Michael Buhlmann

Mathematikprüfung
> Berufsfachschule/Berufsaufbauschule I

Einleitung: Die Mathematikprüfung zum Abschluss von Berufsfachschule und Berufsaufbauschule beinhaltet die Themenbereiche: Algebra, Gleichungen, Geraden und Parabeln; Geometrie, Trigonometrie, Körperberechnung; Wahrscheinlichkeitsrechnung, gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung).

Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel): Gegeben ist die Gleichung:

$$4(x-2) = 2x - 4.$$

a) Löse die Gleichung zeichnerisch.

b) Löse die Gleichung rechnerisch.

Aufgabe 2 (ohne Hilfsmittel): Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $2x + 5 = -3x + 10$

b) $4x^2 - 81 = 0$.

Aufgabe 3 (ohne Hilfsmittel): Gegeben sind die Geraden g: $y = \frac{1}{2}x - 3$ und h: $y = -2x - 8$.

a) Zeichne die Geraden in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem.

b) Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden.

c) Zeige, dass die beiden Geraden senkrecht zueinander stehen.

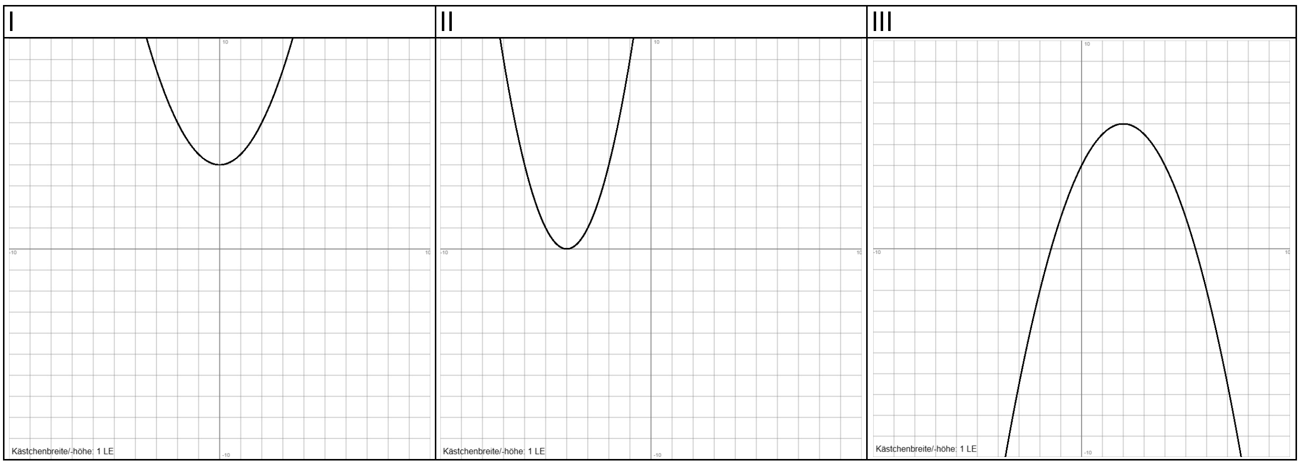
Aufgabe 4 (ohne Hilfsmittel): Gegeben ist die Parabel p: $y = (x-1)^2 - 4$.

a) Zeichne die Parabel in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem.

b) Lies die Punkte ab, in denen das Schaubild der Parabel die x- und die y-Achse des Koordinatensystems schneiden.

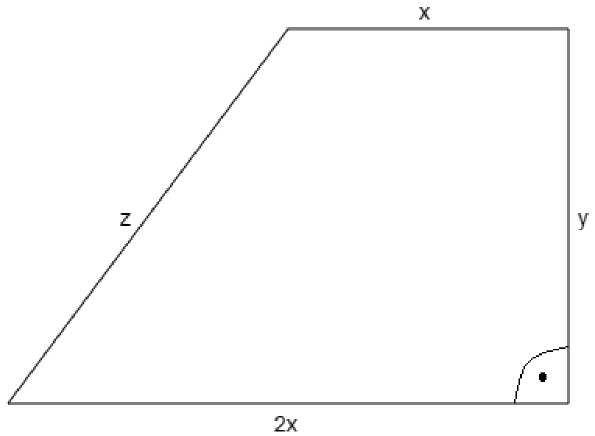
Aufgabe 5 (ohne Hilfsmittel): Gegeben ist die Parabel p: $y = -x^2 + 4$.

a) Begründe, dass keine der Parabeln in den drei nachstehenden Abbildungen zu der Parabel p gehört:



b) Zeige, dass x = -2 und x = 2 Nullstellen der Parabel p sind.

Aufgabe 6 (ohne Hilfsmittel): Gegeben ist das nachstehende rechtwinklige Trapez:

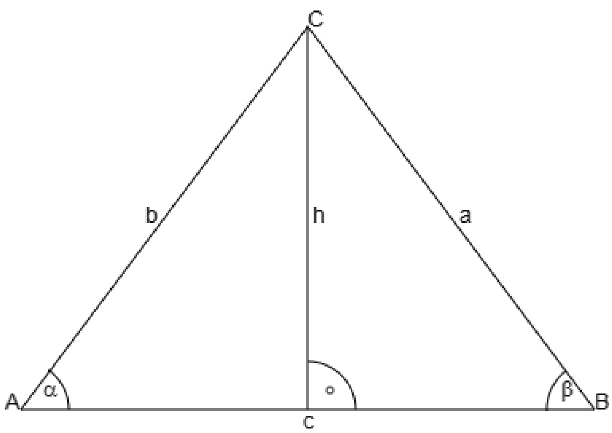


a) Es ist x = 3 cm, y = 4 cm. Berechne den Umfang u und den Flächeninhalt A des Trapezes.

b) Welche der nachfolgend angegebenen Terme passt zum Umfang u bzw. zum Flächeninhalt A des obigen Trapezes?

(1) $3x + y + z$ (2) $\frac{1}{2}xyz$ (3) $3x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ (4) $\frac{3}{2}xy$.

Aufgabe 7 (ohne Hilfsmittel): Im gleichschenkligen Dreieck ABC heißen die Seiten a, b Schenkel, die Seite c Basisseite, die Strecke h Höhe, die Winkel α, β Basiswinkel.



