 = -3 \quad \text{Lösungsmenge: } L = \{-3; 0,75\}$$

Aufgabe 10: Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$x(x+2) - 10x + 12 = 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x(x+2) - 10x + 12 &= 0 && \text{(Klammern auflösen)} \\ x^2 + 2x - 10x + 12 &= 0 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\ x^2 - 8x + 12 &= 0 && \text{(p-q-Formel: } p = -8, q = 12) \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 12} = 4 \pm \sqrt{4} = 4 \pm 2$$

$$x_1 = 4+2 = 6, x_2 = 4-2 = 2 \quad \text{Lösungsmenge: } L = \{2; 6\}$$

Aufgabe 11: Bestimme die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung:

$$4x(1+2x) - 62 = x(x+4) + 50$$

Lösung:

$$\begin{aligned} 4x(1+2x) - 62 &= x(x+4) + 50 && \text{(Klammern auflösen)} \\ 4x + 8x^2 - 62 &= x^2 + 4x + 50 && \text{(Ordnen)} \\ 8x^2 + 4x - 62 &= x^2 + 4x + 50 && | -x^2 \\ 7x^2 + 4x - 62 &= 4x + 50 && | -4x \\ 7x^2 - 62 &= 50 && | +62 \\ 7x^2 &= 112 && | :7 \\ x^2 &= 16 && | \sqrt{\quad} \\ x &= \pm 4 && \text{Lösungsmenge: } L = \{-4; 4\} \end{aligned}$$

Aufgabe 12: Löse die quadratische Gleichung:

$$x(x+2) + 10 = -6(x+1)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x(x+2) + 10 &= -6(x+1) && \text{(Klammern auflösen)} \\ x^2 + 2x + 10 &= -6x - 6 && | +6x \\ x^2 + 8x + 10 &= -6 && | +6 \\ x^2 + 8x + 16 &= 0 && \text{(p-q-Formel: } p = 8, q = 16) \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{4^2 - 16} = -4 \pm \sqrt{0} = -4 \pm 0 = -4$$

$$x = -4 \quad \text{Lösungsmenge: } L = \{-4\}$$

Aufgabe 13: Bestimme die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung:

$$(2x-5)(x+3) = 121$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
(2x-5)(x+3) &= 121 && \text{(Klammern auflösen)} \\
2x^2 + 6x - 5x - 15 &= 121 && \text{(Zusammenfassen)} \\
2x^2 + x - 15 &= 121 && | -121 \\
2x^2 + x - 136 &= 0 && | :2 \\
x^2 + 0,5x - 68 &= 0 && \text{(p-q-Formel: } p = 0,5, q = -68) \\
x_{1,2} &= -0,25 \pm \sqrt{0,25^2 + 68} = -0,25 \pm \sqrt{68,0625} = -0,25 \pm 8,25 \\
x_1 &= -0,25 + 8,25 = 8, \quad x_2 = -0,25 - 8,25 = -8,5 && \text{Lösungsmenge: } L = \{-8,5, 8\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 14: Löse die quadratische Gleichung:

$$(x+2)(x+5) = x^2 + 11x - 9$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
(x+2)(x+5) &= x^2 + 11x - 9 && \text{(Klammern auflösen)} \\
x^2 + 5x + 2x + 10 &= x^2 + 11x - 9 && \text{(Zusammenfassen)} \\
x^2 + 7x + 10 &= x^2 + 11x - 9 && | -x^2 \\
7x + 10 &= 11x - 9 && | -7x \\
10 &= 4x - 9 && | +9 \\
19 &= 4x && | :4 \\
x &= 19/4 && \text{Lösungsmenge: } L = \{19/4\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 15: Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$(2x-4)(x+6) = (8x-1)(x-3)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
(2x-4)(x+6) &= (8x-1)(x-3) && \text{(Klammern auflösen)} \\
2x^2 + 12x - 4x - 24 &= 8x^2 - 24x - x + 3 && \text{(Zusammenfassen)} \\
2x^2 + 8x - 24 &= 8x^2 - 25x + 3 && | -2x^2 \\
8x - 24 &= 6x^2 - 25x + 3 && | -2x \\
-24 &= 6x^2 - 33x + 3 && | +24 \\
0 &= 6x^2 - 33x + 27 && | :6 \\
0 &= x^2 - 5,5x + 4,5 && \text{(p-q-Formel: } p = -5,5, q = 4,5) \\
x_{1,2} &= 2,75 \pm \sqrt{2,75^2 - 4,5} = 2,75 \pm \sqrt{3,0625} = 2,75 \pm 1,75 \\
x_1 &= 2,75 + 1,75 = 4,5, \quad x_2 = 2,75 - 1,75 = 1 && \text{Lösungsmenge: } L = \{1; 4,5\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 16: Löse die quadratische Gleichung:

