Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Grundaufgaben zur Vektorrechnung II

Einleitung: Elemente der Vektorrechnung im dreidimensionalen reellen kartesischen x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem sind Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$, Ortsvektoren $\vec{p} = \vec{OP} = (p_1\ p_2\ p_3)^T$, Differenzvektoren $\vec{PQ} = \vec{OQ}-\vec{OP}$, Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF, Stützvektor $\vec{a}$, reeller Parameter t, Richtungsvektor $\vec{u}$), Ebenen E: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{v} + s\vec{w}$ (PF, Stützvektor $\vec{b}$, reelle Parameter r, s, Richtungsvektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$), E: $\vec{n}(\vec{x}-\vec{p}) = 0$ (NF, Normalenvektor $\vec{n}$), E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF, Normalenvektor $\vec{n} = (a\ b\ c)^T$). Geraden und Ebenen sind Linearkombinationen aus Vektorvielfachen $t\vec{p}$ und Vektorsummen $\vec{p}+\vec{q}$ mit Nullvektor $\vec{0} = (0\ 0\ 0)^T$, Gegenvektor $-\vec{p}$ zu $\vec{p}$ oder Mitte $0{,}5(\vec{p}+\vec{q})$. Vektoren haben Richtung und Länge, der Betrag eines Vektors ist: $|\vec{p}| = (p_1^2+p_2^2+p_3^2)^{1/2}$, der Einheitsvektor berechnet sich als $\vec{p_0} = \vec{p}/|\vec{p}|$. Daneben sind für Vektoren $\vec{p} = (p_1\ p_2\ p_3)^T$ und $\vec{q} = (q_1\ q_2\ q_3)^T$ das Skalarprodukt $\vec{p}\cdot\vec{q} = p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$, das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\vec{p}\times\vec{q} = (p_2q_3-p_3q_2\ p_3q_1-p_1q_3\ p_1q_2-p_2q_1)^T$ und das Spatprodukt $(\vec{p}\times\vec{q})\cdot\vec{r}$ definiert.
Die Vektorrechnung kreist um die Konstruktion von Geraden und Ebenen, um die Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen (Schnittpunkte, Schnittgeraden, Schnittwinkel, Abstände), um Abbildungen (Verschiebungen von Punkten, Geraden und Ebenen, Streckungen, Projektionen, Spiegelungen von Punkten, Geraden und Ebenen an Punkten, Geraden und Ebenen u.a.).

Konstruktionen

Voraussetzung	Konstruktion
Punkt A, Richtungsvektor $\vec{u}$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a}+t\vec{u}$ (PF)
Punkte A, B	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA}+t\vec{AB} = \vec{a}+t\vec{u}$ (PF)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a_1}+s\vec{u_1}$ (PF) Punkt $A \notin g_1$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{u_1}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA}+t\vec{u} = \vec{a}+t\vec{u}$ (PF) als zu g_1 parallele Gerade durch den Punkt A (g || g_1)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a_1}+s\vec{u_1}$ (PF) Punkt $A \notin g_1$	Lotfußpunkt $F \in g_1$ mit: $\vec{AF}\cdot\vec{u} = 0$, Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AF}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA}+t\vec{AF} = \vec{a}+t\vec{u}$ (PF) als zu g_1 senkrechte Gerade durch den Punkt A ($g \perp g_1$)
Geraden g: $\vec{x} = \vec{a}+t\vec{u}$ || h: $\vec{x} = \vec{b}+t\vec{u}$ (PF)	Mitte $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ -> Mittelparallele k: $\vec{x} = \vec{OM}+t\vec{u}$ (PF) (k || g || h)
Ebene E: $\vec{x} = \vec{b}+r\vec{v}+s\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x}-\vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v}\times\vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\quad b\quad c)^T$) (KF),Punkt A	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{n}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA}+t\vec{n} = \vec{a}+t\vec{n}$ (PF) als zu E senkrechte Gerade durch den Punkt A ($g \perp E$)

Geradenkonstruktionen

Voraussetzung	Konstruktion
Punkt A, Richtungsvektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, Parameter r, s -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA}+r\vec{v}+s\vec{w}$ (PF)

Punkte $A(a_1\|a_2\|a_3)$, $B(b_1\|b_2\|b_3)$, $C(c_1\|c_2\|c_3)$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AB}$, $\vec{w} = \vec{AC}$, Parameter r, s -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC}$ (PF); Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 1 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 1 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 1 \end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0\|0\|0) \notin E$)
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u}$ (PF) Punkt $P \notin g$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AP}$, Parameter t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ (PF)
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u}$ (PF) Punkt P	Ebene: E: $\vec{u}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Gerade g senkrechte Ebene durch den Punkt P ($E \perp g$)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF), Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ (PF), Schnittpunkt S ($g_1 \cap g_2 = \{S\}$), Punkte $P(p_1\|p_2\|p_3)$, $Q(q_1\|q_2\|q_3) \varepsilon g_1$, $R(r_1\|r_2\|r_3) \varepsilon g_2$	Stützvektor $\vec{b} = \vec{OS}$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, Parameter s, t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{u}_1 + t\,\vec{u}_2$ (PF); LGS: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0\|0\|0) \notin E$)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF), Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ (PF), $g_1 \parallel g_2$, $g_1 \cap g_2 = \{\}$, Punkte $P(p_1\|p_2\|p_3)$, $Q(q_1\|q_2\|q_3) \varepsilon g_1$, $R(r_1\|r_2\|r_3) \varepsilon g_2$	Stützvektor $\vec{b} = \vec{a}_1$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}$, $\vec{v} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$, Parameter s, t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ LGS: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0\|0\|0) \notin E$)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Punkt P, Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$	Ebene: F: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Ebene E parallele Ebene durch den Punkt P ($F \parallel E$)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Abstand D, Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$	F_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d - \|\vec{n}\|D$, F_2: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d + \|\vec{n}\|D$ als zur Ebene E parallele Ebenen im Abstand D ($F_1 \parallel F_2 \parallel E$)
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF), bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF), Punkte A, B	Normalenvektor $\vec{n}$, Parameter t, u -> Ebene: F: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{AB} + u\,\vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Gerade g ($F \perp E$)
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF), bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF), Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)	Normalenvektor $\vec{n}$, Parameter t, u -> Ebene: F: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u} + u\,\vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Gerade g ($F \perp E$)

Ebenenkonstruktionen

E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$ (PF) -> $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ -> E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (NF) -> E: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{b}$ -> E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF)

E: $ax_1+bx_2+cx_3=d$ (KF) -> LGS: $\begin{pmatrix} ax_1+bx_2+cx_3=d \\ x_2=r \\ x_3=s \end{pmatrix}$ -> E: $\vec{x}=\begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (PF)
E: $\vec{n}(\vec{x}-\vec{b})=0$ (NF) -> E: $\vec{n}\,\vec{x}=\vec{n}\,\vec{b}$ -> E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF)
E: $ax_1+bx_2+cx_3=d$ ($\vec{n}=(a \;\; b \;\; c)^T$) (KF) -> E: $\frac{ax_1+bx_2+cx_3-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0$ (HNF)

