Michael Buhlmann

Mathematik
für Realschüler

Daten- und Aufgabenblätter zur Mathematik

Version 3

Essen 2019

Vorwort

Diese Sammlung aus Daten- und Aufgabenblättern geht aus einer jahrelangen Tätigkeit als Nachhilfelehrer für Mittelstufenschüler hervor. Die einzelnen Daten- und Aufgabenblätter wurden in einer sinnvollen Reihenfolge zusammengestellt. Zudem finden sich Rechenprogramme zu den behandelten Themen auf meiner Homepage

http://www.michael-buhlmann.de/Mathematik/index.htm

Die Mathematik für Realschüler gliedert sich hier in: Gleichungen, lineare Gleichungssysteme; Trigonometrie, Stereometrie; Sachaufgaben mit: Prozent-, Zinsrechnung, Datenanalyse, Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Essen im April 2019, *Michael Buhlmann*

Impressum:

© 2014/19 Wissenschaftlicher Selbstverlag Michael Buhlmann
Sedanstr. 35, D-45138 Essen, Deutschland
www.michael-buhlmann.de, kontakt-hp@michael-buhlmann.de

Inhalt

Datenblatt: Reelle Zahlen
Datenblatt: Teilweises Wurzelziehen
Datenblatt: Maße und Umrechnungen
Datenblatt: Gleichungen
Aufgabenblatt: Lineare Gleichungen
Aufgabenblatt: Quadratische Gleichungen
Aufgabenblatt: Bruchgleichungen
Datenblatt: Lineare Gleichungssysteme
Aufgabenblatt: Lineare Gleichungssysteme
Datenblatt: Geraden
Aufgabenblatt: Geraden
Datenblatt: Parabeln
Aufgabenblatt: Parabeln
Datenblatt: Ebene Geometrie
Datenblatt: Trigonometrie
Aufgabenblatt: Trigonometrie
Datenblatt: Prisma
Datenblatt: Regelmäßige Pyramiden
Datenblatt: Pyramidenstumpf
Datenblatt: Zylinder
Datenblatt: Kegel
Datenblatt: Kegelstumpf
Datenblatt: Kugel
Datenblatt: Räumliche Geometrie
Aufgabenblatt: Räumliche Geometrie
Datenblatt: Abhängigkeit von Formvariablen
Aufgabenblatt: Abhängigkeit von Formvariablen
Datenblatt: Prozentrechnung
Aufgabenblatt: Prozentrechnung
Datenblatt: Zinsrechnung
Aufgabenblatt: Zinsrechnung
Datenblatt: Daten, Diagramme
Aufgabenblatt: Daten, Diagramme
Datenblatt: Wahrscheinlichkeit
Aufgabenblatt: Wahrscheinlichkeit
Abschlussprüfungsaufgaben: Musterarbeit(en)

Datenblatt: Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen **R** ist Zahlenmenge aller abrechenden, periodischen und nichtperiodischen Dezimalzahlen. Auf den reellen Zahlen sind die Verknüpfungen + und * für Addition (Subtraktion) und Multiplikation (Division) definiert:

a+b, a–b, a*b, a/b (b≠0)

Terme sind Rezepte, sind mathematische Formeln, in die man gegebenenfalls Werte, Zahlen einsetzt. Mit Termen kann man daher auf dieselbe Weise rechnen wie mit Zahlen, d.h. es gelten für Zahlen a, b, c, d die Rechengesetze und Termumformungen (z.B. Punktrechnung vor Strichrechung, Klammerrechnung [Klammern auflösen, Ausklammern):

a + 0 = a, a – a = 0, a + b = b + a, (a + b) + c = a + (b + c),
1a = a, a(b + c) = ab + ac, (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd
+a = a, -1a = -a, +(+a) = a, +(-a) = -a, -(+a) = -a, -(-a) = a
+(a + b) = a + b, -(a + b) = -a – b
$a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$, $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$ …

Es gelten die binomischen Formeln:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (1. binomische Formel)

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (2. binomische Formel)

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (3. binomische Formel)

Es gelten die Bruchgesetze:

$\frac{a}{1} = a$, $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$, $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{na}{b}$, $1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, $n\frac{a}{b} = n + \frac{a}{b}$

Es gelten die Potenzgesetze:

$a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, $(ab)^n = a^n \cdot b^n$,

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $1^n = 1$, $(-1)^n = -1$ (n ungerade), $(-1)^n = 1$ (n gerade)

Es gelten die Wurzelgesetze:

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{a}^2 = |a|$

$\sqrt{a} = \sqrt{n^2 a_1} = \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{a_1} = n\sqrt{a_1}$ (teilweises Wurzelziehen)