$$(x+3)(2x+1) - 2(x-1)(x-4) = 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
(x+3)(2x+1) - 2(x-1)(x-4) &= 0 && \text{(Klammern auflösen)} \\
(2x^2 + x + 6x + 3) - 2(x^2 - 4x - x + 4) &= 0 && \text{(Zusammenfassen)} \\
(2x^2 + 7x + 3) - 2(x^2 - 5x + 4) &= 0 && \text{(Klammern auflösen)} \\
2x^2 + 7x + 3 - 2x^2 + 10x - 8 &= 0 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\
17x - 5 &= 0 && | +5 \\
17x &= 5 && | :17 \\
x &= 5/17 && \text{Lösungsmenge: } L = \{5/17\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 17: Bestimme die Lösungen:

$$4(x^2+3) - 47x - 42 = (2x+5)(4-3x)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
4(x^2+3) - 47x - 42 &= (2x+5)(4-3x) && \text{(Klammern auflösen)} \\
4x^2 + 12 - 47x - 42 &= 8x - 6x^2 + 20 - 15x && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\
4x^2 - 47x - 30 &= -6x^2 - 7x + 20 && | +6x^2 \\
10x^2 - 47x - 30 &= -7x + 20 && | +7x \\
10x^2 - 40x - 30 &= 20 && | -20 \\
10x^2 - 40x - 50 &= 0 && | :10 \\
x^2 - 4x - 5 &= 0 && \text{(p-q-Formel: } p = -4, q = -5) \\
x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 + 5} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3 \\
x_1 &= 2 + 3 = 5, \quad x_2 = 2 - 3 = -1 && \text{Lösungsmenge: } L = \{-1; 5\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 18: Löse die quadratische Gleichung:

$$(x-5)(x+2) + (x+4)x = (x-2)(x-3) + 4x - 8$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (x-5)(x+2) + (x+4)x &= (x-2)(x-3) + 4x - 8 && \text{(Klammern auflösen)} \\ x^2 + 2x - 5x - 10 + x^2 + 4x &= x^2 - 3x - 2x + 6 + 4x - 8 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\ 2x^2 + x - 10 &= x^2 - x - 2 && | -x^2 \\ x^2 + x - 10 &= -x - 2 && | +x \\ x^2 + 2x - 10 &= -2 && | +2 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 && \text{(p-q-Formel: } p = 2, q = -8) \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 8} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3$$

$$x_1 = -1 + 3 = 2, x_2 = -1 - 3 = -4 \quad \text{Lösungsmenge: } L = \{-4; 2\}$$

Aufgabe 19: Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$2(x-2)^2 = 3(x+1)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} 2(x-2)^2 &= 3(x+1) && \text{(Klammern auflösen, 2. binomische Formel)} \\ 2(x^2 - 4x + 4) &= 3x + 3 && \text{(Klammern auflösen)} \\ 2x^2 - 8x + 8 &= 3x + 3 && | -3x \\ 2x^2 - 11x + 8 &= 3 && | -3 \\ 2x^2 - 11x + 5 &= 0 && | :2 \\ x^2 - 5,5x + 2,5 &= 0 && \text{(p-q-Formel: } p = -5,5, q = 2,5) \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = 2,75 \pm \sqrt{2,75^2 - 2,5} = 2,75 \pm \sqrt{5,0625} = 2,75 \pm 2,25$$

$$x_1 = 2,75 + 2,25 = 5, x_2 = 2,75 - 2,25 = 0,5 \quad \text{Lösungsmenge: } L = \{0,5, 5\}$$