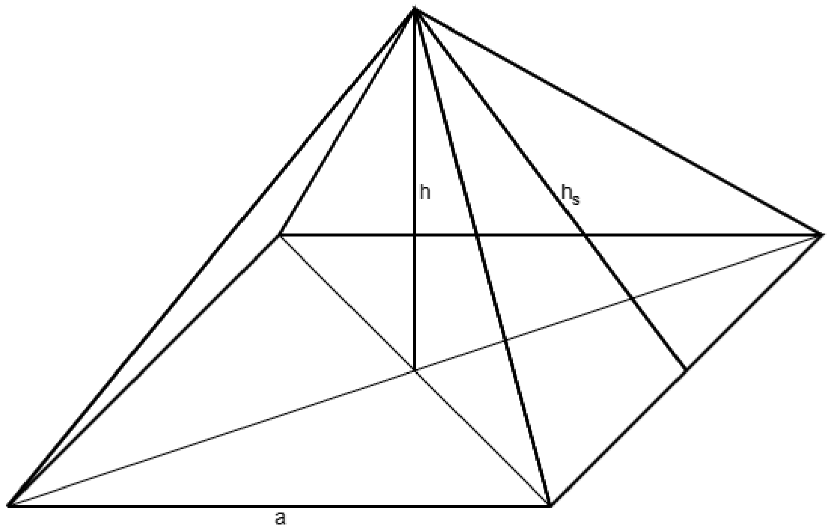
a) Welche der folgenden Beziehungen sind richtig, welche falsch?

(1) $a = b$ (2) $\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$ (3) $c^2 = a^2 + h^2$

(4) $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$ (5) $\alpha = \beta$ (6) $\cos(\beta) = \frac{c}{b}$

b) Es ist c = 12 cm und a = 10 cm. Berechne Umfang u und Flächeninhalt A des gleichschenkligen Dreiecks.

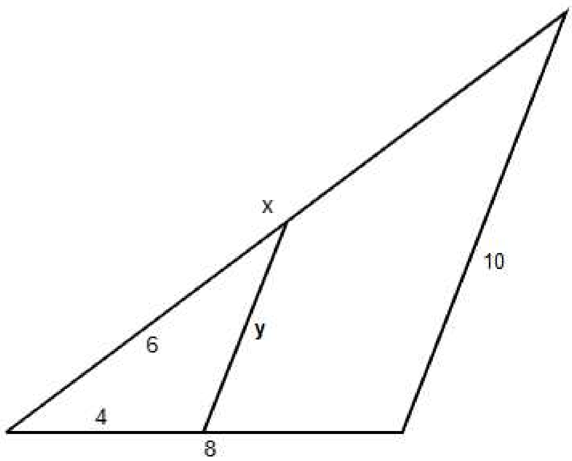
Aufgabe 8 (ohne Hilfsmittel): Eine regelmäßige quadratische Pyramide hat die Grundkante $a = 12$ cm, die Höhe $h = 8$ cm und die Seitenhöhe $h_s = 10$ cm.



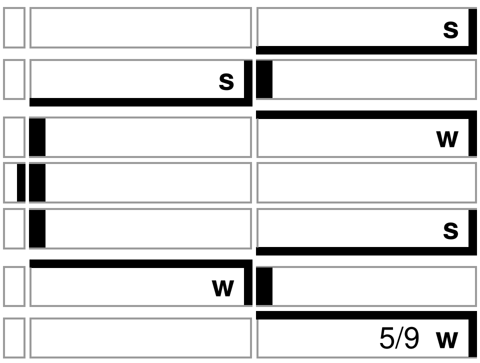
a) Berechne das Volumen V der Pyramide.

b) Berechne den Oberflächeninhalt der Pyramide.

Aufgabe 9 (ohne Hilfsmittel): Berechne die Strecken x und y (alle Angaben in cm; die Strecke y und die 10 cm lange Strecke liegen parallel).



Aufgabe 10 (ohne Hilfsmittel): In einem Kasten befinden sich schwarze (s) und weiße (w) Kugeln. Es werden aus dem Kasten zwei Kugeln ohne Zurücklegen entnommen. Folgender Wahrscheinlichkeitsbaum ist gegeben:

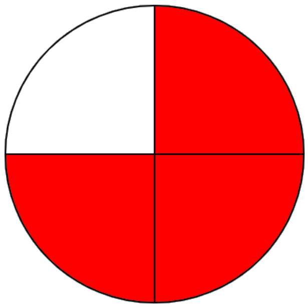


a) Vervollständige den Wahrscheinlichkeitsbaum.

b) Wie viele schwarze, wie viele weiße Kugeln befinden sich anfangs in der Schachtel?

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarze und eine weiße Kugel gezogen wurden.

Aufgabe 11 (ohne Hilfsmittel): Das nachstehende Glücksrad, bestehend aus den Segmenten „weiß" und „rot", wird zweimal gedreht.



a) Zeichne zum Zufallsexperiment einen passenden Wahrscheinlichkeitsbaum.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zweimal die Farbe „rot" gedreht wurde.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens einmal die Farbe „weiß" erscheint.

Aufgabe 12 (mit Hilfsmitteln): a) Löse die Gleichung:

$$0{,}5(4x-10) + 2 = 3x.$$

b) Bestimme die Lösungen der Gleichung:

$$2x^2 + 9x - 11 = 0.$$

c) Zeige, dass die Gleichung

$$3x^2 + 19 = 12$$

keine Lösung besitzt.

d) Löse die Gleichung:

$$(2x+1)(x-5) = 0.$$

Aufgabe 13 (mit Hilfsmitteln): Gegeben sind die Geraden g: $y = x + 3$, h: $y = -\frac{3}{2}x + 3$, k: $x = 4$.

a) Zeichne alle drei Geraden in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem.

b) Zeige, dass sich die Geraden g und h auf der y-Achse schneiden.

c) Der Schnittpunkt auf der y-Achse bildet zusammen mit den beiden anderen Schnittpunkten der Geraden g, h und k ein Dreieck. Berechne den Umfang des Dreiecks.