Ebene in Parameter-, Normalen-, Koordinatenform

Lagebeziehungen

Voraussetzung	**Spurpunkte, Lage der Geraden**
Punkte $P(p_1\|p_2\|p_3)$, $Q(q_1\|q_2\|q_3)$	Abstand: d(P,Q) = $\left\|\vec{PQ}\right\|=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}$

Lage Punkt – Punkt

Voraussetzung	**Spurpunkte, Lage der Geraden**
Gerade g: $\vec{x}=\vec{a}+t\,\vec{u}$	$x_1 = 0$ -> $a_1 + tu_1 = 0$ -> $t = t_1 = -a_1/u_1$ -> $S_1(0\|a_2+t_1u_2\|a_3+t_1u_3)$ (Spurpunkt mit x_2-x_3-Ebene, falls $u_1\neq0$; kein Spurpunkt, falls $u_1=0$) $x_2 = 0$ -> $a_2 + tu_2 = 0$ -> $t = t_2 = -a_2/u_2$ -> $S_2(a_1+t_2u_1\|0\|a_3+t_2u_3)$ (Spurpunkt mit x_1-x_3-Ebene, falls $u_2\neq0$; kein Spurpunkt, falls $u_2=0$) $x_3 = 0$ -> $a_3 + tu_3 = 0$ -> $t = t_3 = -a_3/u_3$ -> $S_3(a_1+t_3u_1\|a_2+t_3u_2\|0)$ (Spurpunkt mit x_1-x_2-Ebene, falls $u_3\neq0$; kein Spurpunkt, falls $u_3=0$)
	$u_1 = 0$ -> g || x_2-x_3-Ebene $u_2 = 0$ -> g || x_1-x_3-Ebene $u_3 = 0$ -> g || x_1-x_2-Ebene $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ -> g || x_1-Achse $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ -> g || x_2-Achse $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ -> g || x_3-Achse

Spurpunkte, Lage von Geraden

Voraussetzung	**Spurpunkte, Lage der Ebene**
Ebene E: $ax_1+bx_2+cx_3=d$ a≠0, b≠0, c≠0	$S_1(d/a\|0\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) $S_2(0\|d/b\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) $S_3(0\|0\|d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3-Achse)
Ebene E: $bx_2+cx_3=d$ b≠0, c≠0	$S_2(0\|d/b\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) $S_3(0\|0\|d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_1-Achse
Ebene E: $ax_1+cx_3=d$ a≠0, c≠0	$S_1(d/a\|0\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) $S_3(0\|0\|d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_2-Achse
Ebene E: $ax_1+bx_2=d$ a≠0, b≠0	$S_1(d/a\|0\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) $S_2(0\|d/b\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) -> Ebene parallel zur x_3-Achse
Ebene E: $ax_1=d$ a≠0	$S_1(d/a\|0\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) -> Ebene parallel zur x_2- und x_3-Achse -> Ebene parallel zur x_2-x_3-Ebene
Ebene E: $bx_2=d$ b≠0	$S_2(0\|d/b\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) -> Ebene parallel zur x_1- und x_3-Achse -> Ebene parallel zur x_1-x_3-Ebene
Ebene E: $cx_3=d$ c≠0	$S_3(0\|0\|d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_1- und x_2-Achse -> Ebene parallel zur x_1-x_2-Ebene

Spurpunkte, Lage von Ebenen

Voraussetzung	Lage, Abstand
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$ (PF) Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ (PF)	a) Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\vec{a}_1 + s\vec{u}_1 = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ -> unendlich viele Lösungen: $g_1 = g_2$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g_1 \cap g_2 = \{S\}$; keine Lösung: Geraden parallel oder windschief b) Überprüfung auf Parallelität: $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ -> 1 Lösung: $g_1 \parallel g_2$, keine Lösung: g_1, g_2 windschief c) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Geraden): $\varphi = \cos^{-1}\left(\left\|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\right\| \big/ \left\|\vec{u}_1\right\| \cdot \left\|\vec{u}_2\right\|\right)$

Lage Gerade – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt P(p_1|p_2|p_3) Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)	a) Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{b} + r\vec{u} + s\vec{v}$ -> 1 Lösung: Pεg; keine Lösung: P∉g b) Punktprobe: $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = d$ -> wahre Aussage: Pεg; falsche Aussage: P∉g c) Abstand: d(P,E) = d(P, F) mit F als Lotfußpunkt zu P auf Ebene E (Konstruktion des Lotfußpunkts über Lotgerade h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{n}$ mit: $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$)

Lage Punkt – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \; b \; c)^T$) (KF) Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)	a) Gleichsetzen von Ebenen- und Geradengleichung: $\vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF) bzw. Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene (KF, NF) -> unendlich viele Lösungen: $g \subset E$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g \cap E = \{S\}$; keine Lösung: g || E b) Abstand (bei Parallelität von Gerade und Ebene): d(g,E) = d(A,E) mit Punkt Aεg, z.B. mit $\vec{a} = \vec{OA}$ c) Schnittwinkel (bei sich schneidender Gerade und Ebene): $\varphi = \sin^{-1}\left(\left\|\vec{n} \cdot \vec{u}\right\| \big/ \left\|\vec{n}\right\| \cdot \left\|\vec{u}\right\|\right)$

Lage Gerade – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
E_1: $\vec{x} = \vec{b}_1 + r\vec{v}_1 + s\vec{w}_1$ (PF) bzw. E_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), E_2: $\vec{x} = \vec{b}_2 + t\vec{v}_2 + u\vec{w}_2$ (PF) bzw. E_2: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{w}_1$, $\vec{n}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{w}_2$	a) Gleichsetzen der Ebenengleichung in Parameterform: $\vec{b}_1 + r\vec{v}_1 + s\vec{w}_1 = \vec{b}_2 + t\vec{v}_2 + u\vec{w}_2$ (PF) bzw. Einsetzen der Ebenenkomponenten x_1, x_2, x_3 der Ebene E_1 in die Ebene E_2 (KF): bzw. Lösen des linearen Gleichungssystems $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2 \end{pmatrix}$ -> unendlich viele Lösungen (mit zwei Parametern): $E_1 = E_2$, unendlich viele Lösungen (mit einem Parametern):: Schnittgerade g mit $E_1 \cap E_2 = g$; keine Lösung: $E_1 \parallel E_2$ b) Abstand (bei Parallelität der Ebenen): d(E_1,E_2) = d(A,E_1) mit Punkt AεE_2 (Hessesche Normalform) c) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Ebenen): $\varphi = \cos^{-1}\left(\left\|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right\| \big/ \left\|\vec{n}_1\right\| \cdot \left\|\vec{n}_2\right\|\right)$

Lage Ebene – Ebene

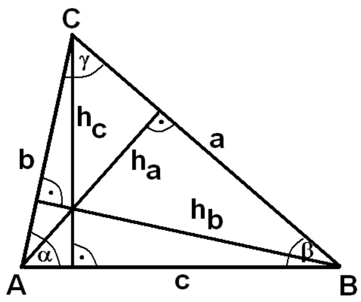
Voraussetzung	Lage
Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\ b\ c)^T$) (KF)	a) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ -> g || E b) $\vec{u} = k\,\vec{n}$ -> g $\perp$ E