Datenblatt: Teilweises Wurzelziehen

Rechenregel: Wurzeln, Teilweises Wurzelziehen

$\sqrt{1} = 1$
$\sqrt{4} = 2$
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
$\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
$\sqrt{36} = 6$
$\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
$\sqrt{44} = 2\sqrt{11}$
$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$
$\sqrt{54} = 3\sqrt{6}$
$\sqrt{56} = 2\sqrt{14}$
$\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$
$\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$
$\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$
$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$
$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$
$\sqrt{76} = 2\sqrt{19}$
$\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
$\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{84} = 2\sqrt{21}$
$\sqrt{88} = 2\sqrt{22}$
$\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$
$\sqrt{92} = 2\sqrt{23}$
$\sqrt{96} = 4\sqrt{6}$
$\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$
$\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$
$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{104} = 2\sqrt{26}$
$\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$
$\sqrt{112} = 4\sqrt{7}$
$\sqrt{116} = 2\sqrt{29}$
$\sqrt{117} = 3\sqrt{13}$
$\sqrt{120} = 2\sqrt{30}$
$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{124} = 2\sqrt{31}$
$\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$
$\sqrt{126} = 3\sqrt{14}$
$\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$
$\sqrt{132} = 2\sqrt{33}$
$\sqrt{135} = 3\sqrt{15}$
$\sqrt{136} = 2\sqrt{34}$
$\sqrt{140} = 2\sqrt{35}$
$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{147} = 7\sqrt{3}$
$\sqrt{148} = 2\sqrt{37}$
$\sqrt{150} = 5\sqrt{6}$
$\sqrt{152} = 2\sqrt{38}$
$\sqrt{153} = 3\sqrt{17}$
$\sqrt{156} = 2\sqrt{39}$
$\sqrt{160} = 4\sqrt{10}$
$\sqrt{162} = 9\sqrt{2}$
$\sqrt{164} = 2\sqrt{41}$
$\sqrt{168} = 2\sqrt{42}$
$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{171} = 3\sqrt{19}$
$\sqrt{172} = 2\sqrt{43}$
$\sqrt{175} = 5\sqrt{7}$
$\sqrt{176} = 4\sqrt{11}$
$\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$
$\sqrt{184} = 2\sqrt{46}$
$\sqrt{188} = 2\sqrt{47}$
$\sqrt{189} = 3\sqrt{21}$
$\sqrt{192} = 8\sqrt{3}$
$\sqrt{196} = 14$
$\sqrt{198} = 3\sqrt{22}$
$\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$
$\sqrt{204} = 2\sqrt{51}$
$\sqrt{207} = 3\sqrt{23}$
$\sqrt{208} = 4\sqrt{13}$
$\sqrt{212} = 2\sqrt{53}$
$\sqrt{216} = 6\sqrt{6}$
$\sqrt{220} = 2\sqrt{55}$
$\sqrt{224} = 4\sqrt{14}$
$\sqrt{225} = 15$
$\sqrt{228} = 2\sqrt{57}$
$\sqrt{232} = 2\sqrt{58}$
$\sqrt{234} = 3\sqrt{26}$
$\sqrt{236} = 2\sqrt{59}$
$\sqrt{240} = 4\sqrt{15}$
$\sqrt{242} = 11\sqrt{2}$
$\sqrt{243} = 9\sqrt{3}$
$\sqrt{244} = 2\sqrt{61}$
$\sqrt{245} = 7\sqrt{5}$
$\sqrt{248} = 2\sqrt{62}$
$\sqrt{250} = 5\sqrt{10}$
$\sqrt{252} = 6\sqrt{7}$
$\sqrt{256} = 16$
$\sqrt{260} = 2\sqrt{65}$
$\sqrt{261} = 3\sqrt{29}$
$\sqrt{264} = 2\sqrt{66}$
$\sqrt{268} = 2\sqrt{67}$
$\sqrt{270} = 3\sqrt{30}$
$\sqrt{272} = 4\sqrt{17}$
$\sqrt{275} = 5\sqrt{11}$
$\sqrt{276} = 2\sqrt{69}$
$\sqrt{279} = 3\sqrt{31}$
$\sqrt{280} = 2\sqrt{70}$
$\sqrt{284} = 2\sqrt{71}$
$\sqrt{288} = 12\sqrt{2}$
$\sqrt{289} = 17$
$\sqrt{292} = 2\sqrt{73}$
$\sqrt{294} = 7\sqrt{6}$
$\sqrt{296} = 2\sqrt{74}$
$\sqrt{297} = 3\sqrt{33}$
$\sqrt{300} = 10\sqrt{3}$
$\sqrt{304} = 4\sqrt{19}$
$\sqrt{306} = 3\sqrt{34}$
$\sqrt{308} = 2\sqrt{77}$
$\sqrt{312} = 2\sqrt{78}$
$\sqrt{315} = 3\sqrt{35}$
$\sqrt{316} = 2\sqrt{79}$
$\sqrt{320} = 8\sqrt{5}$
$\sqrt{324} = 18$
$\sqrt{325} = 5\sqrt{13}$
$\sqrt{328} = 2\sqrt{82}$
$\sqrt{332} = 2\sqrt{83}$
$\sqrt{333} = 3\sqrt{37}$
$\sqrt{336} = 4\sqrt{21}$
$\sqrt{338} = 13\sqrt{2}$
$\sqrt{340} = 2\sqrt{85}$
$\sqrt{342} = 3\sqrt{38}$
$\sqrt{343} = 7\sqrt{7}$
$\sqrt{344} = 2\sqrt{86}$
$\sqrt{348} = 2\sqrt{87}$
$\sqrt{350} = 5\sqrt{14}$
$\sqrt{351} = 3\sqrt{39}$
$\sqrt{352} = 4\sqrt{22}$
$\sqrt{356} = 2\sqrt{89}$
$\sqrt{360} = 6\sqrt{10}$
$\sqrt{361} = 19$
$\sqrt{363} = 11\sqrt{3}$
$\sqrt{364} = 2\sqrt{91}$
$\sqrt{368} = 4\sqrt{23}$
$\sqrt{369} = 3\sqrt{41}$
$\sqrt{372} = 2\sqrt{93}$
$\sqrt{375} = 5\sqrt{15}$
$\sqrt{376} = 2\sqrt{94}$
$\sqrt{378} = 3\sqrt{42}$
$\sqrt{380} = 2\sqrt{95}$
$\sqrt{384} = 8\sqrt{6}$
$\sqrt{387} = 3\sqrt{43}$
$\sqrt{388} = 2\sqrt{97}$
$\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$
$\sqrt{396} = 6\sqrt{11}$
$\sqrt{400} = 20$
$\sqrt{404} = 2\sqrt{101}$
$\sqrt{405} = 9\sqrt{5}$
$\sqrt{408} = 2\sqrt{102}$
$\sqrt{412} = 2\sqrt{103}$
$\sqrt{414} = 3\sqrt{46}$
$\sqrt{416} = 4\sqrt{26}$
$\sqrt{420} = 2\sqrt{105}$
$\sqrt{423} = 3\sqrt{47}$
$\sqrt{424} = 2\sqrt{106}$
$\sqrt{425} = 5\sqrt{17}$
$\sqrt{428} = 2\sqrt{107}$
$\sqrt{432} = 12\sqrt{3}$
$\sqrt{436} = 2\sqrt{109}$
$\sqrt{440} = 2\sqrt{110}$
$\sqrt{441} = 21$
$\sqrt{444} = 2\sqrt{111}$
$\sqrt{448} = 8\sqrt{7}$
$\sqrt{450} = 15\sqrt{2}$
$\sqrt{452} = 2\sqrt{113}$
$\sqrt{456} = 2\sqrt{114}$
$\sqrt{459} = 3\sqrt{51}$
$\sqrt{460} = 2\sqrt{115}$
$\sqrt{464} = 4\sqrt{29}$
$\sqrt{468} = 6\sqrt{13}$
$\sqrt{472} = 2\sqrt{118}$
$\sqrt{475} = 5\sqrt{19}$
$\sqrt{476} = 2\sqrt{119}$
$\sqrt{477} = 3\sqrt{53}$
$\sqrt{480} = 4\sqrt{30}$
$\sqrt{484} = 22$
$\sqrt{486} = 9\sqrt{6}$
$\sqrt{488} = 2\sqrt{122}$
$\sqrt{490} = 7\sqrt{10}$
$\sqrt{492} = 2\sqrt{123}$
$\sqrt{495} = 3\sqrt{55}$
$\sqrt{496} = 4\sqrt{31}$
$\sqrt{500} = 10\sqrt{5}$
$\sqrt{504} = 6506$
$\sqrt{507} = 13\sqrt{3}$
$\sqrt{508} = 2\sqrt{127}$
$\sqrt{512} = 16\sqrt{2}$
$\sqrt{513} = 3\sqrt{57}$
$\sqrt{516} = 2\sqrt{129}$
$\sqrt{520} = 2\sqrt{130}$
$\sqrt{522} = 3\sqrt{58}$
$\sqrt{524} = 2\sqrt{131}$
$\sqrt{525} = 5\sqrt{21}$
$\sqrt{528} = 4\sqrt{33}$
$\sqrt{529} = 23$
$\sqrt{531} = 3\sqrt{59}$
$\sqrt{532} = 2\sqrt{133}$
$\sqrt{536} = 2\sqrt{134}$
$\sqrt{539} = 7\sqrt{11}$
$\sqrt{540} = 6\sqrt{15}$
$\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$
$\sqrt{548} = 2\sqrt{137}$
$\sqrt{549} = 3\sqrt{61}$
$\sqrt{550} = 5\sqrt{22}$
$\sqrt{552} = 2\sqrt{138}$
$\sqrt{556} = 2\sqrt{139}$
$\sqrt{558} = 3\sqrt{62}$
$\sqrt{560} = 4\sqrt{35}$
$\sqrt{564} = 2\sqrt{141}$
$\sqrt{567} = 9\sqrt{7}$
$\sqrt{568} = 2\sqrt{142}$
$\sqrt{572} = 2\sqrt{143}$
$\sqrt{575} = 5\sqrt{23}$
$\sqrt{576} = 24$
$\sqrt{578} = 17\sqrt{2}$
$\sqrt{580} = 2\sqrt{145}$
$\sqrt{584} = 2\sqrt{146}$
$\sqrt{585} = 3\sqrt{65}$
$\sqrt{588} = 14\sqrt{3}$
$\sqrt{592} = 4\sqrt{37}$
$\sqrt{594} = 3595$
$\sqrt{596} = 2\sqrt{149}$
$\sqrt{600} = 10\sqrt{6}$
$\sqrt{603} = 3\sqrt{67}$
$\sqrt{604} = 2\sqrt{151}$
$\sqrt{605} = 11\sqrt{5}$
$\sqrt{608} = 4\sqrt{38}$
$\sqrt{612} = 6\sqrt{17}$
$\sqrt{616} = 2\sqrt{154}$
$\sqrt{620} = 2\sqrt{155}$
$\sqrt{621} = 3\sqrt{69}$
$\sqrt{624} = 4\sqrt{39}$
$\sqrt{625} = 25$
$\sqrt{628} = 2\sqrt{157}$
$\sqrt{630} = 3\sqrt{70}$
$\sqrt{632} = 2\sqrt{158}$
$\sqrt{636} = 2\sqrt{159}$
$\sqrt{637} = 7\sqrt{13}$
$\sqrt{639} = 3\sqrt{71}$
$\sqrt{640} = 8\sqrt{10}$
$\sqrt{644} = 2\sqrt{161}$
$\sqrt{648} = 18\sqrt{2}$
$\sqrt{650} = 5\sqrt{26}$
$\sqrt{652} = 2\sqrt{163}$
$\sqrt{656} = 4\sqrt{41}$
$\sqrt{657} = 3\sqrt{73}$
$\sqrt{660} = 2\sqrt{165}$
$\sqrt{664} = 2\sqrt{166}$
$\sqrt{666} = 3\sqrt{74}$
$\sqrt{668} = 2\sqrt{167}$
$\sqrt{672} = 4\sqrt{42}$
$\sqrt{675} = 15\sqrt{3}$
$\sqrt{676} = 26$
$\sqrt{680} = 2\sqrt{170}$
$\sqrt{684} = 6\sqrt{19}$
$\sqrt{686} = 7\sqrt{14}$
$\sqrt{688} = 4\sqrt{43}$
$\sqrt{692} = 2\sqrt{173}$
$\sqrt{693} = 3\sqrt{77}$
$\sqrt{696} = 2\sqrt{174}$
$\sqrt{700} = 10\sqrt{7}$
$\sqrt{702} = 3\sqrt{78}$
$\sqrt{704} = 8\sqrt{11}$
$\sqrt{708} = 2\sqrt{177}$
$\sqrt{711} = 3\sqrt{79}$
$\sqrt{712} = 2\sqrt{178}$
$\sqrt{716} = 2\sqrt{179}$
$\sqrt{720} = 12\sqrt{5}$
$\sqrt{722} = 19\sqrt{2}$
$\sqrt{724} = 2\sqrt{181}$
$\sqrt{725} = 5\sqrt{29}$
$\sqrt{726} = 11\sqrt{6}$
$\sqrt{728} = 2\sqrt{182}$
$\sqrt{729} = 27$
$\sqrt{732} = 2\sqrt{183}$
$\sqrt{735} = 7\sqrt{15}$
$\sqrt{736} = 4\sqrt{46}$
$\sqrt{738} = 3\sqrt{82}$
$\sqrt{740} = 2\sqrt{185}$
$\sqrt{744} = 2\sqrt{186}$
$\sqrt{747} = 3\sqrt{83}$
$\sqrt{748} = 2\sqrt{187}$
$\sqrt{750} = 5\sqrt{30}$
$\sqrt{752} = 4\sqrt{47}$
$\sqrt{756} = 6\sqrt{21}$
$\sqrt{760} = 2\sqrt{190}$
$\sqrt{764} = 2\sqrt{191}$
$\sqrt{765} = 3\sqrt{85}$
$\sqrt{768} = 16\sqrt{3}$
$\sqrt{772} = 2\sqrt{193}$
$\sqrt{774} = 3\sqrt{86}$
$\sqrt{775} = 5\sqrt{31}$
$\sqrt{776} = 2\sqrt{194}$
$\sqrt{780} = 2\sqrt{195}$
$\sqrt{783} = 3\sqrt{87}$
$\sqrt{784} = 28$
$\sqrt{788} = 2\sqrt{197}$
$\sqrt{792} = 6\sqrt{22}$
$\sqrt{796} = 2\sqrt{199}$
$\sqrt{800} = 20\sqrt{2}$
$\sqrt{801} = 3\sqrt{89}$
$\sqrt{804} = 2\sqrt{201}$
$\sqrt{808} = 2\sqrt{202}$
$\sqrt{810} = 9\sqrt{10}$
$\sqrt{812} = 2\sqrt{203}$
$\sqrt{816} = 4\sqrt{51}$
$\sqrt{819} = 3\sqrt{91}$
$\sqrt{820} = 2\sqrt{205}$
$\sqrt{824} = 2\sqrt{206}$
$\sqrt{825} = 5\sqrt{33}$
$\sqrt{828} = 6\sqrt{23}$
$\sqrt{832} = 8\sqrt{13}$
$\sqrt{833} = 7\sqrt{17}$
$\sqrt{836} = 2\sqrt{209}$
$\sqrt{837} = 3\sqrt{93}$
$\sqrt{840} = 2\sqrt{210}$
$\sqrt{841} = 29$
$\sqrt{844} = 2\sqrt{211}$
$\sqrt{845} = 13\sqrt{5}$
$\sqrt{846} = 3\sqrt{94}$
$\sqrt{847} = 11\sqrt{7}$
$\sqrt{848} = 4\sqrt{53}$
$\sqrt{850} = 5\sqrt{34}$
$\sqrt{852} = 2\sqrt{213}$
$\sqrt{855} = 3\sqrt{95}$
$\sqrt{856} = 2\sqrt{214}$
$\sqrt{860} = 2\sqrt{215}$
$\sqrt{864} = 12\sqrt{6}$
$\sqrt{867} = 17\sqrt{3}$
$\sqrt{868} = 2\sqrt{217}$
$\sqrt{872} = 2\sqrt{218}$
$\sqrt{873} = 3\sqrt{97}$
$\sqrt{875} = 5\sqrt{35}$
$\sqrt{876} = 2\sqrt{219}$
$\sqrt{880} = 4\sqrt{55}$
$\sqrt{882} = 21\sqrt{2}$
$\sqrt{884} = 2\sqrt{221}$
$\sqrt{888} = 2\sqrt{222}$
$\sqrt{891} = 9\sqrt{11}$
$\sqrt{892} = 2\sqrt{223}$
$\sqrt{896} = 8\sqrt{14}$
$\sqrt{900} = 30$
$\sqrt{904} = 2\sqrt{226}$
$\sqrt{908} = 2\sqrt{227}$
$\sqrt{909} = 3\sqrt{101}$
$\sqrt{912} = 4\sqrt{57}$
$\sqrt{916} = 2\sqrt{229}$
$\sqrt{918} = 3\sqrt{102}$
$\sqrt{920} = 2\sqrt{230}$
$\sqrt{924} = 2\sqrt{231}$
$\sqrt{925} = 5\sqrt{37}$
$\sqrt{927} = 3\sqrt{103}$
$\sqrt{928} = 4\sqrt{58}$
$\sqrt{931} = 7\sqrt{19}$
$\sqrt{932} = 2\sqrt{233}$
$\sqrt{936} = 6\sqrt{26}$
$\sqrt{940} = 2\sqrt{235}$
$\sqrt{944} = 4\sqrt{59}$
$\sqrt{945} = 3\sqrt{105}$
$\sqrt{948} = 2\sqrt{237}$
$\sqrt{950} = 5\sqrt{38}$
$\sqrt{952} = 2\sqrt{238}$
$\sqrt{954} = 3\sqrt{106}$
$\sqrt{956} = 2\sqrt{239}$
$\sqrt{960} = 8\sqrt{15}$
$\sqrt{961} = 31$
$\sqrt{963} = 3\sqrt{107}$
$\sqrt{964} = 2\sqrt{241}$
$\sqrt{968} = 22\sqrt{2}$
$\sqrt{972} = 18\sqrt{3}$
$\sqrt{975} = 5\sqrt{39}$
$\sqrt{976} = 4\sqrt{61}$
$\sqrt{980} = 14\sqrt{5}$
$\sqrt{981} = 3\sqrt{109}$
$\sqrt{984} = 2\sqrt{246}$
$\sqrt{988} = 2\sqrt{247}$
$\sqrt{990} = 3\sqrt{110}$
$\sqrt{992} = 4\sqrt{62}$
$\sqrt{996} = 2\sqrt{249}$
$\sqrt{999} = 3\sqrt{111}$
$\sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$