Aufgabe 14 (mit Hilfsmitteln): Gegeben sind die Punkte A(-1|-3), B(3|5), C(4|7) im x-y-Koordinatensystem.

a) Bestimme die Gerade g durch die Punkte A und B.

b) Bestimme die Gerade h durch den Punkt C mit der Steigung m = -3.

c) Zeige, dass der Punkt C Schnittpunkt der Geraden g und h ist.

d) Zeichne die Punkte A, B, C und die Geraden g und h in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem.

Aufgabe 15 (mit Hilfsmitteln): Löse das nachstehende lineare Gleichungssystem:

$$4x + y = -5$$
$$-2x + 4y = 16.$$

Aufgabe 16 (mit Hilfsmitteln): Gegeben ist die Parabel p durch die Gleichung:

$$p: y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4.$$

a) Ermittle den Scheitelpunkt der Parabel p.

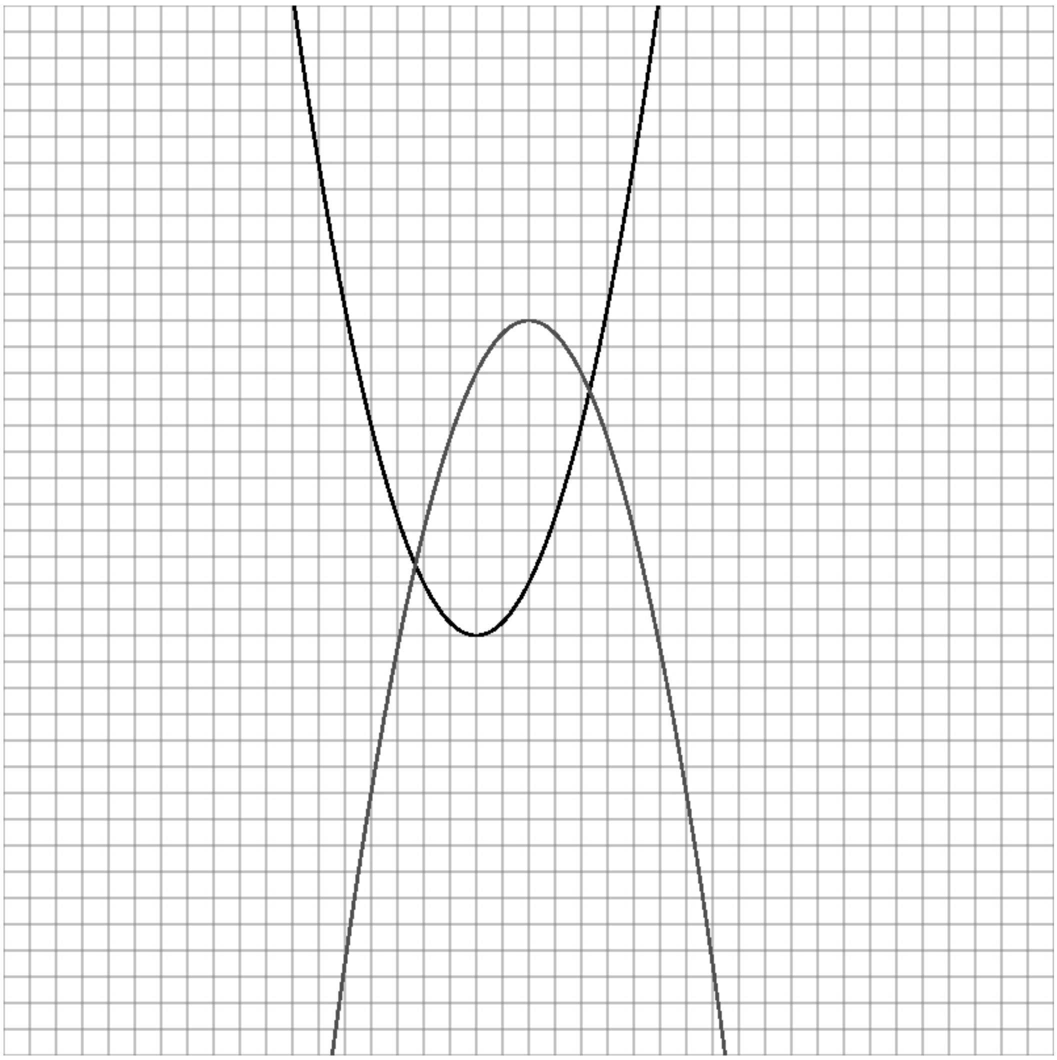
b) Berechne die Nullstellen der Parabel p.

c) Zeichne die Parabel p in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem.

d) Zeichne ebenfalls ein die Gerade g durch den y-Achsenabschnittspunkt und der positiven Nullstelle der Parabel p. Bestimme die Geradengleichung.

Aufgabe 17 (mit Hilfsmitteln): Gegeben sind die Funktionsgleichungen der Parabeln p und q mit:

$$p: y = (x+1)^2 - 2,\ q: y = -x^2 + 4.$$



a) Zeichne in das obige Schaubild die zu den vorgegebenen Parabeln p und q passenden skalierten und beschrifteten Koordinatenachsen ein. Kennzeichne die eingezeichneten Parabeln als p und q.

b) Ermittle die Scheitelpunkte S_1 und S_2 der Parabeln p und q. Bestimme den Abstand der Punkte.

c) Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$2(x+4)^2 + 15 = -30x + 3x^2.$$

Aufgabe 18 (mit Hilfsmitteln): Monatstarife für den Mobilfunk mittels Smartphone werden angeboten von den Anbietern A, B und C wie folgt:

Anbieter A: Grundgebühr € 5,-, Telefonie 10 ct/min
Anbieter B: Grundgebühr € 9,50, Telefonie 5 ct/min
Anbieter C: Flatrate € 25,-.

a) Stelle die Angebote der Anbieter mittels dreier Geradengleichungen in einem geeigneten x-y-Koordinatensystem dar.

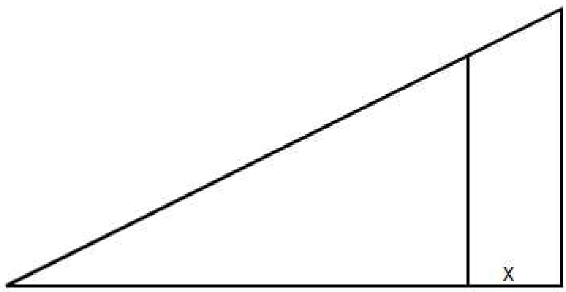
b) Lege dar, für welche Minutenzahlen an Telefonie der Anbieter A, der Anbieter B oder Anbieter C am günstigsten ist.