Orthogonalität, Parallelität Gerade – Ebene

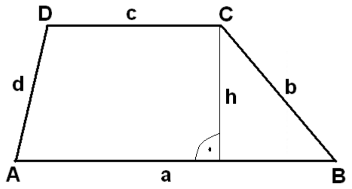
Voraussetzung	Lage
E_1: $\vec{x} = \vec{b_1} + r\,\vec{v_1} + s\,\vec{w_1}$ (PF) bzw. E_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), E_2: $\vec{x} = \vec{b_2} + t\,\vec{v_2} + u\,\vec{w_2}$ (PF) bzw. E_2: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n_1} = \vec{v_1} \times \vec{w_1}$, $\vec{n_2} = \vec{v_2} \times \vec{w_2}$	a) $\vec{n_1} = k\,\vec{n_2}$ -> E_1 || E_2 b) $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$ -> $E_1 \perp E_2$

Orthogonalität, Parallelität Ebene – Ebene

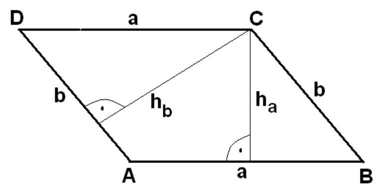
Geometrie

Formeln	
$\vec{AB} \neq k\,\vec{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\vec{AB} \neq k\,\vec{BC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\vec{BC} \neq k\,\vec{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck	
$c = \left\|\vec{AB}\right\|$, $b = \left\|\vec{AC}\right\|$, $a = \left\|\vec{BC}\right\|$ (Seiten), $u = \left\|\vec{AB}\right\| + \left\|\vec{AC}\right\| + \left\|\vec{BC}\right\|$ (Umfang)	
$\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{AC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel α) $\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{BC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel β) $\left\|\vec{BC}\right\| = \left\|\vec{AC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel γ)	
$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\left\|\vec{AB}\right\| \cdot \left\|\vec{AC}\right\|}$, $\cos\beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{\left\|\vec{AB}\right\| \cdot \left\|\vec{BC}\right\|}$, $\cos\gamma = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{\left\|\vec{AC}\right\| \cdot \left\|\vec{BC}\right\|}$ (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ = 180°
$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\vec{BC} \cdot \vec{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
$h_a = d(A, g_{BC})$, $h_b = d(B, g_{AC})$, $h_c = d(C, g_{AC})$ bzw. $h_a = \frac{\left\|\vec{AB} \times \vec{AC}\right\|}{\left\|\vec{BC}\right\|}$, $h_b = \frac{\left\|\vec{AB} \times \vec{BC}\right\|}{\left\|\vec{AC}\right\|}$, $h_c = \frac{\left\|\vec{AC} \times \vec{BC}\right\|}{\left\|\vec{AB}\right\|}$ usw. (Höhen)	Erläuterung: g_{PQ}: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{PQ}$ d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g
$A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ bzw. $A = \frac{\left\|\vec{BC}\right\| \cdot d(A, g_{BC})}{2} = \frac{\left\|\vec{AC}\right\| \cdot d(B, g_{AC})}{2} = \frac{\left\|\vec{AB}\right\| \cdot d(C, g_{AB})}{2}$ bzw. $A = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB} \times \vec{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB} \times \vec{BC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{AC} \times \vec{BC}\right\|$ (Fläche)	

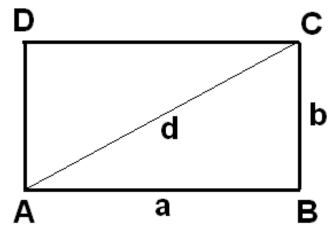
Dreiecke

Formeln	
$\vec{AB} = k\,\vec{CD}$ für ein gewisses k => Trapez ($\vec{AB} \parallel \vec{CD}$) $\vec{BC} = k\,\vec{AD}$ für ein gewisses k => Trapez ($\vec{BC} \parallel \vec{AD}$)	
$a = \lvert\vec{AB}\rvert$, $b = \lvert\vec{BC}\rvert$, $c = \lvert\vec{CD}\rvert$, $d = \lvert\vec{AD}\rvert$ (Seiten), $u = \lvert\vec{AB}\rvert + \lvert\vec{BC}\rvert + \lvert\vec{CD}\rvert + \lvert\vec{AD}\rvert$ (Umfang)	
$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$, $\lvert\vec{BC}\rvert = \lvert\vec{AD}\rvert$ => Trapez gleichschenklig $\vec{BC} \parallel \vec{AD}$, $\lvert\vec{AB}\rvert = \lvert\vec{CD}\rvert$ => Trapez gleichschenklig	
$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\,\vec{AD}}{\lvert\vec{AB}\rvert\cdot\lvert\vec{AD}\rvert}$, $\cos\beta = -\frac{\vec{AB}\,\vec{BC}}{\lvert\vec{AB}\rvert\cdot\lvert\vec{BC}\rvert}$, $\cos\gamma = -\frac{\vec{BC}\cdot\vec{CD}}{\lvert\vec{BC}\rvert\cdot\lvert\vec{CD}\rvert}$, $\cos\delta = \frac{\vec{AD}\,\vec{CD}}{\lvert\vec{AD}\rvert\cdot\lvert\vec{CD}\rvert}$ (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360°
$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ => h = d(C, g_{AB}) bzw. $h = \frac{\lvert\vec{AB}\times\vec{AC}\rvert}{\lvert\vec{AB}\rvert}$ (Höhe) $\vec{BC} \parallel \vec{AD}$ => h = d(D, g_{BC}) bzw. $h = \frac{\lvert\vec{BC}\times\vec{BD}\rvert}{\lvert\vec{BC}\rvert}$ (Höhe)	Erläuterung: g_{PQ}: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{PQ}$ d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g
$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ => $A = \frac{a+c}{2}h$ (Fläche) $\vec{BC} \parallel \vec{AD}$ => $A = \frac{b+d}{2}h$ (Fläche) $A = \frac{\lvert\vec{AB}\times\vec{AC}\rvert}{2} + \frac{\lvert\vec{AC}\times\vec{AD}\rvert}{2}$ (Fläche)	

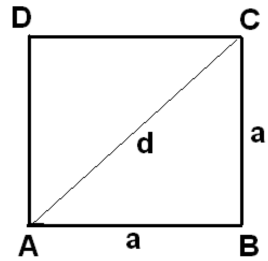
Trapeze

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}$ => Parallelogramm $\vec{BC} = \vec{AD}$ => Parallelogramm	
$a = \lvert\vec{AB}\rvert = \lvert\vec{CD}\rvert$, $b = \lvert\vec{BC}\rvert = \lvert\vec{AD}\rvert$ (Seiten), $u = 2\lvert\vec{AB}\rvert + 2\lvert\vec{BC}\rvert$ (Umfang)	
$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{\lvert\vec{AB}\rvert\cdot\lvert\vec{AD}\rvert}$, $\cos\beta = -\frac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{\lvert\vec{AB}\rvert\cdot\lvert\vec{BC}\rvert}$ usw. (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360° α + β = 180°, γ + δ = 180° α = γ, β = δ
h_a = d(C, g_{AB}) bzw. $h_a = \frac{\lvert\vec{AB}\times\vec{AD}\rvert}{\lvert\vec{AB}\rvert}$, h_b = d(C, g_{AD}) bzw. $h_b = \frac{\lvert\vec{AB}\times\vec{AD}\rvert}{\lvert\vec{AD}\rvert}$ (Höhen)	Erläuterung: g_{PQ}: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{PQ}$ d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g
$A = ah_a = bh_b$ bzw. $A = \vec{AB}\cdot d(C, g_{AB}) = \vec{AD}\cdot d(C, g_{AD})$ bzw. $A = \lvert\vec{AB}\times\vec{AD}\rvert$ (Fläche)	