Aufgabe 20: Löse die quadratische Gleichung:

$$(x+4)^2 + 2(x+3) = (x-5)^2 + 10x + 7$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (x+4)^2 + 2(x+3) &= (x-5)^2 + 10x + 7 && \text{(Klammern auflösen, 1.-2. binomische Formel)} \\ x^2 + 8x + 16 + 2x + 6 &= x^2 - 10x + 25 + 10x + 7 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\ x^2 + 10x + 22 &= x^2 + 32 && | -x^2 \\ 10x + 22 &= 32 && | -22 \\ 10x &= 10 && | :10 \\ x &= 1 && \text{Lösungsmenge: } L = \{1\} \end{aligned}$$

Aufgabe 21: Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$4(x+3)^2 - 5(x-3)^2 = 2(x-3)(x+3) + 9$$

Lösung:

$$\begin{aligned} 4(x+3)^2 - 5(x-3)^2 &= 2(x-3)(x+3) + 9 && \text{(Klammern auflösen, 1.-3. binomische Formel)} \\ 4(x^2 + 6x + 9) - 5(x^2 - 6x + 9) &= 2(x^2 - 9) + 9 && \text{(Klammern auflösen)} \\ 4x^2 + 24x + 36 - 5x^2 + 30x - 45 &= 2x^2 - 18 + 9 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\ -x^2 + 54x - 9 &= 2x^2 - 9 && | +x^2 \\ 54x - 9 &= 3x^2 - 9 && | -54x \\ -9 &= 3x^2 - 54x - 9 && | +9 \\ 0 &= 3x^2 - 54x && | :3 \\ 0 &= x^2 - 18x && \text{(p-q-Formel: } p = -18, q = 0) \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = 9 \pm \sqrt{9^2 - 0} = 9 \pm \sqrt{81} = 9 \pm 9$$

$$x_1 = 9 + 9 = 18, x_2 = 9 - 9 = 0 \quad \text{Lösungsmenge: } L = \{0; 18\}$$

Aufgabe 22: Bestimme die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung:

$$(4x+1)^2 = (3x-2)(x+8) - 4(10x-1)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (4x+1)^2 &= (3x-2)(x+8) - 4(10x-1) && \text{(Klammern auflösen, 1. binomische Formel)} \\ 16x^2 + 8x + 1 &= 3x^2 + 24x - 2x - 16 - 40x + 4 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\ 16x^2 + 8x + 1 &= 3x^2 - 18x - 12 && | -3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
13x^2 + 8x + 1 = -18x - 12 \\
13x^2 + 26x + 1 = -12 \\
13x^2 + 26x + 13 = 0 \\
x^2 + 2x + 1 = 0 \\
x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1} = -1 \pm \sqrt{0} = -1 \pm 0 = -1 \\
x = -1
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
| +18x \\
| +12 \\
| :13 \\
(p-q\text{-Formel: } p = 2, q = 1) \\
\\
\text{Lösungsmenge: } L = \{-1\}
\end{array}$$