Aufgabe 19 (mit Hilfsmitteln): a) Die Raute ABCD hat die Diagonallängen e = 24 cm und f = 10 cm. Berechne den Umfang u und den Flächeninhalt A der Raute. Berechne die Winkel innerhalb der Raute.

b) Die Punkte A(0|0), B(8|4), C(5|8), D(-1|5) bilden im x-y-Koordinatensystem ein Viereck. Zeige, dass dieses Viereck ein Trapez ist. Berechne den Umfang u und den Flächeninhalt A.

c) Im rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete 4 cm länger als die andere, die Hypotenuse wiederum 4 cm länger als die längere Kathete. Berechne den Umfang u und den Flächeninhalt A.

d) Ergänze die fehlenden Größen in der Zeichnung nach den Strahlensätzen:

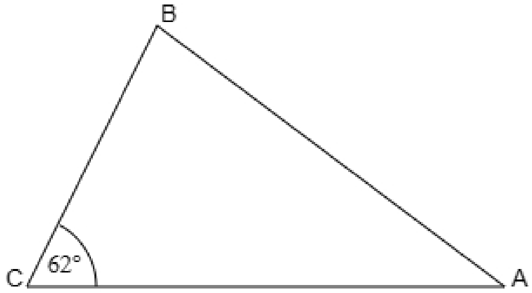


gemäß der Gleichung:

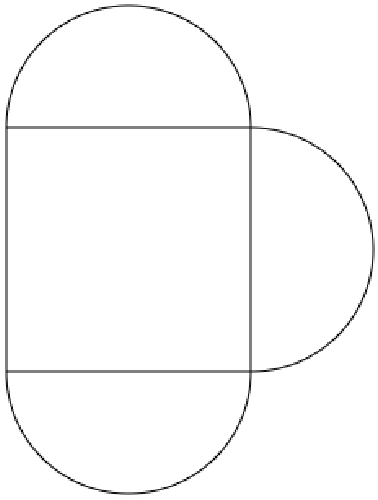
$$\frac{x+10}{10} = \frac{6}{5}$$

(alle Angaben in cm).

Aufgabe 20 (mit Hilfsmitteln): Die Orte A und C sind 5,5 km, die Orte B und C 3,8 km voneinander entfernt. Berechne die Entfernung zwischen den Orten A und B.



Aufgabe 21 (mit Hilfsmitteln): Mittelalterliche Kirchen haben manchmal als Ostabschluss eine Dreikonchenanlage, d.h. um einen quadratischen Raum schließen sich an drei Seiten Apsiden mit halbkreisförmigem Grundriss an.



a) Der quadratische Raum hat als Länge und Breite 20 m. Berechne die Grundfläche der Dreikonchenanlage.

b) Die Seitenlänge des Quadrats wird nun um 20 % vergrößert. Um wie viel Prozent wächst dadurch der Grundflächeninhalt?

Aufgabe 22 (mit Hilfsmitteln): Ein kreisförmiger Swimmingpool hat einen Durchmesser von 12 m und ist 2 m tief.

a) Boden und Seitenfläche des Pools sollen mit hellgrauen Kacheln ausgekleidet werden. Wie viel Quadratmeter Kacheln werden benötigt?

b) Um den Swimmingpool herum sollen dunkelgraue Bodenfliesen als Kreisring mit einer Breite von 1 m verlegt werden. Wie viel Quadratmeter Fliesen werden benötigt?

c) Die Preise für die Kacheln und die Fliesen betragen 42,90 €/m^2 bzw. 29,80 €/m^2. Wie hoch sind die Materialkosten für das Auslegen des Pools mit Kacheln und Fliesen?

d) Der Pool wird bis zu einer Höhe von 1,80 m mit Wasser gefüllt. Wie viel Liter Wasser werden benötigt?

Aufgabe 23 (mit Hilfsmitteln): a) Berechne den Oberflächeninhalt O und das Volumen V eines Zylinders mit Durchmesser d = 8 cm und Höhe h = 12 cm.

b) Ein Kegel hat als Mantellinie s = 20 dm, die Höhe beträgt h = 16 dm. Berechne den Durchmesser des Kegels.

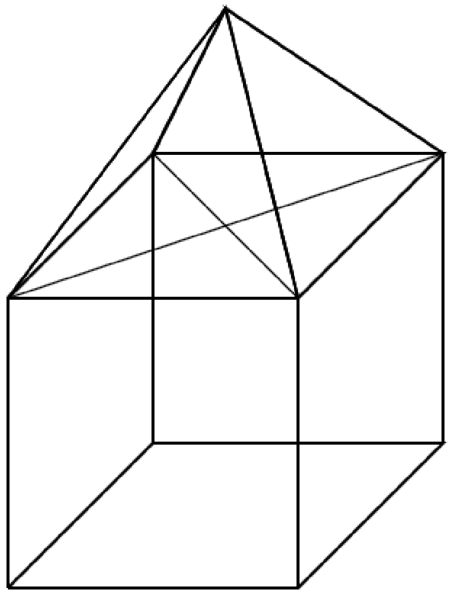
c) Gegeben ist ein Quader mit Rauminhalt V = 120 m^3. Die Grundfläche des Quaders ist ein Rechteck mit Länge a = 80 dm und Breite b = 300 cm. Berechne den Oberflächeninhalt O des Quaders.

d) Von einer regelmäßigen, quadratischen Pyramide sind der Flächeninhalt G = 256 cm^2 der Grundfläche und die Höhe h = 15 cm bekannt. Berechne den Oberflächeninhalt O der Pyramide.

e) Eine regelmäßige, quadratische Pyramide besitzt die Grundkante a = 10,6 cm; der Winkel zwischen Seitenhöhe und Grundfläche beträgt α = 78,3°. Berechne den Oberflächeninhalt O und das Volumen V der Pyramide.

f) Bei einem Kegel beträgt der Umfang der Grundfläche u = 96,8 cm, der Winkel zwischen Mantellinie und Grundfläche hat die Weite α = 30°. Berechne den Oberflächeninhalt O des Kegels.