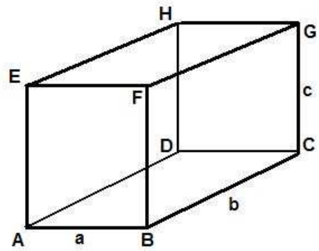
Parallelogramme

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ => Rechteck $\vec{BC} = \vec{AD}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ => Rechteck	
$a = \left\lvert\vec{AB}\right\rvert = \left\lvert\vec{CD}\right\rvert$, $b = \left\lvert\vec{BC}\right\rvert = \left\lvert\vec{AD}\right\rvert$ (Seiten), $u = 2\left\lvert\vec{AB}\right\rvert + 2\left\lvert\vec{BC}\right\rvert$ (Umfang)	
$A = \left\lvert\vec{AB}\right\rvert \cdot \left\lvert\vec{BC}\right\rvert$ bzw. $A = \left\lvert\vec{AB} \times \vec{AD}\right\rvert$ (Fläche)	Winkel: α = β = γ = δ = 90°

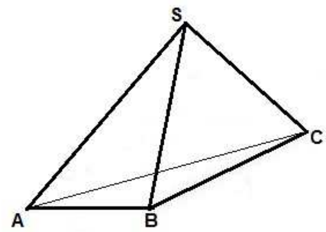
Rechtecke

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$, $\left\lvert\vec{AB}\right\rvert = \left\lvert\vec{BC}\right\rvert$ => Quadrat $\vec{BC} = \vec{AD}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$, $\left\lvert\vec{AB}\right\rvert = \left\lvert\vec{BC}\right\rvert$ => Quadrat	
$a = \left\lvert\vec{AB}\right\rvert = \left\lvert\vec{BC}\right\rvert = \left\lvert\vec{CD}\right\rvert = \left\lvert\vec{AD}\right\rvert$ (Seiten), $u = 4\left\lvert\vec{AB}\right\rvert$ (Umfang)	
$A = \left\lvert\vec{AB}\right\rvert^2$ bzw. $A = \left\lvert\vec{AB} \times \vec{AD}\right\rvert$ (Fläche)	Winkel: α = β = γ = δ = 90°

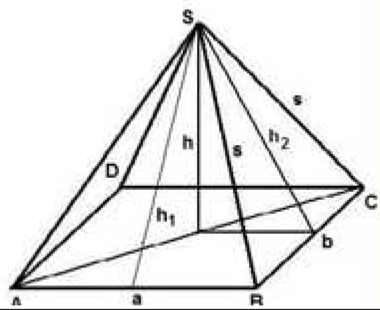
Quadrate

Formeln	
$a = \left\lvert\vec{AB}\right\rvert$, $b = \left\lvert\vec{AD}\right\rvert$, $c = \left\lvert\vec{AE}\right\rvert$ (Kanten); a=b=c (Würfel)	
G = ab (Grundfläche, Deckfläche); G = a^2 (Würfel) M = (2a+2b)c (Mantelfläche) O = 2G + M = 2(ab+ac+bc) (Oberfläche); O = $6a^2$ (Würfel)	
V = abc (Volumen); V = a^3 (Würfel)	

Quader (Würfel)

Formeln	
$G = \frac{1}{2}\left\lvert\vec{AB} \times \vec{AC}\right\rvert = \frac{1}{2}\left\lvert\vec{AB} \times \vec{BC}\right\rvert = \frac{1}{2}\left\lvert\vec{AC} \times \vec{BC}\right\rvert$ (Grundfläche) $M = \frac{1}{2}\left\lvert\vec{AB} \times \vec{AS}\right\rvert + \frac{1}{2}\left\lvert\vec{AC} \times \vec{AS}\right\rvert + \frac{1}{2}\left\lvert\vec{BC} \times \vec{BS}\right\rvert$ (Mantelfläche) O = G + M (Oberfläche)	
h = d(S, E_{ABC}) (Höhe, E_{ABC} als Grundebene, Hessesche Normalform) V = Gh/3 (Volumen) $V = \frac{1}{6}(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AS}$	

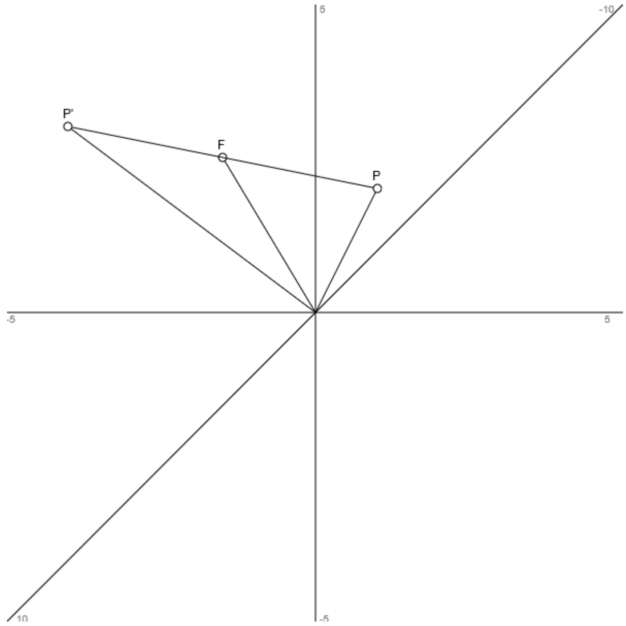
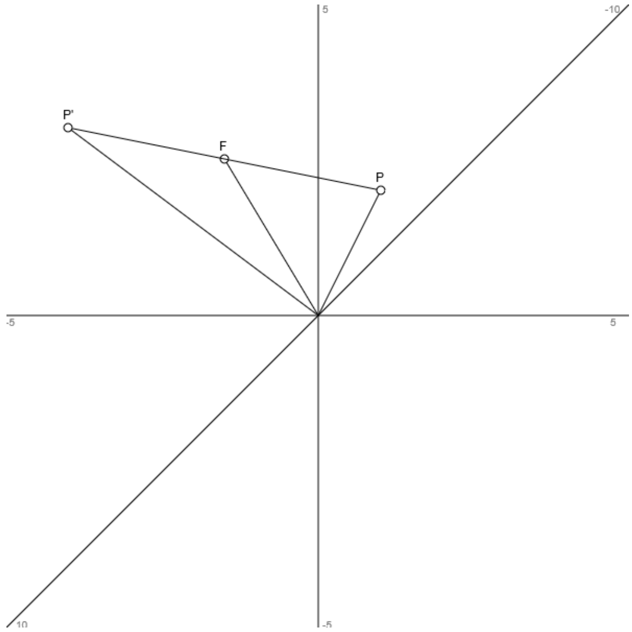
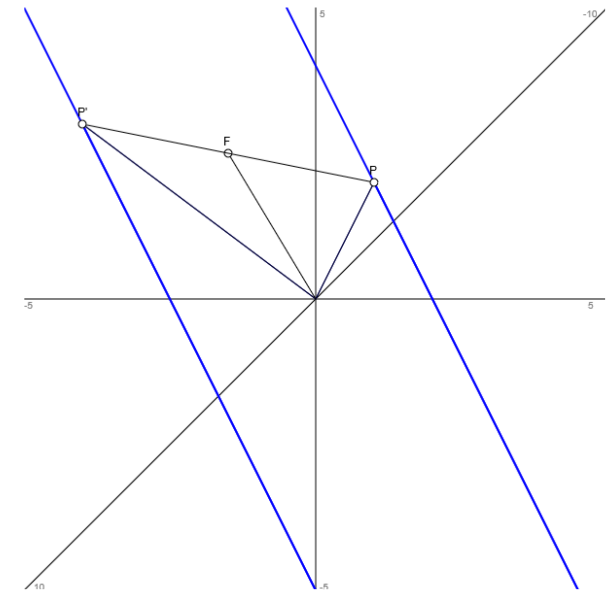
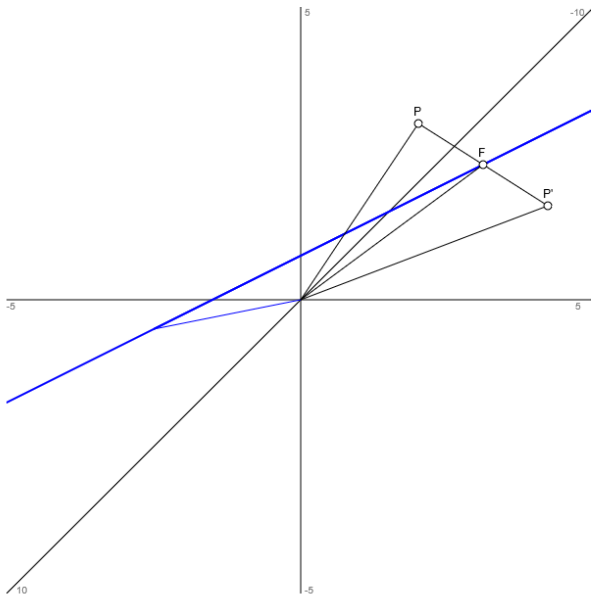
Dreieckpyramiden