Datenblatt: Maße und Umrechnungen

Länge:

Umrechnung	km	m	dm	cm	mm
km	·1	·1.000	·10.000	·100.000	·1.000.000
m	:1000	·1	·10	·100	·1.000
dm	:10000	:10	·1	·10	·100
cm	:100000	:100	:10	·1	·10
mm	:1000000	:1000	:100	:10	·1

Fläche:

Umrechnung	km^2	ha	a	m^2	dm^2	cm^2
km^2	·1	·100	·10.000	·1.000.000	·100.000.000	·10.000.000.000
ha	:100	·1	·100	·10.000	·1.000.000	·100.000.000
a	:10000	:100	·1	·100	·10.000	·1.000.000
m^2	:1000000	:10000	:100	·1	·100	·10.000
dm^2	:100000000	:1000000	:10000	:100	·1	·100
cm^2	:10000000000	:100000000	:1000000	:10000	:100	·1

Volumen:

Umrechnung	km^3	m^3	dm^3 = l	cm^3 = ml
km^3	·1	·1.000.000.000	·1000.000.000.000	·1.000.000.000.000.000
m^3	:1000000000	·1	·1.000	·1.000.000
dm^3 = l	:1000000000000	:1000	·1	·1.000
cm^3 = ml	:1000000000000000	:1000000	:1000	·1

Gewicht:

Umrechnung	t	kg	g	mg
t	·1	·1.000	·1.000.000	·1.000.000.000
kg	:1000	·1	·1.000	·1.000.000
g	:1000000	:1000	·1	·1.000
mg	:1000000000	:1000000	:1000	·1

Zeit:

Umrechnung	Tag	h	min	sek
Tag	·1	·24	·1.440	·86.400
h	·0,0416667	·1	·60	·3.600
min	·0,000694444	·0,016667	·1	·60
sek	·0,0000115740	·0,00027777	·0,016667	·1

Datenblatt: Gleichungen

Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Gleichungen sind da definiert, wo beide Terme definiert sind (Definitionsbereich der Gleichung). Die Lösungsmenge einer Gleichung umfasst die Unbekannten, die die Gleichung lösen. Nach den in der Gleichung vorliegenden Termen werden Gleichungen linear, quadratisch, …, Potenz-, Exponentialgleichungen oder trigonometrische Gleichungen genannt (Typen von Gleichungen). Im Folgenden seien alle Unbekannten x und Koeffizienten reell.

Lineare Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form:

$$ax + b = 0$$

mit den Zahlen a, b genügen. Die Lösung der linearen Gleichung ist für $a \neq 0$ dann:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Die lineare Gleichung ax + b = 0 entspricht damit grafisch der Nullstelle einer Geraden y = ax + b mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b.

Quadratische Gleichungen sind von der Form:

$ax^2 + bx + c = 0$	
$a \neq 0$, b = 0	a =1, b = p, c = q
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $\frac{c}{a}$<0), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $\frac{c}{a}$>0)	Gemischt quadratische Gleichung (p-q-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)
	Quadratische Gleichung hat die Form: $(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1$, $x = x_2$)

Quadratische Gleichungen

Bruchgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die Brüche enthalten. Bruchgleichungen einfacher Art können auf lineare und quadratische Gleichungen zurückgeführt werden durch: 1)

Definitionsbereich, Umstellen/Vereinfachen der Bruchgleichung (Kürzen von Brüchen, Addition/Division/Multiplikation von Zahlen), 2) Multiplikation der Bruchgleichung mit dem Hauptnenner aus den vorkommenden Brüchen, 3) Ausmultiplizieren der mit Nennern bzw. Hauptnenner malgenommenen Terme (Summen, Differenzen), 4) Sortieren nach x^2, x und einfachen Zahlen, z.B. durch Addition und Subtraktion von Summanden zur Erzeugung einer Null auf einer Seite der Gleichung, 6) Auflösen der so erhaltenen linearen und quadratischen Gleichung nach x, z.B. mit Hilfe der p-q-Formel, 7) Probe (Vergleich vorläufige Lösungsmenge-Definitionsbereich).

<u>Beispiele</u> (lineare Gleichungen):

a) $14x - 7 = 21$	| +7
$14x = 28$	| :2
$x = 2$	(Lösung) / Lösungsmenge L ={2}
b) $3x - 2 = 2x - 3$	| +2
$3x = 2x - 1$	| -2x
$x = -1$	(Lösung) / Lösungsmenge L ={-1}
c) $2(x+4) = 3(x-1) + 2$	(Ausmultiplizieren)
$2x + 8 = 3x - 3 + 2$	(Addieren)
$2x + 8 = 3x - 1$	| -8
$2x = 3x - 9$	| -3x
$-x = -9$	| ·(-1)
$x = 9$	(Lösung) / Lösungsmenge L ={9}
d) $\frac{1}{8}(2x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(x-\frac{1}{4}) - \frac{5}{16}$	| ·16 (Hauptnenner)
$2(2x+\frac{1}{2}) = 8(x-\frac{1}{4}) - 5$	(Ausmultiplizieren)
$4x + 1 = 8x - 2 - 5$	(Zusammenfassen)
$4x + 1 = 8x - 7$	| +7
$4x + 8 = 8x$	| -4x
$8 = 4x$	| :4
$x = 2$	(Lösung) / Lösungsmenge L ={2}

<u>Beispiele</u> (quadratische Gleichungen):

a) (Rein quadratische Gleichung:)

$4x^2 + 5 = 2x^2 + 23$	| $-2x^2$
$2x^2 + 5 = 23$	| -5
$2x^2 = 18$	| :2
$x^2 = 9$	| √
$x = \pm 3$	(Lösungen) / Lösungsmenge L = {-3;3}

b) (Gemischt quadratische Gleichung:)

$x^2 - 4x + 4 = 0$	(p-q-Formel)
$x = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 4}$	(Ausrechnen)
$x = 2 \pm \sqrt{4-4}$	(Ausrechnen)
$x = 2 \pm 0$	(Ausrechnen)
$x = 2$	(Lösung)) / Lösungsmenge L ={2}
c) $x^2 + x - 2 = 0$	(p-q-Formel)
$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-2)}$	(Ausrechnen)

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$ (Ausrechnen)

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$ (Ausrechnen)

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$ (Ausrechnen)

$x_1 = -2$, $x_2 = 1$ (Lösungen) / Lösungsmenge L ={-2;1}

d) $32x^2 + 96x - 128 = 0$ | :32

$x^2 + 3x - 4 = 0$ (p-q-Formel)

$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$ (Ausrechnen)

$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$ (Ausrechnen)

$x_1 = -4$, $x_2 = 1$ (Lösungen) / Lösungsmenge L ={-4;1}

e) $\frac{1}{2}x^2 + x + 2 = \frac{x}{10}(3x - 4)$ | $\cdot 10$ (Hauptnennermultiplikation)

$5x^2 + 10x + 20 = x(3x-4)$ (Ausmultiplizieren)

$5x^2 + 10x + 20 = 3x^2 - 4x$ | $-3x^2$

$2x^2 + 10x + 20 = -4x$ | $+4x$

$2x^2 + 14x + 20 = 0$ | :2

$x^2 + 7x + 10 = 0$ (p-q-Formel)

$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10}$ (Ausrechnen)

$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$ (Ausrechnen)

$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$ (Ausrechnen)

$x_1 = -5$, $x_2 = -2$ (Lösungen) / Lösungsmenge L ={-5;-2}

<u>Beispiele</u> (Bildung von Hauptnennern):

a) Nenner: x, x+1 -> Hauptnenner: x(x+1)
b) Nenner: 2x, 4x, 16x, Hauptnenner: 16x
c) Nenner: x-4, 2x-8, 12-3x -> Faktorisieren: x-4, 2(x-4), -3(x-4) -> Hauptnenner: 6(x-4)
d) Nenner: x^2-9, x+3, 3x+9 -> Faktorisieren: (x-3)(x+3), x+3, 3(x+3) -> Hauptnenner: 3(x-3)(x+3)
e) Nenner: x^2+4x+4, x+2 -> Faktorisieren: $(x+2)^2$, x+2 -> Hauptnenner: $(x+2)^2$
f) Nenner: 2x-2, 4x+4, x^2-1 -> Faktorisieren: 2(x-1), 4(x+1), (x-1)(x+1) -> Hauptnenner: 4(x-1)(x+1)

<u>Beispiele</u> (Bruchgleichungen):

a) $\frac{10+x}{24x} - \frac{x+4}{12x} = 1 - \frac{x+3}{8x}$ | $\cdot 24x$ (Hauptnennermultiplikation) / D = **R**\{0}

$\frac{10+x}{24x} \cdot 24x - \frac{x+4}{12x} \cdot 24x = 1 \cdot 24x - \frac{x+3}{8x} \cdot 24x$ (Kürzen)

(10+x) – 2(x+4) = 24x – 3(x+3) (Ausmultiplizieren)

10+x – 2x-8 = 24x – 3x-9 (Zusammenfassen)

2-x = 21x-9 | +x

2 = 22x-9 | +9

11 = 22x | :22

$x = \frac{1}{2}$ (Lösung) / Lösungsmenge L = $\{\frac{1}{2}\}$

b) $\frac{3}{x+1} = 2 - \frac{1}{x-1}$ | ·(x+1)(x-1) (Hauptnennermultiplikation) /

D = **R**\{-1, 1} (Definitionsbereich)

$\frac{3}{x+1} \cdot (x+1)(x-1) = 2 \cdot (x+1)(x-1) - \frac{1}{x-1} \cdot (x+1)(x-1)$ (Kürzen)

3·(x-1) = 2·(x+1)(x-1) – (x+1) (Ausrechnen: 3. binomische Formel)
3·(x-1) = 2·(x^2-1) – (x+1) (Ausrechnen)
3x-3 = $2x^2$-2 –x–1 (Sortieren, Zusammenfassen)
3x-3 = $2x^2$ –x -3 | +3
3x = $2x^2$-x | -3x
0 = $2x^2$ -4x | :2
x^2 – 2x = 0 (p-q-Formel)

$x = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 0}$ (Ausrechnen)