Aufgabe 24 (mit Hilfsmitteln): Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem Würfel mit Seitenlänge 8 cm und einer Pyramide. Die Gesamthöhe des Körpers beträgt 14 cm.

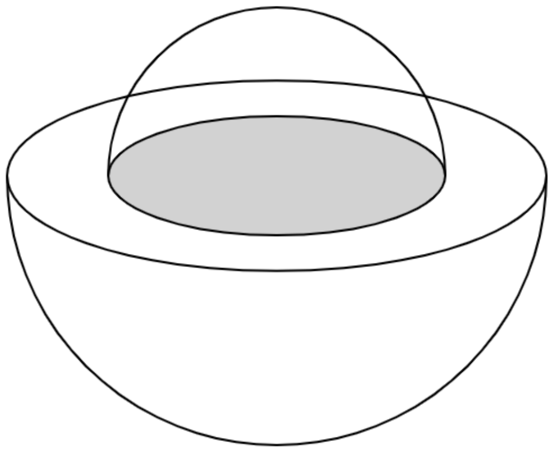


a) Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers.

b) In den zusammengesetzten Körper soll ein Kegel so einbeschreiben werden, dass die Grundfläche des Kegels auf der Würfelgrundfläche liegt, der Kegeldurchmesser mit der Kantenlänge des Würfels identisch ist und Kegel- und Pyramidenspitze übereinstimmen. Berechne das Volumen des Kegels. Wie groß ist der (Prozent-) Anteil dieses Volumens am Volumen des zusammengesetzten Körpers?

c) Der Winkel α ist der Winkel zwischen Pyramidenseitenfläche und -grundfläche, der Winkel β der zwischen Mantellinie und Kegelgrundfläche. Berechne den Unterschied zwischen den Winkelweiten.

Aufgabe 25 (mit Hilfsmitteln): Ein Körper ist zusammengesetzt aus zwei Halbkugeln mit den Radien $r_1 = 5$ cm und $r_2 = 8$ cm.



a) Berechne das Volumen V des Körpers. In welchem Verhältnis stehen die Rauminhalte der beiden Halbkugeln zueinander?

b) Berechne den Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers.

Aufgabe 26 (mit Hilfsmitteln): Eine Urne enthält vier grüne, eine rote und fünf weiße Kugeln. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

a) Zeichne das zugehörige Baumdiagramm mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass keine, eine oder zwei grüne Kugeln gezogen wurden.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Kugeln unterschiedlicher Farbe gezogen wurden.

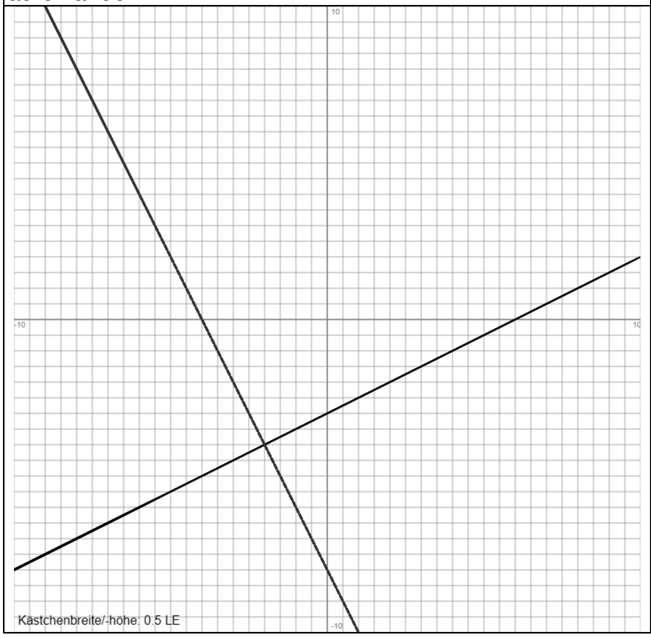
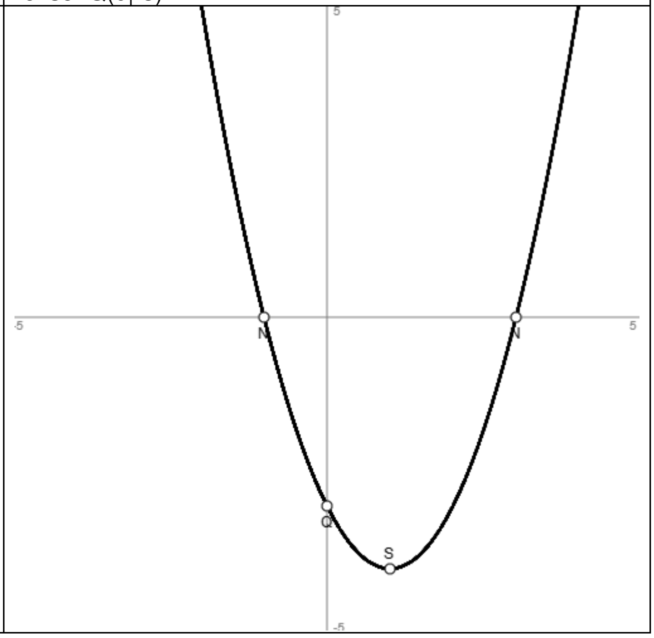
d) Gib zwei Ereignisse an, die die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{1}{10}$$

besitzen.

Lösungen: 1a) Schnittpunkt der Geraden y = 4x-8, y = 2x-4 als S(2|0) -> x=2 als Lösung der Gleichung; b) x=2.

2a) x=1; b) x=±9/2=±4,5.

3a), b) Schnittpunkt S(-2|-4), c) Geradensteigungen m = 1/2 und m = -2 -> 1/2·(-2) = -1 -> Geraden stehen senkrecht aufeinander.	4a), b) Normalparabel mit Scheitel S(1|-4) -> Schnittpunkte mit x-Achse als Nullstellen: x=-1, x=3; Schnittpunkt mit y-Achse: Q(0|-3).
	