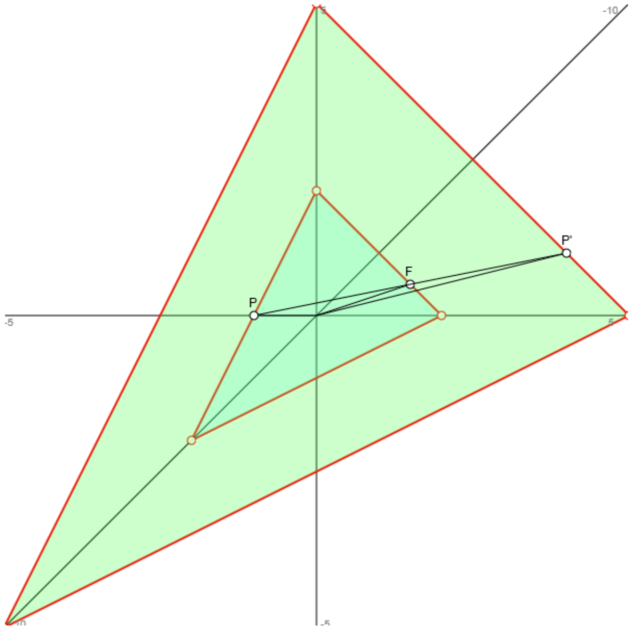
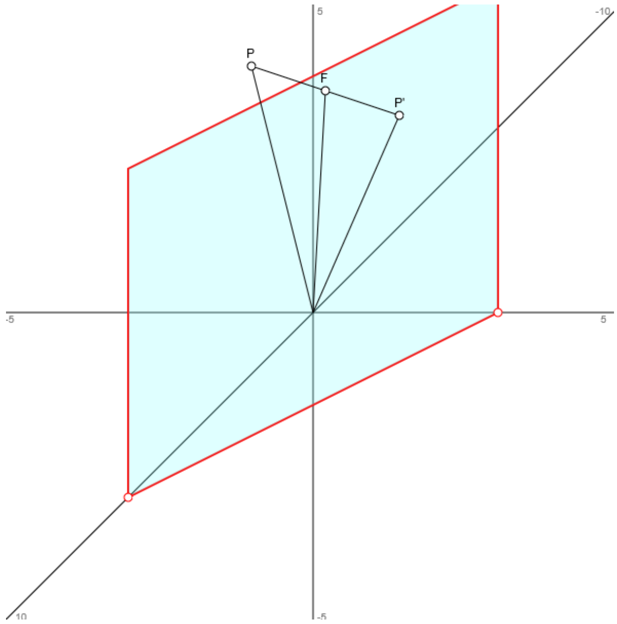
Formeln	
$a = \left\lvert\vec{AB}\right\rvert$, $b = \left\lvert\vec{AD}\right\rvert$ (Grundkanten) h = d(S, E_{ABCD}) (Höhe, E_{ABCD} als Grundebene, Hessesche Normalform) $h_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$, $h_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$ (Seitenhöhen) $s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h_2^2$ (Seitenkanten)	

$G = \left\vert \vec{AB} \times \vec{AD} \right\vert$ (Grundfläche) $M = \left\vert \vec{AB} \times \vec{AS} \right\vert + \left\vert \vec{AD} \times \vec{AS} \right\vert$ (Mantelfläche) O = G + M (Oberfläche)	
V = Gh/3 (Volumen) $V = \frac{1}{3}(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AS}$	

Parallelogrammpyramiden

Spiegelungen

<table>
<tr><th>Punktspiegelung</th><th>Spiegelung eines Punktes</th></tr>
<tr><td>Punktspiegelung eines Punktes P an Spiegelpunkt F zum gespiegelten Punkt P‘:

</td><td>Punktspiegelung eines Punktes P an Spiegelpunkt F zum gespiegelten Punkt P‘:

</td></tr>
<tr><td>Punktspiegelung einer Geraden g: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{u}$ an Spiegelpunkt F zur (parallelen) gespiegelten Geraden g‘: $\vec{x} = \vec{OP'} + t\,\vec{u}$ (g || g‘) vermöge der Punktspiegelung des Punktes Pεg (Stützvektor der Geraden g) an Spiegelpunkt F zum gespiegelten Punkt P’εg‘ (Stützvektor der Geraden g‘):

</td><td>Spiegelung eines Punktes P an Spiegelgerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ über den Lotfußpunkt Fεg mit: $\vec{PF} \cdot \vec{u} = 0$ (Orthogonalitätsbedingung bei laufendem Punkt F_tεg, Verfahren mit Hilfsebene E_H: $\vec{u} \cdot \vec{x} = \vec{u} \cdot \vec{OP}$) zum gespiegelten Punkt P‘:

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Punktspiegelung einer <u>Ebene</u> E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ an Spiegelpunkt F zur (parallelen) gespiegelten E‘: $ax_1+bx_2+cx_3 = d'$ (E || E‘) vermöge der Punktspiegelung des Punktes PεE (Stützvektor der Ebene E) an Spiegelpunkt F zum gespiegelten Punkt P’εE‘ (Stützvektor der Ebene E‘) und vermöge der Identitäten: $\vec{n}\cdot\vec{OP}=d$, $\vec{n}\cdot\vec{OP'}=d'$, Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$:</td>
<td>Spiegelung eines <u>Punkt</u>es P an Spiegelebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ über den Lotfußpunkt FεE (als Schnittpunkt von Lotgeraden h: $\vec{x}=\vec{OP}+t\,\vec{n}$ und Ebene E, Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$) zum gespiegelten Punkt P‘:</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Spiegelung: P -> F -> P‘
Spiegelformel: $\vec{OP'}=\vec{OP}+2\vec{PF}=\vec{OF}+\vec{PF}=2\vec{OF}-\vec{OP}$</td>
</tr>
</table>

Spiegelungen mit Punkten

Aufgabe 1: a) Bestimme die (Parameter-) Gleichung der Geraden g durch den Punkt P(2|-4|5) und mit dem Richtungsvektor $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$.

b) Wie liegen die Gerade g und die Gerade h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ zueinander? Berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt und den Schnittwinkel.

c) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene E, auf der die Geraden g und h liegen.

Vorgehensweise: a) Punkt P, Richtungsvektor $\vec{u}$ -> Gerade g: $\vec{x}=\vec{OP}+r\,\vec{u}$ (PF); b) g∩h -> lineares Gleichungssystem -> Identität der Geraden, Existenz eines Schnittpunkts, Parallelität, Windschiefheit, Kosinusformel zur Bestimmung des Winkels zwischen den Richtungsvektoren der Geraden; c) Ebene E mit Geradenschnittpunkt als Stützvektor und Richtungsvektoren der Geraden als Spannvektoren -> Ebene E (PF) -> Ebene E (KF).

Lösung: a) Gerade g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, b) g∩h -> r=1, s=2 -> Schnittpunkt S(3|-2|2), Schnittwinkel φ = 10,9°; c) Ebene E: $x_1+x_2+x_3 = 3$ (KF).

Aufgabe 2: a) Bestimme die (Parameter-) Gleichung der Geraden g durch die Punkte P(2|-2|4) und Q(-6|4|10).

b) Berechne die Koordinatengleichung der Ebene E, auf der die Punkte A(4|0|0), B(0|3|0) und C(0|0|6) liegen.

c) Berechne den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E.

d) Berechne den Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene.

Vorgehensweise: a) Punkte P, Q -> Gerade g: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{PQ}$ (PF); b) Spurpunkte A, B, C -> Ebenengleichung mit Kehrwerten der Spurpunktkoordinaten ≠0; c) Gerade g -> Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in Ebenengleichung einsetzen -> Parameter t in Geradengleichung einsetzen -> Schnittpunkt S; d) Sinusformel zur Bestimmung des Winkels zwischen Richtungsvektor der Geraden und Normalenvektor der Ebene.

Lösung: a) Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, b) Ebene E: $3x_1+4x_2+2x_3 = 12$; c) g∩E -> t=0,5 -> Schnittpunkt S(-2|1|7); d) Schnittwinkel φ = 11,02°.

Aufgabe 3: a) Zeige: Die Ebenen E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und F: $2x_1–2x_2–x_3 = -12$ liegen zueinander parallel.

b) Konstruiere eine Lotgerade g zur Ebene E durch den Punkt P(4|-3|2).

c) Die Gerade g schneidet die Ebenen E und F in den Punkten T und U. Berechne die Koordinaten dieser Punkte.

d) Bestimme den Abstand zwischen den Ebenen E und F.

e) Beschreibe, wie der Abstand zwischen zwei parallelen Ebenen allgemein bestimmt werden kann.

Vorgehensweise: a) Richtungsvektoren der Ebene E senkrecht zu Normalenvektor der Ebene F, Stützvektor der Ebene E liegt nicht auf Ebene F => E || F, b) Lotgerade g: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n_E}$, $\vec{n_E}$ als Normalenvektor der Ebene E (bzw. F); c) Gerade g -> Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in Ebenengleichung E (KF) einsetzen -> Parameter t in Geradengleichung einsetzen -> Schnittpunkt T, Gerade g -> Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in Ebenengleichung F (KF) einsetzen -> Parameter t in Geradengleichung einsetzen -> Schnittpunkt U; d) Abstand der Ebenen als Abstand zwischen Punkt und Ebene.

Lösung: a) Ebenen E: $2x_1–2x_2–x_3 = 3$, F: $2x_1–2x_2–x_3 = -12$ => E || F, b) Lotgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; c) g∩E -> t=-1 -> Schnittpunkt T(2|-1|3), g∩F -> t=-8/3 -> Schnittpunkt U(-4/3|7/3|14/3); d) Abstand d(E,F) = d(T,U) = 5 LE; e) Abstand zwischen zwei parallelen Ebenen E und F: PεE -> Lotgerade h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n_E}$, $\vec{n_E}$ als Normalenvektor der Ebene E (bzw. F) -> h∩F -> Lotfußpunkt L -> d(E,F) = d(P,L).

Aufgabe 4: a) Weise nach, dass sich die Ebenen E: $2x_1 – 3x_2 + x_3 = 6$ und F: $x_1 – 4x_2 – 4x_3 = 12$ schneiden.

b) Berechne den Winkel, unter dem sich die Ebenen schneiden.

c) Zeige, dass die Punkte P(4|0|-2) und Q(20|9|-7) auf beiden Ebenen liegen. Berechne die Schnittgerade g zwischen den Ebenen.

Vorgehensweise: a) Lage der Normalenvektoren der Ebenen E und F zueinander -> Lage der Ebenen zueinander; b) Kosinusformel zur Bestimmung des Winkels zwischen den Normalenvektoren; c) Punktprobe als Einsetzen des Punktes in die Koordinatenform je einer Ebene, Schnittgerade g als Gerade durch die Punkte P und Q.

Lösung: a) Normalenvektoren $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ nicht zueinander parallel -> Ebenen E und F schneiden sich in einer Schnittgeraden; b) Schnittwinkel φ = 62,3°; c) Punktproben -> P, QεE, P,QεF -> Schnittgerade durch die Punkte P und Q -> Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 16 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$.

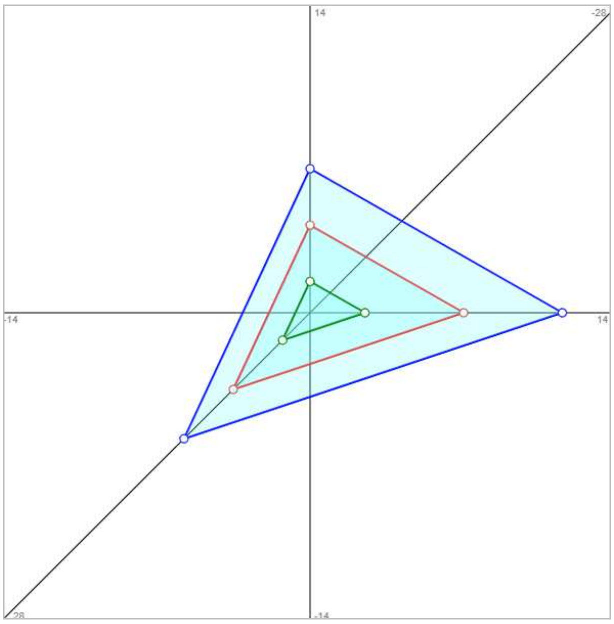
Aufgabe 5: a) Bestimme die Spurpunkte der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeichne Spurpunkte und Ebene in ein x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem ein.

b) Bestimme den Abstand der Ebene E zum Ursprung des Koordinatensystems. Welcher Ebenenpunkt liegt dem Ursprung am nächsten?

c) Konstruiere eine Ebene F, deren Punkte zur Ebene E den Abstand d = 2 LE haben. Zeichne ebenfalls Spurpunkte und Ebene in das x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem ein.