Aufgabe 23: Bestimme die Lösungen:

$$(x+2)^2 - 3(x+4) = (x-2)(1-3x) - 8$$

Lösung:

$$\begin{array}{l}
(x+2)^2 - 3(x+4) = (x-2)(1-3x) - 8 \\
x^2 + 4x + 4 - 3x - 12 = x - 3x^2 - 2 + 6x - 8 \\
x^2 + x - 8 = -3x^2 + 7x - 10 \\
4x^2 + x - 8 = 7x - 10 \\
4x^2 - 6x - 8 = -10 \\
4x^2 - 6x + 2 = 0 \\
x^2 - 1,5x + 0,5 = 0 \\
x_{1,2} = 0,75 \pm \sqrt{0,75^2 - 0,5} = 0,75 \pm \sqrt{0,5625 - 0,5} = 0,75 \pm \sqrt{0,0625} = 0,75 \pm 0,25 \\
x_1 = 0,75 + 0,25 = 1, x_2 = 0,75 - 0,25 = 0,5 \\
\text{Lösungsmenge: } L = \{0,5; 1\}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
(\text{Klammern auflösen, 1. binomische Formel}) \\
(\text{Zusammenfassen, Ordnen}) \\
| +3x^2 \\
| -7x \\
| +10 \\
| :4 \\
(p-q\text{-Formel: } p = -1,5, q = 0,5) \\
\\
\text{Lösungsmenge: } L = \{0,5; 1\}
\end{array}$$

Aufgabe 24: Löse die quadratische Gleichung:

$$(2x-1)^2 - (3x+1)^2 = (x-4)(2x+8) + 16(3x+2)$$

Lösung:

$$\begin{array}{l}
(2x-1)^2 - (3x+1)^2 = (x-4)(2x+8) + 16(3x+2) \\
(4x^2 - 8x + 1) - (9x^2 + 6x + 1) = 2(x^2 - 16) + 48x + 32 \\
4x^2 - 8x + 1 - 9x^2 - 6x - 1 = 2x^2 - 32 + 48x + 32 \\
-5x^2 - 14x = 2x^2 + 48x \\
-14x = 7x^2 + 28x \\
0 = 7x^2 + 42x \\
0 = x^2 + 6x \\
x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 0} = 3 \pm \sqrt{3^2} = 3 \pm 3 \\
x_1 = 3+3 = 6, x_2 = 3-3 = 0 \\
\text{Lösungsmenge: } L = \{0; 6\}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
(\text{Klammern auflösen, 1.-3. binomische Formel}) \\
(\text{Klammern auflösen}) \\
(\text{Zusammenfassen, Ordnen}) \\
| +5x^2 \\
| +14x \\
| :7 \\
(p-q\text{-Formel: } p = 6, q = 0) \\
\\
\text{Lösungsmenge: } L = \{0; 6\}
\end{array}$$

Aufgabe 25: Löse die quadratische Gleichung:

$$(x+4)^2 - (x-5)^2 - (x-1)^2 = 14x - 1$$

Lösung:

$$\begin{array}{l}
(x+4)^2 - (x-5)^2 - (x-1)^2 = 14x - 1 \\
(x^2 + 8x + 16) - (x^2 - 10x + 25) - (x^2 - 2x + 1) = 14x - 1 \\
x^2 + 8x + 16 - x^2 + 10x - 25 - x^2 + 2x - 1 = 14x - 1 \\
-x^2 + 20x - 10 = 14x - 1 \\
-x^2 + 6x - 10 = -1 \\
-x^2 + 6x - 9 = 0 \\
x^2 - 6x + 9 = 0 \\
x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 9} = 3 \pm \sqrt{0} = 3 \pm 0 = 3 \\
x = 3 \\
\text{Lösungsmenge: } L = \{3\}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
(\text{Klammern auflösen, 1.-2. binomische Formel}) \\
(\text{Klammern auflösen}) \\
(\text{Zusammenfassen, Ordnen}) \\
| -14x \\
| +1 \\
| \cdot (-1) \\
(p-q\text{-Formel: } p = -6, q = 9) \\
\\
\text{Lösungsmenge: } L = \{3\}
\end{array}$$