5a) I: Parabel nach oben geöffnet, II: Parabel nach oben geöffnet und Parabelscheitelpunkt S(-4|0), III: Parabelscheitelpunkt S(2|6); b) x=-2 -> y=0, x=2 -> y=0.

6a) z = 5 cm -> Umfang u = 18cm, Flächeninhalt A = 18 cm^2; b) (1), (3): Umfang u, (4): Flächeninhalt A.

7a) Aussagen (1), (2), (4), (5) sind richtig/wahr, Aussagen (3), (6) sind falsch; b) Umfang u = 32 cm, Höhe h = 8 cm -> Flächeninhalt A = 48 cm^2.

8a) Volumen V = 384 cm^3; b) Oberflächeninhalt O = 384 cm^2.

9) x = 12 cm, y = 5 cm.

10a) Vollständiger Wahrscheinlichkeitsbaum (mit Auswertung, ohne Zurücklegen) -> b) (mindestens) 4 schwarze, 6 weiße Kugeln; c) p(1xSchwarz, 1xWeiß) = 2·4/10·6/9 = 8/15.

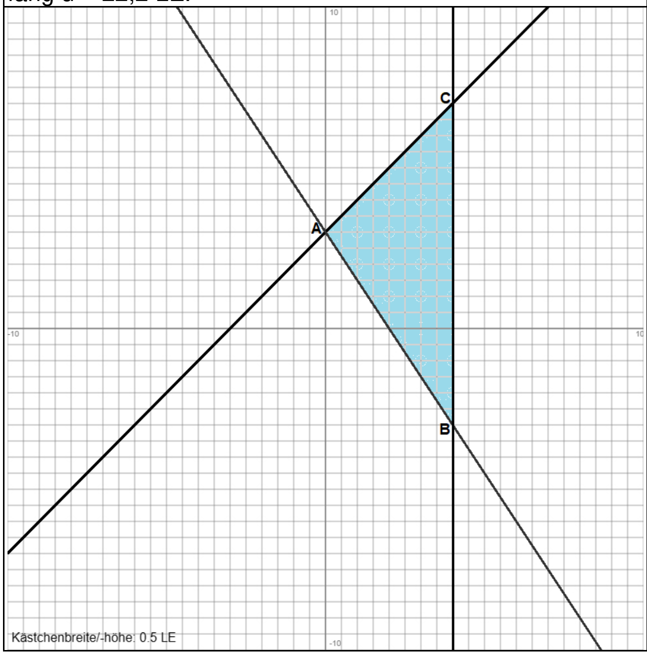
		3/9 **s**	>	p(**s**; **s**) =	0.1333333	**1**
	4/10 **s**					
		6/9 **w**	>	p(**s**; **w**) =	0.2666667	**2**
		4/9 **s**	>	p(**w**; **s**) =	0.2666667	**3**
	6/10 **w**					
		5/9 **w**	>	p(**w**; **w**) =	0.3333333	**4**

11a) Wahrscheinlichkeitsbaum (mit Auswertung, mit Zurücklegen) -> b) p(2xRot) = 0.5625, c) p(höchstens 1xWeiß) = 1 – p(2xWeiß) = 0.9375 (Gegenwahrscheinlichkeit).

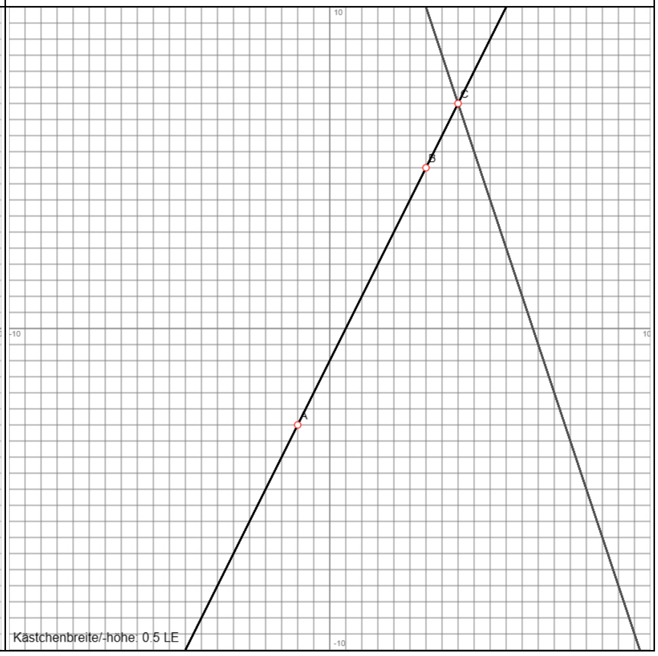
		1/4 **weiß**	>	p(**weiß; weiß**) =	0.0625	**1**
	1/4 **weiß**					
		3/4 **rot**	>	p(**weiß; rot**) =	0.1875	**2**
		1/4 **weiß**	>	p(**rot; weiß**) =	0.1875	**3**
	3/4 **rot**					
		3/4 **rot**	>	p(**rot; rot**) =	0.5625	**4**

12a) x=-3; b) x_1=-5,5, x_2=1; c) x^2=-7/3 -> keine Lösung; d) x_1=-0,5, x_2=5.

13a), b) A(0|3) auf y-Achse; c) Dreieckecken A, B(4|-3), C(4|7) -> Seitenlängen a=10 LE, b=5 LE, c=7,2 LE -> Umfang u = 22,2 LE.