$x = 1 \pm \sqrt{1}$ (Ausrechnen)
x = 1 ± 1 (Ausrechnen)
x_1 = 0, x_2 = 2 (Lösungen) / Lösungsmenge L = {0; 2}

c) $2 - \frac{1}{x^2+4x} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x+4}$ (Faktorisieren)

$2 - \frac{1}{x(x+4)} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x+4}$ | x(x+4) (Hauptnennermultiplikation) /

D = **R**\{-4;0} (Definitionsbereich)

$2x(x+4) - \frac{1}{x(x+4)} x(x+4) = \frac{1}{x} x(x+4) + \frac{4}{x+4} x(x+4)$ (Kürzen)

$2x(x+4) - 1 = (x+4) + 4x$ Ausmultiplizieren
$2x^2 + 8x - 1 = 5x + 4$ |-5x
$2x^2 + 3x - 1 = 4$ |-4
$2x^2 + 3x - 5 = 0$ |:2
$x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0$ p-q-Formel

$x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{2}} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{7}{4}$ (Ausrechnen)

$x = -\frac{5}{2},\ x = 1$ (Lösungen) / Lösungsmenge L = {-2,5;1}

d) $\frac{3x^2 + 11x - 15}{3x^2 - 75} = \frac{x-2}{2x-10} - \frac{x+1}{3x+15}$ (Faktorisieren:

$3x^2$ – 75 = 3(x^2-25) = 3(x-5)(x+5)
(3. binomische Formel)
2x – 10 = 2(x-5)
3x+15 = 3(x+5))

$\frac{3x^2 + 11x - 15}{3(x-5)(x+5)} = \frac{x-2}{2(x-5)} - \frac{x+1}{3(x+5)}$ | ·6(x-5)(x+5) (Hauptnenner:

3(x-5)(x+5)
2(x-5)
3 (x+5)
6(x-5)(x+5)

Definitionsbereich: Nebenrechnung ->

6(x-5)(x+5) = 0
x-5 = 0, x+5 = 0
x=5, x=-5
-> D = **R**\{-5;5})

$$\frac{(3x^2+11x-15)\cdot 6(x-5)(x+5)}{3(x-5)(x+5)} = \frac{(x-2)\cdot 6(x-5)(x+5)}{2(x-5)} - \frac{(x+1)\cdot 6(x-5)(x+5)}{3(x+5)}$$ (Kürzen)

$(3x^2+11x-15)\cdot 2 = (x-2)\cdot 3\cdot(x+5)-(x+1)\cdot 2\cdot(x-5)$ (Klammern auflösen)

$6x^2+22x-30 = 3\cdot(x^2+5x-2x-10)-2\cdot(x^2-5x+x-5)$

$6x^2+22x-30 = 3x^2+15x-6x-30-2x^2+10x-2x+10$ (Zusammenfassen)

$6x^2+22x-30 = x^2+17x-20$ | $-x^2$, -17x, + 20

$5x^2+5x-10 = 0$ | :5

$x^2+x-2 = 0$ (p-q-Formel=

$$x = -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$$ (Ausrechnen)

$x = -\frac{1}{2}-\frac{3}{2} = -2,\ x = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} = 1$ (Lösungen) / Lösungsmenge L = {-2, 1}

e) $\frac{x^2+3x+2}{(3x+1)(x-1)} - \frac{5x}{6x+2} = \frac{3x}{2x-2}$ (Faktorisieren:

6x+2 = 2(3x+1)
2x-2 = 2(x-1))

$\frac{x^2+3x+2}{(3x+1)(x-1)} - \frac{5x}{2(3x+1)} = \frac{3x}{2(x-1)}$ | ·2(3x+1)(x-1) (Hauptnenner:

(3x+1)(x-1)
2(3x+1)
2 (x-1)
2(3x+1)(x-1)

Definitionsbereich -> D = **R**\{$-\frac{1}{3}$;1})

$$\frac{(x^2+3x+2)\cdot 2(3x+1)(x-1)}{(3x+1)(x-1)} - \frac{5x\cdot 2(3x+1)(x-1)}{2(3x+1)} = \frac{3x\cdot 2(3x+1)(x-1)}{2(x-1)}$$ (Kürzen)

$(x^2+3x+2)\cdot 2-5x\cdot(x-1) = 3x\cdot(3x+1)$ (Klammern auflösen)

$2x^2+6x+4-5x^2-5x = 9x^2+3x$ (Zusammenfassen)

$-3x^2+11x+4 = 9x^2+3x$ | $+3x^2$, -11x, -4

$0 = 12x^2-8x-4$ | :12

$x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3} = 0$ (p-q-Formel)

$$x = \frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{3}{9}} = \frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{1}{3}\pm\frac{2}{3}$$ (Ausrechnen)

$x = \frac{1}{3}-\frac{2}{3} = -\frac{1}{3},\ x = \frac{1}{3}+\frac{2}{3} = 1$ (Lösungen) / Lösungsmenge L = {}

(Beide vorläufigen Lösungen sind nicht in D = **R**\{-$\frac{1}{3}$, 1} enthalten.)

Aufgabenblatt: Lineare Gleichungen

1. Löse die folgenden linearen Gleichungen:

a) 2x + 17 = 21

b) 14 + 2x = 11 – 7x

c) $\frac{2}{3}x+5=\frac{3}{4}x-6$

d) $61-(5x+2)+(x-7)=8x-20$

e) 4x + 13 – 7x = 20 – 5x + 31

f) 5(x+3) = 25 + 7(2–x)

g) 4(x–1) – (2x+3) = 3(3x+1) – 38

h) 15 – 2(x–8) = x + 7(17–2x)

i) $\frac{1}{2}(x+3)=\frac{1}{4}(2-x)+\frac{1}{6}x$

j) $\frac{1}{8}(2x+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{4})-\frac{5}{16}$

k) $0{,}3(4-5x)-0{,}5(6-7x)+0{,}7(8-9x)=1{,}1-4x$

l) $9[3x-2(4x+3)+7]-2[5(x+9)-6x+1]=3(5-8x)+2x-119$

Lösungen: 1a) 2 / 1b) -1/3 / 1c) Hauptnenner = 12 -> 8x+60=9x-72 -> 132 / 1d) 6 / 1e) 19 / 1f) 2 / 1g) 4 / 1h) 8 / 1i) Hauptnenner = 12 -> 6(x+3) = 3(2-x)+2x -> -12/7 / 1j) Hauptnenner = 16 -> 2(x+0,5)=8(x-0,25)-5 -> 2 / 1k) 9 / 1l) 1.

Aufgabenblatt: Quadratische Gleichungen

1. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 = 729$
b) $16x^2 – 144 = 0$
c) $4x^2 + 31 = 76 – x^2$
d) $x^2 + 3x – 10 = 0$
e) $x^2 + 8x – 33 = 0$
f) $x^2 – 33x + 272 = 0$
g) $x^2 – 3{,}6x + 1{,}28 = 0$
h) $x^2 + 5x = 6$
i) $4x^2 – 4x + 1 = 0$
j) $4x = 8x^2$
k) $5x^2 + 87x – 506 = 0$
l) $14 = 9x^2 – 15x$
m) $x(x-7) = \frac{1}{2}(7-x)$
n) $0{,}5x^2 + 2x – 6 = 0$
o) $3x^2 = 5x – 2$
p) $\frac{1}{2}x(2x+3) = \frac{2}{5}(3x-1)+5$

2. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $(x–4)^2 + (x–7)^2 = 29$
b) $(x+4)^2 – (x–5)^2 – (x–1)^2 = 14x – 1$
c) $(2x+1)^2 – (2x–1)^2 = (2x–1)(2x+1) + 1$
d) $2(x–3)^2 – 3(x–5)^2 – 4(x–7)^2 – (3x–5) = 0$
e) $(x-2)(x+2) + 2(x–4)^2 = x(x–11) + 35$
f) $-2(x–3)^2 + (x–3)(x+5) = 5(-3+5x)$
g) $2x(x–4) + 17 + 4x = -(x+1)(x–1) + (x+2)^2$
h) $2(2x–5)(3x+4) – (2–3x)^2 = (x+3)^2 + 67$
i) $\frac{1}{3}(x-3)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2 = \frac{5}{6}$
j) $\frac{(x-1)(x+1)}{4} + \frac{(x-2)^2}{2} = \frac{(x+1)^2}{2} - 3x + \frac{21}{4}$
k) $\frac{x(x-5)}{6} + \frac{(x+4)^2}{3} = \frac{x(x+5)}{2} - \frac{x^2-37}{6}$
l) $\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(2x+\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{100}$

<u>Lösungen</u>: 1a) -27; 27 / 1b) -3; 3 / 1c) -3; 3 / 1d) -5; 2 / 1e) -11; 3 / 1f) 16; 17 / 1g) 0,4; 3,2 / 1h) -6; 1 / 1i) 0,5 / 1j) 0; 0,5 / 1k) -22; 11,5 / 1l) -2/3; 7/3 1m) x^2-6,5x-3,5=0 -> -0,5; 7 / 1n) -6; 2 / 1o) 2/3; 1 / 1p) -2,3: 2.
2a) $2x^2$–22x+36=0 -> 2; 9 / 2b) x^2-6x+9=0 -> 3 / 2c) $4x^2$ – 8x = 0 -> 0; 2 / 2d) $-5x^2$+71x-248=0 -> 6,2; 8 / 2e) $2x^2$-5x-7=0 -> -1; 3,5 / 2f) –x^2-11x-18=0 -> -9; -2 / 2g) $2x^2$-8x+12=0 -> keine Lösung / 2h) $2x^2$-8x-120=0 -> -6; 10 / 2i) Hauptnenner = 6 -> $5x^2$-18x+16 = 0 -> 1,6; 2 / 2j) Hauptnenner = 4 -> x^2=16 -> -4; 4 / 2k) Hauptnenner = 6 -> $6x^2$–29x–5=0-> -1/6; 5 / 2l) Hauptnenner = 300 -> -700x^2–740x–40=0 -> -1; -2/35.