Aufgabe 26: Bestimme die Lösungen:

$$2(x-3)^2 - 3(x-5)^2 - 4(x-7)^2 - (3x-5) = 0$$

Lösung:

$$\begin{array}{l}
2(x-3)^2 - 3(x-5)^2 - 4(x-7)^2 - (3x-5) = 0 \\
2(x^2 - 6x + 9) - 3(x^2 - 10x + 25) - 4(x^2 - 14x + 49) - 3x + 5 = 0 \\
2x^2 - 12x + 18 - 3x^2 + 30x - 75 - 4x^2 + 56x - 196 - 3x + 5 = 0 \\
-5x^2 + 71x - 248 = 0 \\
x^2 - 14,2x + 49,6 = 0 \\
x_{1,2} = 7,1 \pm \sqrt{7,1^2 - 49,6} = 0,75 \pm \sqrt{0,81} = 7,1 \pm 0,9 \\
x_1 = 7,1 + 0,9 = 8, x_2 = 7,1 - 0,9 = 6,2 \\
\text{Lösungsmenge: } L = \{6,2; 8\}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
(\text{Klammern auflösen, 1.-2. binomische Formel}) \\
(\text{Klammern auflösen}) \\
(\text{Zusammenfassen, Ordnen}) \\
| :(-5) \\
(p-q\text{-Formel: } p = -14,2, q = -49,6) \\
\\
\text{Lösungsmenge: } L = \{6,2; 8\}
\end{array}$$

Aufgabe 27: Löse die quadratische Gleichung:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{4} + \frac{(x-2)^2}{2} = \frac{(x+1)^2}{2} - 3x + \frac{21}{4}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)(x+1)}{4} + \frac{(x-2)^2}{2} &= \frac{(x+1)^2}{2} - 3x + \frac{21}{4} && | \cdot 4 \text{ (als Hauptnenner)} \\ (x-1)(x+1) + 2(x-2)^2 &= 2(x+1)^2 - 12x + 21 && \text{(Klammern auflösen, 1.-3. binomische Formel)} \\ x^2 - 1 + 2(x^2 - 4x + 4) &= 2(x^2 + 2x + 1) - 12x + 21 && \text{(Klammern auflösen)} \\ x^2 - 1 + 2x^2 - 8x + 8 &= 2x^2 + 4x + 2 - 12x + 21 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\ 3x^2 - 8x + 7 &= 2x^2 - 8x + 23 && | -2x^2 \\ x^2 - 8x + 7 &= -8x + 23 && | +8x \\ x^2 + 7 &= 23 && | -7 \\ x^2 &= 16 && | \sqrt{\quad} \\ x &= \pm 2 && \\ x_1 = 2, x_2 = -2 &&& \text{Lösungsmenge: } L = \{-4; 4\} \end{aligned}$$

Aufgabe 28: Löse die quadratische Gleichung:

$$\frac{x(x-5)}{6} + \frac{(x+4)^2}{3} = \frac{x(x+5)}{2} - \frac{x^2-37}{6}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{x(x-5)}{6} + \frac{(x+4)^2}{3} &= \frac{x(x+5)}{2} - \frac{x^2-37}{6} && | \cdot 6 \text{ (als Hauptnenner: } 2 \cdot 3 = 6) \\ 6x(x-5) + 2(x+4)^2 &= 3x(x+5) - (x^2-37) && \text{(Klammern auflösen, 1. binomische Formel)} \\ 6x^2 - 30x + 2(x^2 + 8x + 16) &= 3x^2 + 15x - x^2 + 37 && \text{(Klammer auflösen)} \\ 6x^2 - 30x + 2x^2 + 16x + 32 &= 3x^2 + 15x - x^2 + 37 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\ 8x^2 - 14x + 32 &= 2x^2 + 15x + 37 && | -2x^2 \\ 6x^2 - 14x + 32 &= 15x + 37 && | -15x \\ 6x^2 - 29x + 32 &= 37 && | -37 \\ 6x^2 - 29x - 5 &= 0 && | :6 \\ x^2 - 29x/6 - 5/6 &= 0 && \text{(p-q-Formel: } p = -29/6, q = -5/6) \\ x_{1,2} &= \frac{29}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{29}{12}\right)^2 + \frac{5}{6}} = \frac{29}{12} \pm \sqrt{\frac{961}{144} + \frac{10}{144}} = \frac{29}{12} \pm \frac{31}{12} \\ x_1 = \frac{29}{12} + \frac{31}{12} &= \frac{60}{12} = 5, x_2 = \frac{29}{12} - \frac{31}{12} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6} = 0 && \text{Lösungsmenge: } L = \{-1/6; 5\} \end{aligned}$$