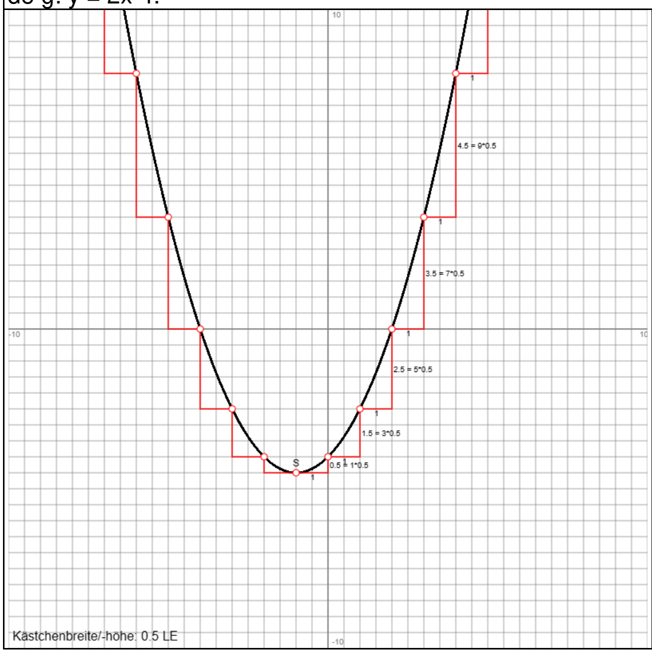


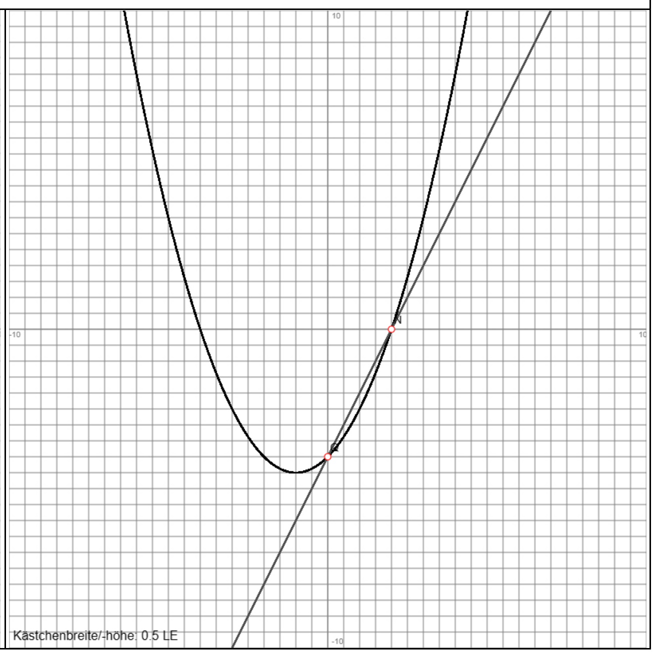
14a) g: y = 2x-1; b) h: y = -3x+19; c), d) Punktprobe -> C(4|7) auf den Geraden g und h.



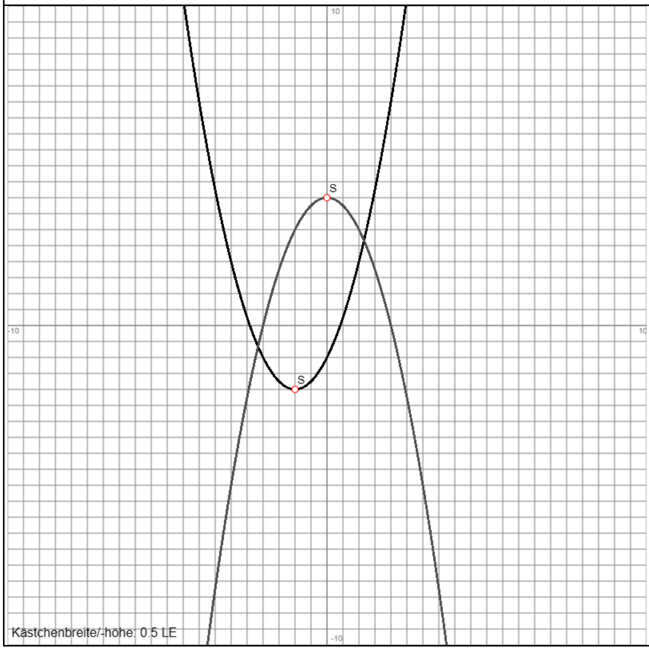
15) Lineares Gleichungssystem: y = -4x-5, y = 0,5x+4 -> Gleichsetzen -> x=-2, y=3.

16a) Scheitelpunkt S(-1|-4,5); b) Nullstellen x=-4, x=2; c), d) y-Achsenabschnittspunkt Q(0|-4), Nullstelle N(2|0) -> Gerade g: y = 2x-4.

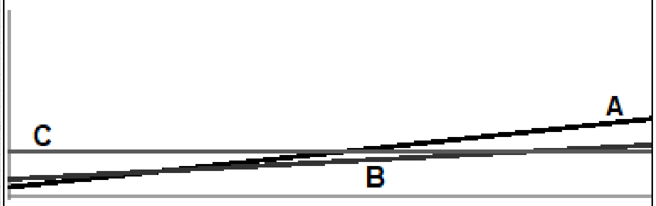




17a), b) Scheitelpunkte $S_1(-1|-2)$, $S_2(0|4)$, Abstand d = 6,1 LE; c) Gleichung -> $-x^2 + 46x + 47 = 0$ -> Lösungen: x=-1, x=47.

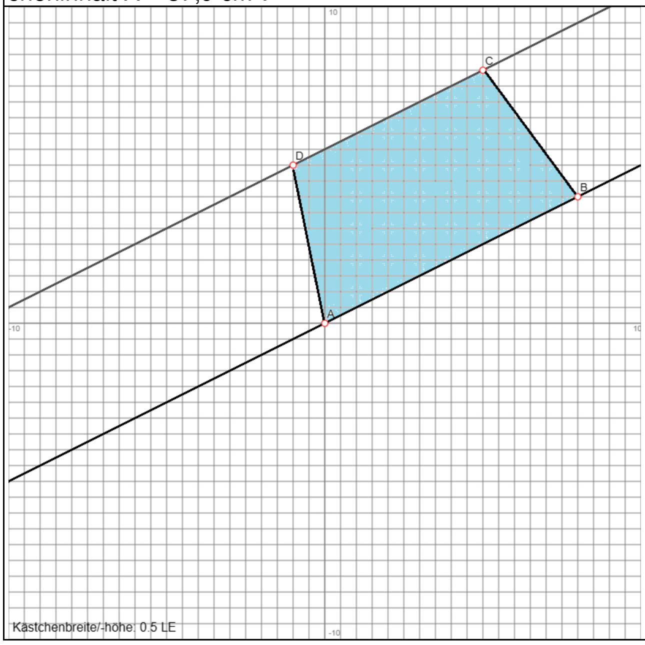


18a) A: y = 0,1x+5, B: y = 0,05x+9,5, C: y = 25; b) Schnittstellen: x=90, x=310 -> Telefonie: bis 90 min: A, zwischen 90 und 310 min: B, über 310 min: C.