Aufgabenblatt: Bruchgleichungen

1. Löse die folgenden Bruchgleichungen:

a) $\frac{1}{x}-\frac{1}{4}=\frac{x}{8}$

b) $\frac{1}{10x}-\frac{4}{5x}=\frac{1}{4x}-\frac{19}{20}$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x+7}{2x-4}=\frac{3(x-2)}{8}$

d) $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-4}=\frac{5}{4}$

e) $1+\frac{8}{x-4}-\frac{16}{x^2-16}=0$

f) $\frac{4}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$

g) $\frac{x+3}{x}-\frac{15}{x^2+3x}=-\frac{2x+1}{x+3}$

h) $\frac{3(x-2)}{x+2}-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2+2x}$

i) $\frac{3x^2-4x-15}{x-1}=3-x$

j) $\frac{18}{(x+2)(x-3)}=\frac{1-10x}{3x+6}+\frac{8x}{2x-6}$

k) $\frac{3(x+3)}{(x+2)^2}=\frac{2x+5}{2x+4}+\frac{5x+2}{x+2}$

l) $\frac{x^2+25x+100}{2x^2+20x+50}=\frac{2x+3}{x+5}-\frac{x-6}{2x+10}$

Lösungen: 1a) Nenner: x, 4, 8 -> Hauptnenner = 8x -> D=**R**\{0} -> x^2+2x-8=0 -> L={-4; 2} /
1b) Nenner: 10x, 5x, 4x, 20 -> Hauptnenner = 20x -> D=**R**\{0} -> -14=5–19x -> L = {1} /
1c) Nenner: 2, 2(x-2), 8 -> Hauptnenner = 8(x-2) -> D=**R**\{2} -> $4x^2$-4x+28=$3x^2$-12x+12 -> L={-4} /
1d) Nenner: (x+2), (x-4), 4 -> Hauptnenner = 4(x+2)(x-4) -> D = **R**\{-2; 4} -> $5x^2$-6x-8=0 -> L = {-0,8; 2} /
1e) Nenner: (x-4), (x-4)(x+4) -> Hauptnenner = (x-4)(x+4) -> D=**R**\{-4; 4} -> x^2+8x=0 -> L={-8; 0} /
1f) Nenner: (x-1), (x+1), (x-1)(x+1) -> Hauptnenner = (x-1)(x+1) -> D=**R**\{-1; 1} -> 6x+2=2 -> L ={0} /
1g) Nenner: x, x(x+3), (x+3) -> Hauptnenner = x(x+3) -> D=**R**\{-3; 0} -> x^2+6x-6=-$2x^2$-x -> L={2/3} /
1h) Nenner: (x+2), x, x(x+2) -> Hauptnenner = x(x+2) -> D=**R**\{-2; 0} -> $3x^2$-7x-2=x^2-2x+1 -> L={-1/2; 3} /
1i) Hauptnenner = (x-1) -> D=**R**\{1} -> $4x^2$-8x-12=0 -> L={-1; 3} /
1j) Nenner: (x+2)(x-3), 3(x+2), 2(x-3) -> Hauptnenner = 6(x+2)(x-3) -> D = **R**\{-2; 3} -> $4x^2$+110x-114=0 -> L = {-28,5; 1} /
1k) Nenner. $(x+2)^2$, 2(x+2), (x+2) -> Hauptnenner = $2(x+2)^2$ -> D=**R**\{-2} -> $12x^2$+27x=0 -> L = {-2,25; 0} /
1l) Nenner: $2(x+5)^2$, (x+5), 2(x+5) -> Hauptnenner = $2(x+5)^2$ -> D=**R**\{-5} -> $2x^2$+2x-40=0 -> L={4}.

Datenblatt: Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten habe die Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \qquad (2)$$

mit den reellen Variablen x_1, x_2, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{22} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, b_2. Das lineare Gleichungssystem hat dann entweder keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Zur Bestimmung der Variablen x_1 und x_2 gilt Folgendes:

Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Gleichsetzungsverfahren: Beide Gleichungen (1) und (2) werden nach derselben Variablen aufgelöst, die zwei Ausdrücke gleichgesetzt, die daraus entstandene Gleichung nach der anderen Variablen aufgelöst, die Lösung in eine der nach der ersten Variablen aufgelösten Gleichung einsetzen, um die zweite Variable zu errechnen.

Einsetzungsverfahren: Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen, Variable in die andere Gleichung einsetzen, Lösung dieser Gleichung ermitteln, Lösung in die Gleichung für die aufgelöste Variable einsetzen.

Additionsverfahren: Hier führt die Addition des Vielfachen einer Gleichung zu der anderen zur Elimination einer Variablen. Die zweite Variable kann bestimmt werden, Einsetzen in eine der Ursprungsgleichungen führt zur Bestimmung der anderen Variablen.

Beispiele:

a) (Gleichsetzungsverfahren:)

x + y = 24 4x - 2y = -120	I | -x (Auflösen nach y) II
y = 24 – x 4x - 2y = -120	I II | -4x (Auflösen nach y)
y = 24 – x -2y = -120 – 4x	 | :(-2)
y = 24 – x y = 60 + 2x	I II (Gleichsetzen I = II)
y = 24 -x 24 – x = 60 + 2x	 | +x
y = 24 – x 24 = 60 + 3x	 | -60
y = 24 – x -36 = 3x	 | :3
y = 24 – x x = -12	I II (Einsetzen von x in I)
y = 24 – (-12) = 24+12 = 36 x = -12	 Lösung: x=-12, y=36 -> L={(-12;36)}

b) (Additionsverfahren:)

5x + 4 + 2y = 10 4x – 3 + 3y = -1	| -4 | +3
5x + 2y = 6 4x + 3y = 2	I | ·3 (Vorbereitung zur | ·(-2) Elimination von y)
15x + 6y = 18 -8x – 6y = -4	Ia (Ersetzen durch I) II (Addition I + II)
5x + 2y = 6 7x = 14	I | :7
5x + 2y = 6 x = 2	I II (Einsetzen von x in I)

$5 \cdot 2 + 2y = 6$ $x = 2$	
$2y = -4$ $x = 2$	| :2
$y = -2$ $x = 2$	Lösung: x=2, y=-2 -> L={2;-2)}

c) (Einsetzungsverfahren:)

$2x + 4y = 8$ $-x + 3y = 1$	I II | -3y
$2x + 4y = 8$ $-x = 1 - 3y$	| $\cdot(-1)$
$2x + 4y = 8$ $x = -1 + 3y$	I II (Einsetzen von x in I)
$2 \cdot (-1+3y) + 4y = 8$ $x = -1 + 3y$	I II
$-2 + 6y + 4y = 8$ $x = -1 + 3y$	| +2
$10y = 10$ $x = -1 + 3y$	| :10 II (Einsetzen von y in II)
$y = 1$ $x = -1 + 3y$	I (Einsetzen von y in II) II
$y = 1$ $x = -1 + 3 \cdot 1 = 2$	Lösung: x=2, y=1 -> L={(2;1)}

Aufgabenblatt: Lineare Gleichungssysteme

1. Löse folgende lineare Gleichungssysteme:

a) $y = 5x - 3$
$y = 2x + 3$

b) $2x + 3y = 5$
$4x - 3y = 1$

c) $y = 2x + 4$
$3x - 2y = -18$

d) $x = 2y + 11$
$x = -3y - 14$

e) $-x - 2y = 18$
$2x - 5y = 36$

f) $x + 4y = 10$
$3x - 10y = 19$

g) $3\cdot(x-y) + 4\cdot(y+1) = 17$
$3\cdot(x-3) - 2\cdot(y-x) = 9$

h) $15x - (7y+x) = 7$
$13x - 2(7y-x) = 1$

i) $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 2\frac{5}{6}$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 3$

j) $\frac{x}{3} + \frac{y}{8} = 9$
$\frac{x}{9} - \frac{y}{10} = -\frac{2}{5}$

k) $x + 2(y+2) = 12$
$\frac{1}{2}(x+4) - 3(y-1) = -3$

l) $5(y-1) - 3(x-7) = 1$
$\frac{2}{3}y + \frac{20+x}{3} = 1$

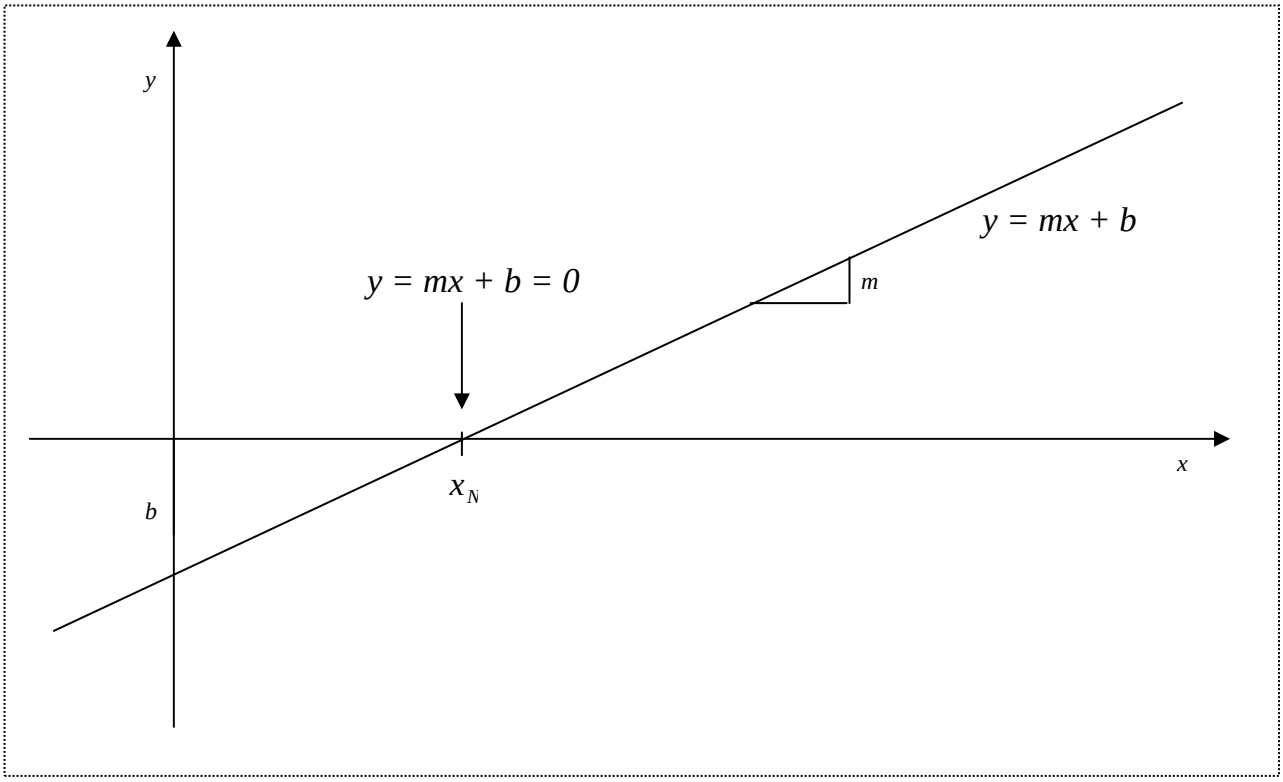
m) $\frac{3y-7}{2} - 5 = x$
$y - 6 = \frac{x+3}{5}$

n) $\frac{x-3}{2} = y + 1$
$\frac{2x-5}{3} - 10(y-1) = 16$

Lösungen: 1a) x=2, y=7 / 1b) x=1, y=1 / 1c) x=10; y=24 / 1d) x=1, y=-5 / 1e) x=-2, y=-8 / 1f) x=8, y=0,5 / 1g) x=4, y=1 / 1h) x=1, y=1 / 1i) x=3, y=8 / 1j) x=18, y=24 / 1k) x=2, y=3 / 1l) x=-5, y=-6 / 1m) x=2, y=7 / 1n) x=4, y=-0,5

Datenblatt: Geraden

Eine Gerade y = mx + b besitzt die Steigung m und den y-Achsenabschnitt b, d.h.:



Es gilt: $S_y(0|b)$ ist y-Achsenabschnittspunkt der Gerade (Schnittpunkt mit der y-Achse), $N(x_N|0)$ Nullstelle der Geraden (Schnittpunkt mit der x-Achse) auf Grund von: $mx_N + b = 0$, d.h.:

$$x_N = \frac{-b}{m}$$

Die Steigung der Geraden errechnet sich mit zwei Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ als:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Zu einer Geraden g: y = mx + b gehört der Steigungswinkel α mit:

$$\tan\alpha = m \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(m)$$

Schneiden sich die Geraden g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$, so gibt es einen Schnittpunkt. Der Schnittpunkt S ist durch Gleichsetzen der Geraden zu ermitteln:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \Rightarrow S(x_S|y_S)$$