Aufgabe 29: Löse die quadratische Gleichung:

$$\frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \left(2x + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{100}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \left(2x + \frac{3}{5}\right)^2 &= \frac{3}{100} && | \cdot 300 \text{ (als Hauptnenner: } 3 \cdot 100 = 300) \\ 200 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 225 \left(2x + \frac{3}{5}\right)^2 &= 9 && \text{(Klammern auflösen, 1.-2. binomische Formel)} \\ 200(x^2 - x + 0,25) - 225(4x^2 + 2,4x + 0,36) &= 9 && \text{(Klammern auflösen)} \\ 200x^2 - 200x + 50 - 900x^2 - 540x - 81 &= 9 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\ -700x^2 - 740x - 31 &= 9 && | -9 \\ -700x^2 - 740x - 40 &= 0 && | :(-700) \\ x^2 + 37x/35 + 2/35 &= 0 && \text{(p-q-Formel: } p = 37/35, q = 2/35) \\ x_{1,2} &= -\frac{37}{70} \pm \sqrt{\left(\frac{37}{70}\right)^2 - \frac{2}{35}} = -\frac{37}{70} \pm \sqrt{\frac{1089}{4900} - \frac{12}{4900}} = -\frac{37}{70} \pm \frac{33}{70} \\ x_1 = -\frac{37}{70} + \frac{33}{70} &= -\frac{4}{70} = -\frac{2}{35}, x_2 = -\frac{37}{70} - \frac{33}{70} = -\frac{70}{70} = -1 && \text{Lösungsmenge: } L = \{-1; -2/35\} \end{aligned}$$

Aufgabe 30: Löse die quadratische Gleichung:

$$\frac{4-x^2}{7} + \frac{x-2}{9} = x + \frac{x^2-8}{2}$$

Lösung:

$$\frac{4-x^2}{7} + \frac{x-2}{9} = x + \frac{x^2-8}{2} \quad | \cdot 126 \text{ (als Hauptnenner: } 7 \cdot 9 \cdot 2 = 126)$$

$$\frac{4-x^2}{7} \cdot 126 + \frac{x-2}{9} \cdot 126 = x \cdot 126 + \frac{x^2-8}{2} \cdot 126 \quad \text{(Kürzen der Brüche)}$$

$$18(4-x^2) + 14(x-2) = 126x + 63(x^2-8) \quad \text{(Klammern auflösen)}$$

$$72 - 18x^2 + 14x - 28 = 126x + 63x^2 - 504 \quad \text{(Zusammenfassen, Ordnen)}$$

$$-18x^2 + 14x + 44 = 63x^2 + 126x - 504 \quad | +18x^2$$

$$14x + 44 = 81x^2 + 126x - 504 \quad | -14x$$

$$44 = 81x^2 + 112x - 504 \quad | -44$$

$$0 = 81x^2 + 112x - 548 \quad | :81$$

$$0 = x^2 + 112x/81 - 548/81 \quad \text{(p-q-Formel: } p = 112/81, q = -548/81)$$

$$x_{1,2} = -\frac{56}{81} \pm \sqrt{\left(\frac{56}{81}\right)^2 + \frac{548}{81}} = -\frac{56}{81} \pm \sqrt{\frac{47524}{6561}} = -\frac{56}{81} \pm \frac{218}{81}$$

$$x_1 = -\frac{56}{81} + \frac{218}{81} = \frac{162}{81} = 2, \quad x_2 = -\frac{56}{81} - \frac{218}{81} = -\frac{274}{81} \quad \text{Lösungsmenge: } L = \{-274/81; 2\}$$

Abkürzungen: L = Lösungsmenge.