Vorgehensweise: a) Ebene in Parameterform -> Normalenvektor als Kreuzprodukt der Spannvektoren, Stützvektor -> Ebene in Koordinatenform -> Spurpunkte -> Zeichnung; b) Ebene -> Lotgerade -> Lotfußpunkt -> Abstand; c) Punkt PεE -> Punkt QεF mit: $\vec{OQ} = \vec{OP} \pm d\,\vec{n}_0$, Abstand d, Einheitsnormalenvektor $\vec{n}_0$ -> Ebene F (KF).

Lösung: a) Ebene E: $4x_1+4x_2+7x_3 = 28$ (KF) -> Spurpunkte $S_1(7|0|0)$, $S_2(0|7|0)$, $S_3(0|0|4)$; b) Lotgerade h -> h∩E -> Lotfußpunkt F(112/81|112/81|196/81) -> d(O,E) = d(F,E) = 28/9; c) z.B. Ebene F: $4x_1+4x_2+7x_3 = 46$ mit Spurpunkten $S_1(11,5|0|0)$, $S_2(0|11,5|0)$, $S_3(0|0|46/7)$.



Aufgabe 6: Vorausgesetzt seien die Ebene: E: $3x_1 – 4x_2 = 12$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Welche besondere Lage nimmt die Ebene in einem x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem ein.

b) Gib jeweils eine Gerade an, die die Ebene senkrecht schneidet, in der Ebene liegt bzw. von der Ebene den Abstand 8 LE hat.

c) Zeige, dass die Ebene E und die Gerade g zueinander parallel sind und berechne den Abstand.

d) Gib die Gleichung einer Ebene F an, die senkrecht auf der Ebene E steht und die Gerade g enthält.

Vorgehensweise: a) Ebene -> Spurpunkte -> Lage; b) Punkt P, Normalenvektor -> Lotgerade; Spurpunkt, Richtungsvektor senkrecht zum Normalenvektor -> Gerade auf der Ebene; Punkt mit vorgegebenem Abstand zur Ebene, Richtungsvektor senkrecht zum Normalenvektor -> Gerade parallel zur Ebene mit vorgegebenem Abstand; c) Skalarprodukt von Normalen- und Richtungsvektor verschwindet -> Ebene und Gerade parallel; Ebene, Punkt auf Geraden -> Lotgerade -> Lotfußpunkt -> Abstand; d) Normalenvektor der Ebene E, Richtungsvektor der Geraden g als Spannvektoren, Stützvektor der Geraden g als Stützvektor -> Ebene F (PF).

Lösung: a) Ebene E parallel zur x_3-Achse; b) Spurpunkt $S_1(4|0|0)$, Normalenvektor -> Lotgerade g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; Spurpunkt $S_1(4|0|0)$, Richtungsvektor senkrecht zum Normalenvektor -> Gerade g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; Spurpunkt $S_1(4|0|0)$ -> Punkt P(8,8|-6,4|0) mit: $\vec{OP} = \vec{OS_1} + 8\cdot\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$, Richtungsvektor senkrecht zum Normalenvektor -> Gerade g_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8{,}8 \\ -6{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; c) g || E -> d(g, E) = 10 LE; d) g $\subset$ F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\perp$ E.

Aufgabe 7: Die parallelen Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ seien vorgegeben, außerdem der Punkt P(1|1|-7).

a) Konstruiere aus den Geraden g und h die Mittelparallele k.

b) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene E, die alle drei Geraden enthält.

c) Bestimme aus der Geraden g und dem Punkt P die Koordinatengleichung der Ebene F, die Gerade und Punkt enthält.

d) Untersuche, ob die Ebenen E und F senkrecht aufeinander stehen.

Vorgehensweise: a) Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ || h: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\vec{u}$ (PF) -> Mitte $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ -> Mittelparallele als Gerade k: $\vec{x} = \vec{OM} + t\,\vec{u}$ (PF); b), c) Punkt P$\notin$g, Gerade g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u}$ -> Ebene E: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u} + s\,\vec{AP}$ (PF) -> $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{AP}$ -> Ebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF); d) Normalvektoren der Ebenen senkrecht -> Ebenen senkrecht.

Lösung: a) Mitte M(0|5|-2,5); Gerade k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; b) Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ (PF) -> E: $5x_1+3x_2+4x_3 = 5$ (KF); c) Ebene F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ -> F: $5x_1-7x_2-x_3 = 5$ (KF); d) Normalenvektoren $\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$ -> Skalarprodukt verschwindet -> E $\perp$ F.

Aufgabe 8: a) Spiegele die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ am Punkt Z(4|0|0).

b) Spiegele den Punkt P(2|3|-1) an der Ebene E: $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$.

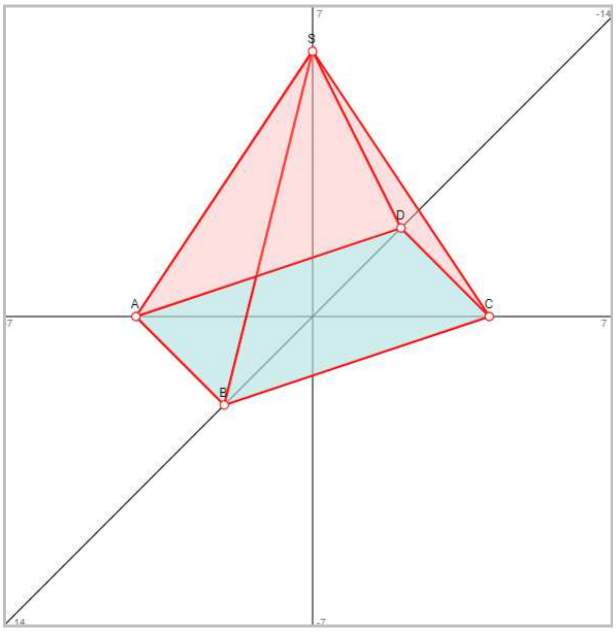
c) Bestimme die Spiegelebene E, um die der Punkt Q(3|4|-8) auf den Bildpunkt Q'(-2|6|-2) gespiegelt wird.

d) Welches mathematische Konzept liegt den hier aufgeführten Spiegelungen zugrunde?

Vorgehensweise: a) Spiegelformel -> Punktspiegelung -> Geraden g || g'; b) Ebenenspiegelung: Lotgerade -> Lotfußpunkt -> Spiegelformel; c) Spiegelebene: Normalenvektor als Differenzvektor der vorgegebenen Punkte, Stützvektor als Mitte zwischen den vorgegebenen Punkten.