Die Bestimmung einer Geradengleichung y = mx + b erfolgt über:

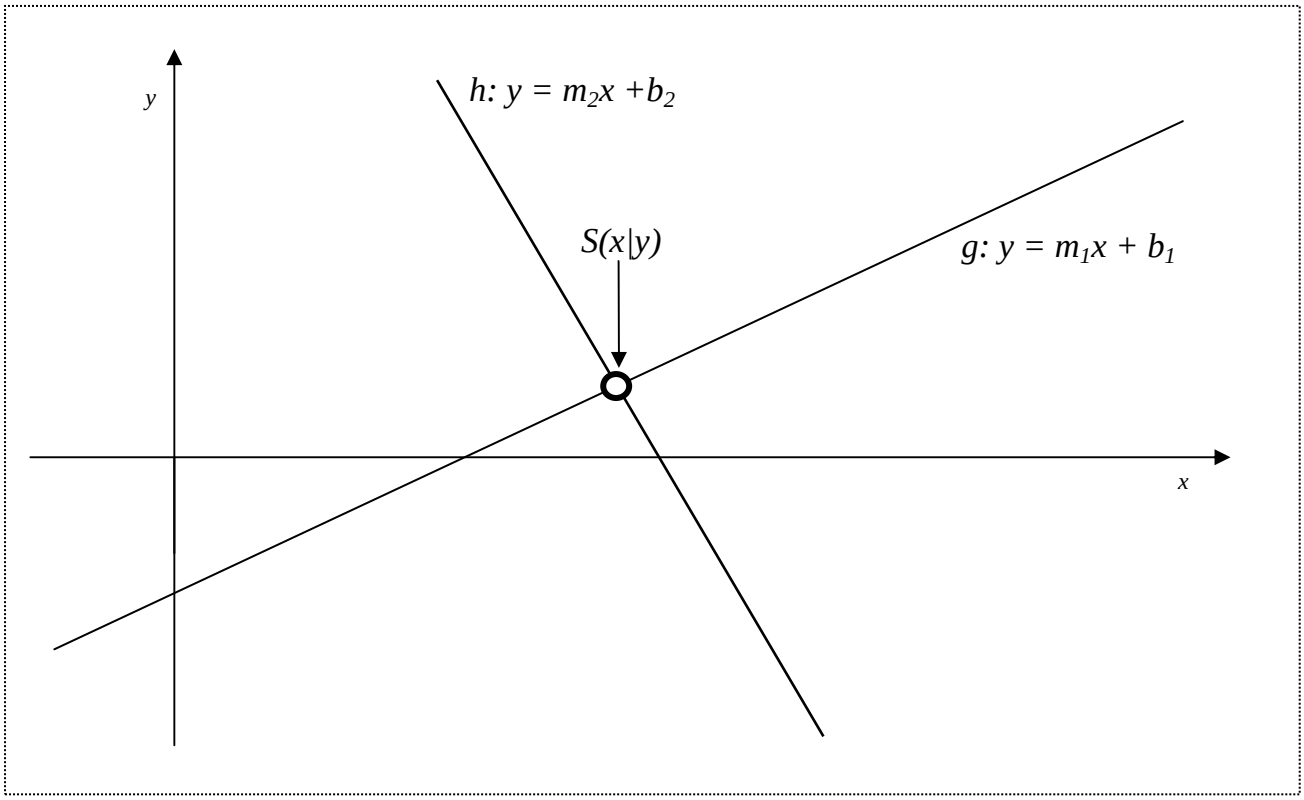
a) m, b gegeben -> y = mx +b
b) m, $P(x_1|y_1)$ gegeben -> $b = y_1 - mx_1$ -> y = mx +b
c) $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ gegeben -> lineares Gleichungssystem: $y_1=mx_1+b$, $y_2=mx_2+b$ -> m, b -> y = mx +b

Beispiele (Geraden):

a) Die Gerade g mit Steigung 2 und y-Achsenabschnitt -8 heißt: g: y = 2x – 8.
b) Die Gerade g durch den Punkt $S_y(0|7)$ und mit der Steigung -12 heißt: g: y = -12x + 7.
c) Die Gerade g durch den Punkt P(4|1) und mit der Steigung -4 heißt: g: y = -4x + 17.

d) Die Gerade g durch die Punkte P(1|2) und Q(3|4) heißt: g: y = x + 1.
e) Die Gerade g: y = -2x + 5 hat als Schnittpunkte mit den Achsen: $S_y(0|5]$, N(2,5|0). Der Steigungswinkel der Geraden beträgt: $\alpha = \tan^{-1}(2) = 63{,}43°$.

<u>Beispiele</u> (Schnittpunkt von Geraden):



a) Für die Geraden g: y = 2x – 5 und h: y = -3x + 7 ergibt das Gleichsetzen:

2x – 5 = -3x + 7	| +3x
5x – 5 = 7	| +5
5x = 12	| :5
x = 2,4	

Einsetzen von x = 2,4 in die Gerade g führt auf: y = 2·2,4 – 5 = -0,2. Der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h lautet also: S(2,4|-0,2).

b) Für die Geraden g: y = 3x +2 und h: y = 4 + 3x ergibt das Gleichsetzen:

3x + 2 = 4 + 3x	| -3x
2 = 4	

und damit einen Widerspruch. Die Geraden schneiden sich also nicht und sind parallel.

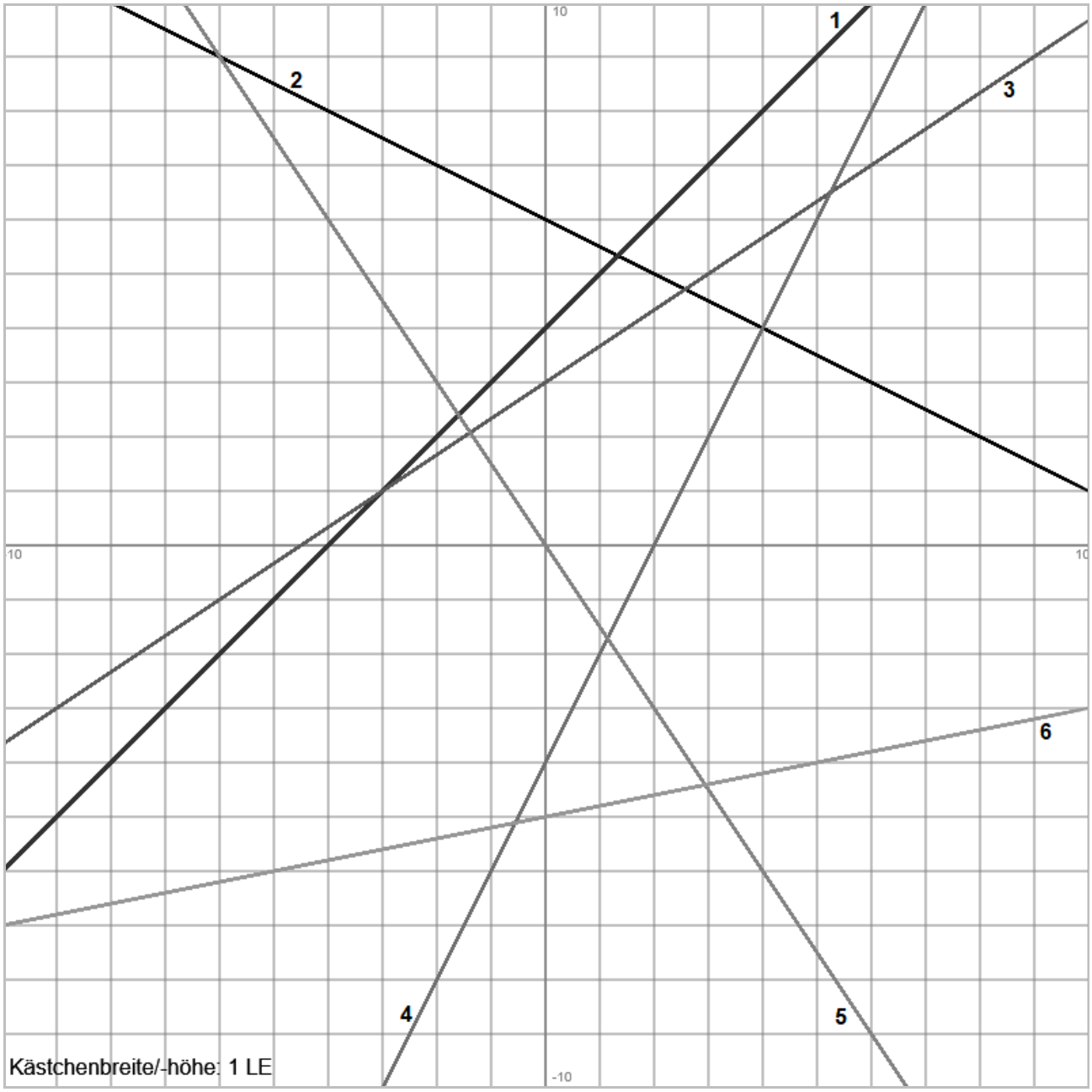
Aufgabenblatt: Geraden

1. Zeichne die folgenden Geraden in ein rechtwinkliges x-y-Koordinatensystem.

a) $y = 3x + 1$ b) $y = -2x + 5$ c) $y = 0{,}5x - 4$

d) $y = \frac{3}{4}x$ e) $y = -\frac{2}{5}x + 4$ f) $y = 7 - x$

2. Bestimme die jeweilige Funktionsgleichung der Geraden 1 bis 6.



3. Zeichne die folgenden Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Berechne die Schnittpunkte der jeweiligen Geraden mit den Achsen des Koordinatensystems.

a) $y = 4x - 3$ b) $y = \frac{3}{4}x + 1$ c) $y = -\frac{2}{5}x$

d) $y = -3x + 10$ e) $y = x + 2$ f) $y = 12 - 3x$

4. Welche Punkte liegen auf welchen Geraden?

a) P(4|-2), y = 4x – 18 b) Q(0|2), y = 0,75x + 2 c) R(-1|-1), y = 6x – 2

d) S(-2|9), y = -3x + 3 e) T(3|-4), y = $-\frac{1}{3}$x – 3 f) U(144|-89), y = $\frac{1}{5}$x – 213

5. Bestimme die Geradengleichungen.

a) P(4|3), m = 2 b) P(-1|3), m = -0,5 c) P(-2|-4), m = $\frac{1}{4}$

d) P(2|-2), Q(6|8) e) P(-4|0), Q(2|1) f) P(2|5), Q(5|2)

6. Bestimme die parallelen Geraden durch den Punkt P.

a) y = 3x + 2, P(1|7) b) y = -2x + 5, P(-1|0) c) y = $-\frac{1}{3}$x + 2, P(4|5)

d) y = 5 – x, P(-2|3) e) y = $\frac{1}{5}$x, P(0|-4) f) y = $-\frac{5}{6}$x + 3, P(10|-1)

7. Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g und h.