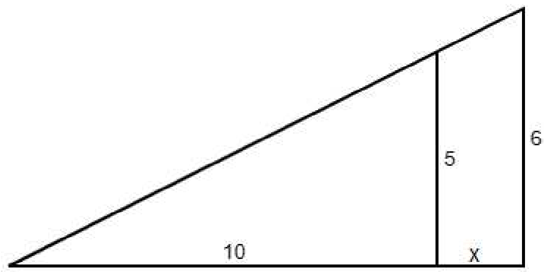


19a) Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich -> Satz des Pythagoras -> Seitenlänge a = 13 cm, Umfang u = 52 cm, Flächeninhalt A = 120 cm^2, Winkel α=134,8°, β=45,2°; c) Kathete x -> Satz des Pythagoras -> $x^2 + (x+4)^2 = (x+8)^2$ -> x=12 -> Katheten 12, 16 cm, Hypotenuse 20 cm -> Umfang u = 48 cm, Flächeninhalt A = 96 cm^2.

b) Geraden durch die Punkte A und B bzw. C und D haben dieselbe Steigung -> Trapez -> Umfang u = 25,7 LE, Flächeninhalt A = 37,9 cm^2.



d) 2. Strahlensatz -> x = 2 cm.



20. a = 3,8 km, b = 5,5 km -> Höhe h_b teilt allgemeines Dreieck ABC in zwei rechtwinklige Dreiecke -> Entfernung c = 5 km.

21a) Seitenlänge des Quadrats a_1 = 20 m -> Flächeninhalt $A_1 = 20^2 + 1{,}5\pi\cdot 10^2 = 871{,}24$ m^2; b) Seitenlänge des Quadrats $a_2 = 20\cdot 1{,}2 = 24$ m -> Flächeninhalt $A_2 = 24^2 + 1{,}5\pi\cdot 12^2 = 1254{,}58$ m^2 -> prozentuale Zunahme 44 %.

22a) Oberflächeninhalt O = 188,5 m^2; b) Kreisringflächeninhalt O = 40,84 m^2; c) Materialkosten K = 9303,68 €; d) Wasservolumen V = 203575,2 l.

23a) Höhe h = 12 cm, Durchmesser d = 8 cm -> Radius r = 4 cm -> Oberflächeninhalt O = 402,12 cm^2, Volumen V = 603,19 cm^3; b) Mantellinie s = 20 dm, Höhe h = 16 dm -> Radius r = 12 dm -> Durchmesser d = 24 dm; c) Volumen V = 120 m^3, a= 8 m, b = 3m -> Höhe c = 5 m -> Oberflächeninhalt O = 158 m^2; d) Grundflächeninhalt G = 256 cm^2 -> Grundkante a = 16 cm, Höhe h = 15 cm -> Seitenhöhe h_s = 17 cm -> Oberflächeninhalt O = 800 cm^2; e) Grundkante a = 10,6 cm -> a/2 = 5,3 cm -> Höhe h = 25,5 cm, Seitenhöhe h_s = 26,04 cm -> Oberflächeninhalt O = 664,41 cm^2, Volumen V = 955,06 cm^3; f) Umfang u = 96,8 cm -> Radius r = 15,4 cm -> Höhe h = 8,9 cm -> Mantellinie s = 17,8 cm -> Oberflächeninhalt O = 1605,8 cm^2.

24a) Würfelkante a = 8 cm, Pyramide: Grundkante a = 8 cm, Höhe h = 6 cm, Seitenhöhe h_s = 7,2 cm -> Gesamtvolumen V = 640 cm^3, Gesamtoberflächeninhalt O = 435,2 cm^2; b) Kegel: Radius r = 4 cm, h_K = 14 cm -> Kegelvolumen V_K =

234,57 cm^3 -> prozentualer Anteil 36,7 %; c) Winkel $\alpha = 56{,}3°$, $\beta = 74{,}1°$ -> Differenz β-α = 17,8°.

25a) Volumen $V = 2\pi \cdot 5^3/3 + 2\pi \cdot 8^3/3 = 1334{,}13$ cm^3, Verhältnis = $5^3 : 8^3 = 125:512$; b) Oberflächeninhalt (mit Kreisring) $O = 2\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 8^2 + \pi(8^2-5^2) = 681{,}73$ cm^2.

26a) Wahrscheinlichkeitsbaum; b) p(0xWeiß) = 2/9, p(1xWeiß) = 5/9, p(2xWeiß) = 2/9; c) p(verschiedene Farben) = 1 – p(gleiche Farben) = 29/45; d) p(1. gezogene Kugel ist rot) = 1/10, p(2. gezogene Kugel ist rot) = 4/90 + 5/90 = 9/90 = 1/10.

1.	2.	Ergebnisse, Wahrscheinlichkeiten			
	3/9 **grün**	>	p(**grün; grün**) =	0.1333333	**1**
4/10 **grün**	1/9 **rot**	>	p(**grün; rot**) =	0.0444444	**2**
	5/9 **weiß**	>	p(**grün; weiß**) =	0.2222222	**3**
	4/9 **grün**	>	p(**rot; grün**) =	0.0444444	**4**
1/10 **rot**					
	5/9 **weiß**	>	p(**rot; weiß**) =	0.0555556	5
	4/9 **grün**	>	p(**weiß; grün**) =	0.2222222	**6**
5/10 **weiß**	1/9 **rot**	>	p(**weiß; rot**) =	0.0555556	**7**
	4/9 **weiß**	>	p(**weiß; weiß**) =	0.2222222	**8**

(% = Prozent, cm = Zentimeter, cm^2 = Quadratzentimeter, dm = Dezimeter, dm^2 = Quadratdezimeter, dm^3 = l = Liter; FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten, m = Meter, m^2 = Quadratmeter, m^3 = Kubikmeter)

www.michael-buhlmann.de / 05.2023 / Mathematikprüfung: Berufsfachschule/Berufsaufbauschule I / Aufgaben 1844-1869