Lösung: a) Punktspiegelung: Gerade g -> Spiegelpunkt Z -> Bildgerade g': $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; b) Ebenenspiegelung: Punkt P -> Lotfußpunkt. F(0|4|1) -> Bildpunkt P'(-2|5|3); c) Punktspiegelung Q <-> Q': Spiegelebene E: $5x_1-2x_2-6x_3 = 22{,}5$ (KF); d) Spiegelformel als Mittenformel.

Aufgabe 9: Gegeben ist eine vierseitige Pyramide mit den Grundflächenecken A(0|-4|0), B(4|0|0), C(0|4|0), D(-4|0|0) sowie der Spitze S(0|0|6).



a) Zeige, dass die Grundfläche ABCD ein Quadrat ist.

b) M sei die Mitte des Quadrats ABCD. Zeige, dass der Differenzvektor $\vec{MS}$ die Höhe der Pyramide darstellt. Bestimme das Volumen der quadratischen Pyramide.

c) Berechne die Oberfläche der Pyramide.

d) In welchen Ebenen die Mantelflächendreiecke ABS und BCS? Unter welchem Winkel stoßen die Mantelflächendreiecke im Innern der Pyramide aneinander?

e) Unter welchem Winkel schneidet eine Seitenkante die Grundfläche der Pyramide?

Vorgehensweise: a) Quadrat als rechtwinklige Raute; b) Höhe, Grundfläche -> Volumenformel; c) Kreuzprodukt und Dreieckflächen; d) A, B, S bzw. B, C, S als Spurpunkte -> Ebenen -> Kosinusformel zur Bestimmung des Winkels zwischen den Normalenvektoren der Ebenen; e) Sinusformel zur Bestimmung des Winkels zwischen Richtungsvektor der Geraden und Normalenvektor der Ebene.

Lösung: a) Viereck ABCD als Parallelogramm -> Rechteck -> Quadrat, b) Mitte M(0|0|0), Höhe h = 6 LE, Grundfläche G = 32 FE -> Volumen V = 64 VE; c) Mantelflächendreieck $M_1=M_2=M_3=M_4$ = 18,762 FE -> Oberfläche O = 107,047 FE; d) Ebenen E_{ABS}: $3x_1-3x_2+2x_3 = 12$, E_{BCS}: $3x_1+3x_2+2x_3 = 12$ (KF) -> Schnittwinkel $\varphi = 79{,}52°$ -> Innenwinkel 100,48°; e) Gerade einer Seitenkante g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, Normalenvektor der Grundflächenebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ -> Schnittwinkel $\psi = 56{,}31°$.

Aufgabe 10: Ein Dreieck ABC stellt sich als massives Brett im x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem dar. Die Ecken des Dreiecks lauten: A(5|2|1), B(4|6|0), C(6|1|5). Das Dreieck wird von einer Lichtquelle

L(10|0|0) auf der x_1-Achse beleuchtet und wirft einen ebenfalls dreieckigen Schatten A'B'C' auf die x_2-x_3-Grundebene des Koordinatensystems.

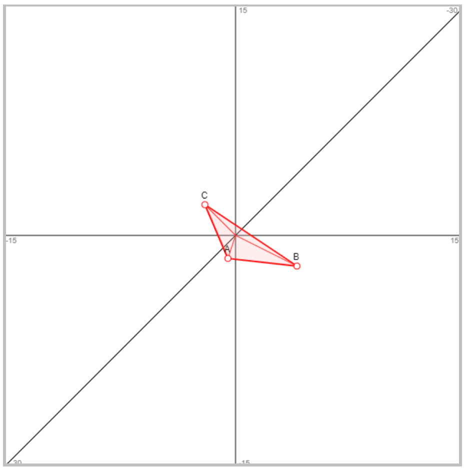
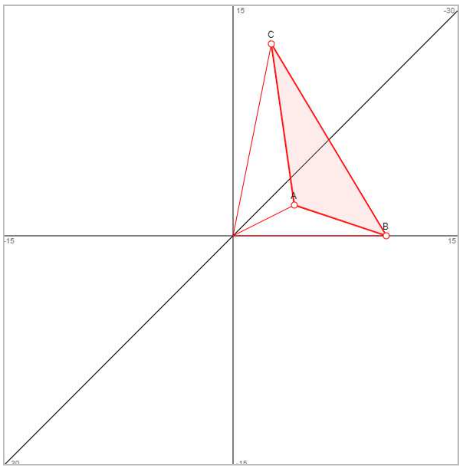
a) Bestimme die Koordinaten der Punkte A', B', C' als Ecken des Schattens.

b) Vergleiche die Winkel α und α' der Ecke A bzw. A' in den Dreiecken ABC und A'B'C'.

c) Vergleiche die Flächeninhalte der beiden Dreiecke.

Vorgehensweise: a) Geraden durch Lichtquelle L und Punkte A, B, C -> Spurpunkte der Geraden auf der x_2-x_3-Grundebene A', B', C'; b) Kosinusformel für Winkel; c) Kreuzprodukt und Dreieckflächen.

Lösung: a) Geraden g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, g_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ -> Spurpunkte der der x_2-x_3-Grundebene -> A'(0|4|2), B'(0|10|0), C'(0|2,5|12,5); b) Winkel α = 120°, α' = 116,57°; c) Flächen A = 7,8 FE, A' = 30 FE.

ΔABC   ΔA'B'C'

Aufgabe 11: Ein Flugzeug F startet vom Flughafen Q(6|4|0) (Koordinaten in Kilometern, Zeit in Minuten) in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Auch ein Ballon B startet bei Windstille vom Punkt R(10|0|0) aus mit einer Steiggeschwindigkeit von 4 m/s.

a) Unter welchem Steigungswinkel hebt das Flugzeug F vom Flughafen ab?

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Flugzeugs F (in Kilometer pro Stunde)?

c) Bei welchem Startzeitpunkt des Ballons B kommt es zu einer Kollision mit dem Flugzeug F?

Vorgehensweise: a) Gerade F der Flugbahn des Flugzeugs, Sinusformel zur Bestimmung des Winkels zwischen Richtungsvektor der Geraden und Normalenvektor der Flughafenebene; b) Geschwindigkeit als Betrag des Richtungsvektors; c) Gerade B des Ballons -> Schnittpunkt zwischen beiden Geraden, Parameterwerte.

Lösung: a) Gerade des Flugzeugs F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ -> Steigungswinkel φ = 19,47°; b) Geschwindigkeit v = 3 km/min = 180 km/h; c) Gerade des Ballons B: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}24 \end{pmatrix}$ -> F∩B: Schnittpunkt S(10|0|2) (r = 2, s = 8 1/3) -> Ballon darf nicht 6 Minuten 20 Sekunden vor dem Flugzeug starten.

Abkürzungen: ⊥ = orthogonal, || = parallel, FE = Flächeneinheiten, HNF = Hessesche Normalform, KF = Koordinatenform, LE = Längeneinheiten, LGS = lineares Gleichungssystem, Lsg. = Lösung/en, NF = Normalenform, PF = Parameterform, ^{T} = transponiert.