a) g: y = 4x, h: y = 3x +1 b) g: y = 10 – 2x, h: y = 4

c) g: y = x – 7, h: y = $\frac{1}{10}$x d) g: y = 2x + 1, h: y = -2x + 7

e) g: y = $\frac{1}{2}$x + 2, h: y = $\frac{1}{2}$x +1 f) g: y = $\frac{1}{4}$x +5, h: y = -2x – 7

g) g: y = 3x – 5, h: y = -4x – 12 h) g: y = 5x + 4, h: y = 0,5x – 5

Lösungen: 1) y-Achsenabschnittspunkt S_y(0|b), Steigungsdreieck m an S_y -> Gerade y=mx+b.
2) 1: y=x+4 / 2: y = 6-0,5x / 3: y=2x/3+3 / 4: y=2x-4 / 5: y=-1,5x / 6: y=x/5-5.
3a) S_y(0|-3), N(0,75|0) / 3b) S_y(0|1), N(-4/3|0) / 3c) S_y(0|0) = N(0|0) / 3d) S_y(0|10), N(10/3|0) / 3e) S_y(0|2), N(-2|0) / 3f) S_y(0|12), N(4|0).
4a) ja / 4b) ja / 4c) nein / 4d) ja / 4e) ja / 4f) nein.
5a) y=2x-5 / 5b) y=-0,5x+2,5 / 5c) y=0,25x-3,5 / 5d) y=2,5x-7 / 5e) y=x/3+2/3 / 5f) y=-x+7.
6a) y=3x+4 / 6b) y=-2x-2 / 6c) y=-x/3+19/3 / 6d) y=-x+1 / 6e) y=0,2x+4 / 6f) y=-5x/6+22/3.
7a) S(1|4) / 7b) S(3|4) / 7c) S(70/9|7/9) / 7d) S(1,5|4) / 7e) g || h / 7f) S(-16/3|11/3) / 7g) S(-1|-8) / 7h) S(-2|-6).

Normalparabeln (mit dem Koeffizienten 1 vor dem x^2) sind von der Form:

$$y = x^2 + px + q \text{ (Normalform)}$$
$$y = (x-d)^2 + c \text{ (Scheitelform)}$$

mit den Zahlen p, q und dem Scheitelpunkt S(d|c).

Normalform und Scheitelform können ineinander überführt werden vermöge der quadratischen Ergänzung:

$$y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = (x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}),$$

so dass gilt: $d = -\frac{p}{2}$ und $c = q - \frac{p^2}{4}$ und damit:

$$y = x^2 + px + q \Rightarrow S(-\frac{p}{2} \mid q - \frac{p^2}{4})$$

Umgekehrt kann aus jeder Scheitelform die Normalform der Parabel gebildet werden mittels der binomischen Formeln:

$$y = (x-d)^2 + c = x^2 - 2dx + d^2 + c = x^2 + px + q$$

mit: $p = -2d$, $q = d^2 + c$.

Nullstellen, d.h. Schnittpunkte der Normalparabel mit der x-Achse, sind Lösungen der Gleichung $y = 0$, also:

$$y = 0$$
$$x^2 + px + q = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$\Rightarrow N_1(x_1|0),\ N_2(x_2|0)$$

gemäß der p-q-Formel. Je nach Diskriminante ($D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, unter der Wurzel der p-q-Formel) gibt es keine (D<0), eine (D=0), zwei Nullstellen (D>0). Existieren die beiden Nullstellen der Normalparabel, so ergibt sich der Scheitelpunkt S(d|c) aus:

$$x_1, x_2 \text{ Nullstellen} \Rightarrow d = \frac{x_1 + x_2}{2},\ c = d^2 + pd + q,$$

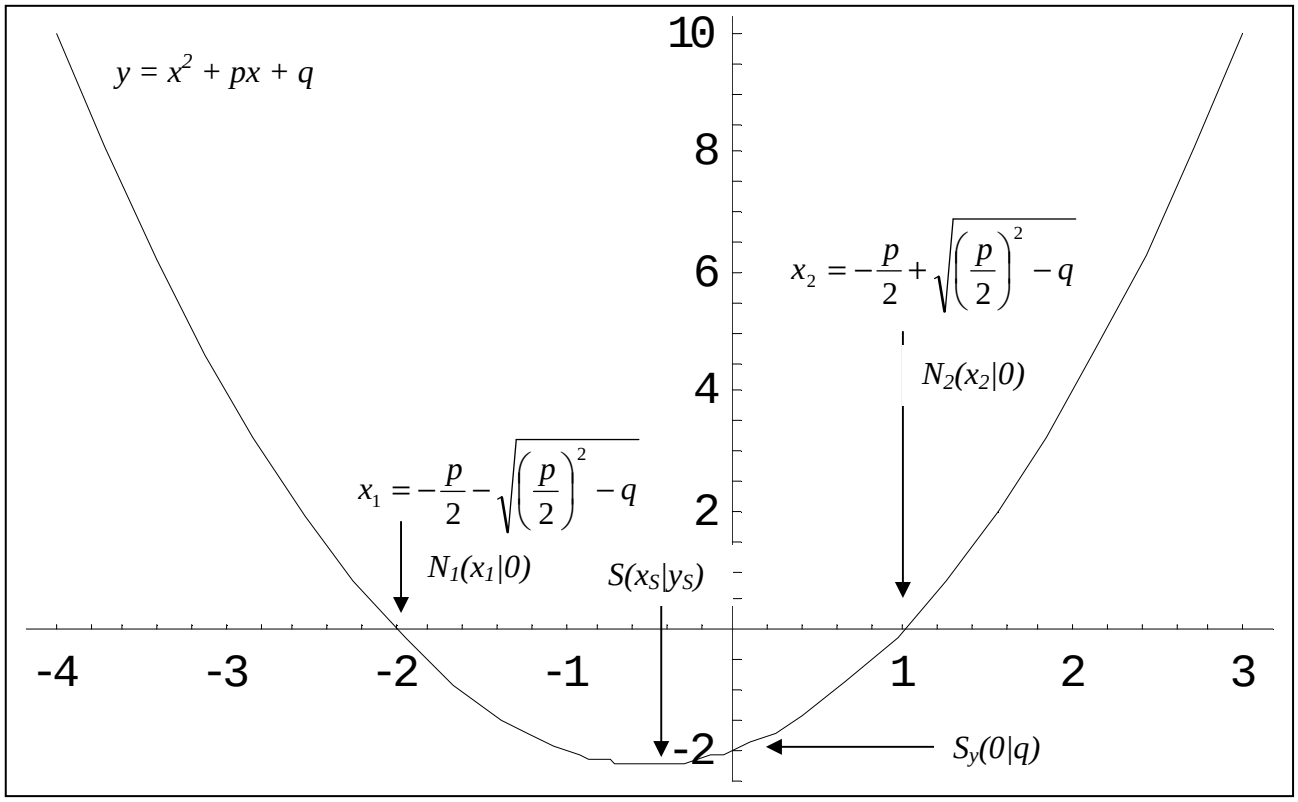
d.h.: der Scheitelpunkt liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen auf der Parabel.

Der y-Achsenabschnitt bzw. der y-Achsenabschnittspunkt, d.h. der Schnittpunkt der Normalparabel mit der y-Achse, folgt aus x = 0, also:

$$x = 0 \Rightarrow y = q \Rightarrow S_y(0|q)$$

Normalparabeln $y = (x-d)^2 + c$ ergeben sich aus der Grundparabel $y = x^2$ durch Verschiebung des Scheitelpunktes im Ursprung O(0|0) um d nach rechts (d>0) bzw. links (d<0) und nach oben (c>0) bzw. nach unten (c<0) zum Scheitelpunkt S(d|c).

Scheitelpunkt, Nullstellen, y-Achsenabschnitt einer Normalparabel sind dann:



Allgemeine Parabeln mit Scheitelpunkt S(0|c) auf der y-Achse sind von der Form:

$$y = ax^2 + c \text{ (Normalform, Scheitelform)}$$

($a \neq 0$).

Der y-Achsenabschnittspunkt ist der Scheitelpunkt S(0|c), die Nullstellen errechnen sich als:

$$y = 0$$
$$ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 = -c$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Je nach Diskriminante ($D = -\frac{c}{a}$, unter der Wurzel) gibt es keine ($D<0$), eine ($D=0$), zwei Nullstellen ($D>0$).

Bei der Wertetabelle zur Parabel $y = ax^2 + c$ ergeben sich gleiche y-Werte für betragsmäßig gleiche x-Werte (±1, ±2, …), also:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	y_4	y_3	y_2	y_1	c	y_1	y_2	y_3	y_4

Normalparabeln der Form $y = x^2+px+q$ sind nach oben geöffnet, ebenso allgemeine Parabeln der Form $y = ax^2 + c$ mit $a>0$. Normalparabeln der Form $y = -x^2+px+q$ sind nach unten geöffnet, ebenso allgemeine Parabeln der Form $y = ax^2 + c$ mit $a<0$.

Durch Gleichsetzen der entsprechenden Kurvengleichungen lassen sich die <u>Schnittpunkte</u> zwischen Parabel und Gerade bzw. zwei Parabeln ermitteln, also:

$$y = x^2 + px + q,\ y = mx + b \Rightarrow x^2 + px + q = mx + b$$
$$y = ax^2 + c,\ y = mx + b \Rightarrow ax^2 + c = mx + b$$
(Parabel, Gerade)

$$y = x^2 + px + q,\ y = x^2 + rx + s \Rightarrow x^2 + px + q = x^2 + rx + s$$
$$y = ax^2 + c,\ y = x^2 + rx + s \Rightarrow ax^2 + c = x^2 + rx + s$$
(zwei Parabeln)

Lineare oder quadratische Gleichungen ergeben dann die x-Koordinaten des bzw. der Schnittpunkte; die y-Koordinate des bzw. der Schnittpunkte ermittelt sich durch Einsetzen der x-Koordinate in eine Parabel- oder Geradengleichung.

Die Bestimmung der Parabelgleichung $y = x^2 + px + q$ erfolgt über ein lineares Gleichungssystem, wenn zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ auf der Parabel gegeben sind. Es gilt:

$$y_1 = x_1^2 + px_1 + q$$
$$y_2 = x_2^2 + px_2 + q$$

Das lineare Gleichungssystem ist nach p und q aufzulösen.

Gleiches gilt für Parabeln der Form $y = ax^2 + c$ und den Parabelpunkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$:

$$y_1 = ax_1^2 + c$$
$$y_2 = ax_2^2 + c$$

Das lineare Gleichungssystem ist nach a und c aufzulösen.

<u>Beispiele</u> (Parabeln):

a) Die Parabel $y = 2x^2 + 81$ kann geschrieben werden als $y = 2(x+0)^2 + 81$ und besitzt daher den Scheitelpunkt S(0|81).

b) Die Parabel $y = x^2 - 6x = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 = (x-3)^2 - 9$ hat den Scheitelpunkt S(3|-9).

c) Es ergibt die quadratische Ergänzung bei der nachstehenden Parabel

$$y = x^2 - x + 2 = x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\frac{3}{4}$$

den Scheitelpunkt $S(\frac{1}{2}|1\frac{3}{4})$.

d) Die Parabel $y = x^2 - 5x - 6$ hat den Scheitelpunkt S(2,5|-12,25), die Nullstellen N(-1|0), N(6|0), den y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|-6)$.

e) Die Normalparabel mit Scheitelpunkt S(-4|3) lautet: $y = (x+4)^2 + 6 = x^2 + 8x + 19$.

f) Die Normalparabel $y = x^2 + px + q$ soll durch die Punkte P(-2|-15) und Q(3|-1) gehen. Zur Bestimmung der Parabel wird das folgende lineare Gleichungssystem aufgestellt:

$P(-2|-15) \Rightarrow -15 = (-2)^2 + p\cdot(-2) + q \Rightarrow -2p + q = -19$
$Q(3|-1) \Rightarrow -1 = 3^2 + p\cdot 3 + q \Rightarrow 3p + q = -10$

Das Auflösen des linearen Gleichungssystems führt auf:

$-2p + q = -19$ $3p + q = -10$	I | ·(-1) II
$2p - q = 19$ $3p + q = -10$	| (Addition I + II)
$2p - q = 19$ $5p = 9$	
$2p - q = 19$ $p = 1{,}8$	(Einsetzen von p = 1,8)

$2 \cdot 1{,}8 - q = 19$ $p = 1{,}8$	$\mid -3{,}6$
$-q = 15{,}4$ $p = 1{,}8$	$\mid \cdot(-1)$
$q = -15{,}4$ $p = 1{,}8$	

Die Parabelgleichung lautet damit: $y = x^2 + 1{,}8x - 15{,}4$.

g) Die Gerade g: $y = 2x - 5$ und die nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt S(3|-2) schneiden sich in den Schnittpunkten $S_1(2|-1)$ und $S_2(6|7)$, denn Gleichsetzen von Parabel- und Geradengleichung ergibt mit der Parabelgleichung $y = (x-3)^2 - 2 = x^2-6x+9-2 = x^2-6x+7$:

$x^2 - 6x + 7 = 2x - 5$	$\mid -2x$
$x^2 - 8x + 7 = -5$	$\mid +5$
$x^2 - 8x + 12 = 0$	(p-q-Formel)
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 12} = 4 \pm \sqrt{4} = 4 \pm 2$	(Ausrechnen)
$x_1 = 2,\ x_2 = 6$	(Lösungen)

Einsetzen der x-Werte in die Geradengleichung ergibt: $y_1 = -1$, $y_2 = 7$ und damit die eben genannten Schnittpunkte. Der Abstand der Schnittpunkte voneinander ist dann:

$$\overline{S_1S_2} = \sqrt{(6-2)^2 + (7-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8{,}94$$

(Satz des Pythagoras: $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ ->

$$\boxed{\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

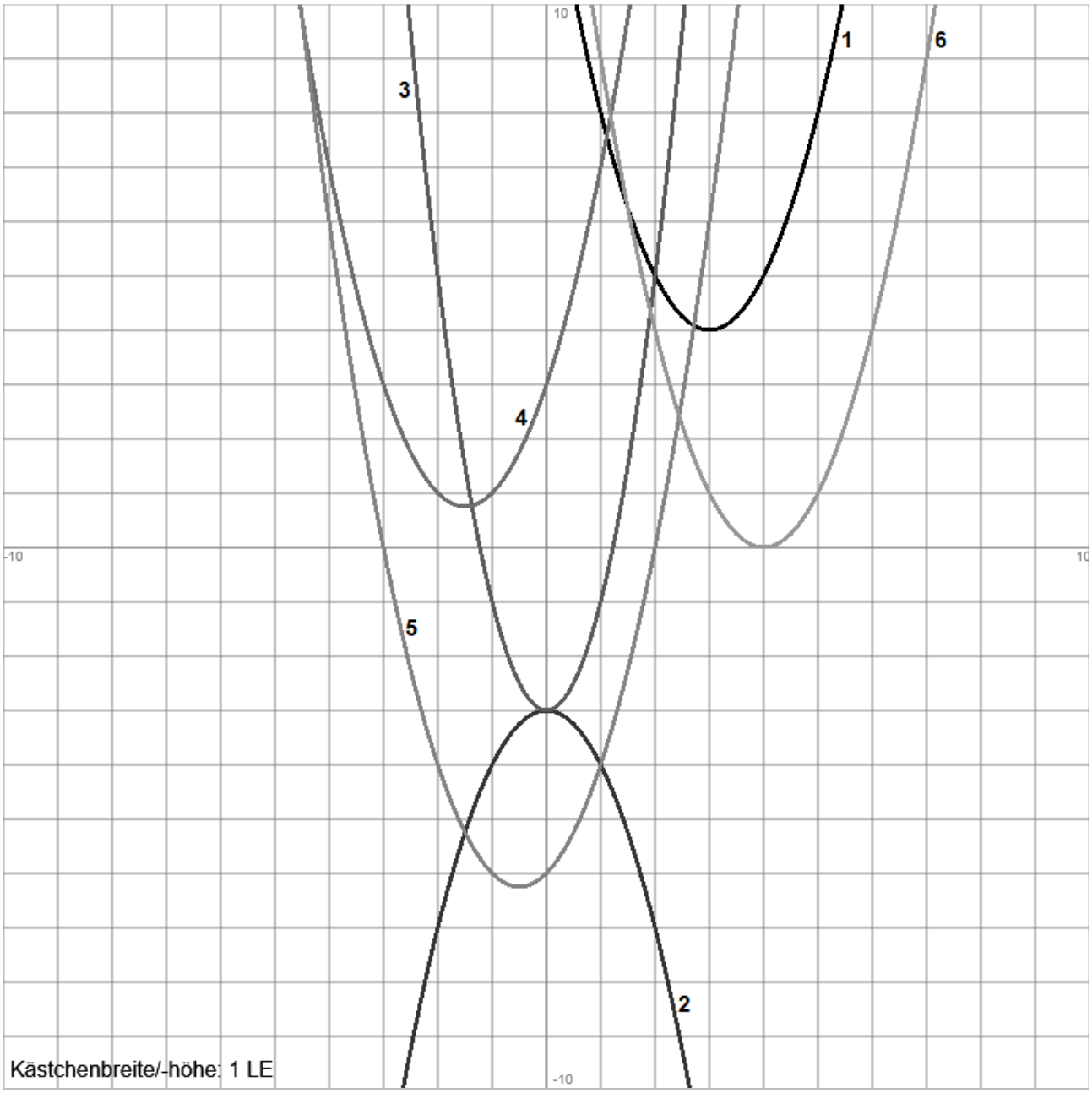
als Abstand der Punkte P und Q).

h) Die Parabel $y = \frac{1}{6}x^2 - 6$ hat als Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-6)$, $N_1(-6|0)$, $N_2(6|0)$. Die drei Punkte bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit Fläche A = gh/2 = 12·6/2 = 36 FE (Grundseite g=12, Höhe h=6) und mit Umfang u = g + 2a = 28,97 (Schenkel a = $\overline{S_yN_2} = 8{,}49$).

Aufgabenblatt: Parabeln

1. Ordne die Parabelgleichungen a) bis f) einer Parabelkurve 1 bis 6 zu.

a) $y = 2x^2 – 3$ b) $y = (x–3)^2 + 4$ c) $y = -x^2 – 3$
d) $y = x^2 + 3x + 3$ e) $y = x^2 – 8x + 16$ f) $y = x^2 + x – 6$



2. Bestimme die Gleichung der Normalparabel $y = x^2 + px + q$ aus dem Scheitelpunkt S(d|c).

a) S(4|-3) b) S(-3|-5) c) S(2|7) d) S(-2,5|5)

3. Bestimme den Scheitelpunkt der folgenden Parabeln.

a) $y = x^2 + 4$ b) $y = x^2 + 3x – 4$ c) $y = (x+1,5)^2 – 4,5$ d) $y = x^2 – 2x + 12$
e) $y = (x–5)^2 + 3$ f) $y = (x+2,3)^2 – 1,8$ g) $y = x^2 + 9x + 1$ h) $y = x^2 – 14x + 49$

4. Zeichne die folgenden Parabeln.

a) $y = x^2 – 1,5$ b) $y = x^2 + 5x – 3$ c) $y = x^2 – 2x +8$ d) $y = -\frac{2}{3}x^2 + 1$

e) $y = x^2 – 2,5x$ f) $y = x^2 + 1,5x + 4,5$ g) $y = (x+4)^2 – 10$ h) $y = x^2 – 5x + 6,25$

5. Für die gegebenen Parabeln sind der Scheitelpunkt, die Nullstellen und der Schnittpunkt mit der y-Achse zu bestimmen.

a) $y = x^2 – 10,24$ b) $y = -0,5x^2 + 8$ c) $y = (x+2,.5)^2 + 2$ d) $y = (x–3)^2 – 4$

e) $y = x^2 – 5x + 6$ f) $y = x^2 + 0,5x – 5$ g) $y = \frac{8}{5}x^2 + 2$ h) $y = x^2 + 4x + 6$

i) $y = x^2 – 2x – 80$ j) $y = (x+4,5)^2 – 25$ k) $y = (x–3,5)(x+1,5)$ l) $y = x^2 + 13x$

6. Bestimme die Gleichung der Normalparabel.

a) $y = x^2 + 5x + q$ mit P(1|8) b) $y = x^2 + px – 11$ mit Q(-2|5) c) $y = x^2 + px + 2$ mit R(4,5|18)

d) $y = x^2 + px + q$ mit A(0|4), B(2|2) e) $y = x^2 + px + q$ mit P(-2|1), Q(3,5|12)

f) $y = x^2 + px + q$ mit A(-3|0), B(5|0) g) $y = x^2 + px + q$ mit Q(-4|-24), R(-1,5|-20,25)

7. Berechne die Schnittpunkte zwischen den Parabeln.

a) $y = x^2 + 2$, $y = -x^2 + 10$ b) $y = x^2 – 4$, $y = 0,5x^2 – 3,5$

c) $y = x^2 + 4x – 3$, $y = x^2 + 2x + 11$ d) $y = x^2 – x + 5$, $y = x^2 + 2x + 5$

e) $y = x^2 – 7x + 21$, $y = x^2 + 3,5x$ f) $y = (x–1)^2 + 6$, $y = x^2 + 5x – 10,5$

g) $y= (x+5,5)^2$, $y = (x–4)^2 + 52,25$ h) $y = x^2 + 6x – 10$. $y = -x^2 + 10$

i) $y = x^2 + 11x – 2$, $y = 3x^2 + 12$ j) $y = (x+2)^2 + 3$, $y = \frac{1}{5}x^2 + 47$

k) $y = (x–4)^2 – 10$, $y = x^2 – 8x + 24$ l) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$, $y= (x–5)^2 + 3,5$

8. Berechne die Schnittpunkte zwischen Parabel und Gerade.

a) $y = x^2 + x – 12$, $y = -3x – 7$ b) $y = 2x^2 + 5$, $y = 4x + 11$

c) $y = (x+1)^2 – 3$, $y = -4$ d) $y = x^2 + 3x + 1$, $y = -x – 3$

e) $y = \frac{2}{5}x^2 + 7$, $y = 0,5x – 3$ f) $y = x^2 – 5x + 8,25$, $y = 2$

g) $y = x^2 – 3x – 5$, $y = 2x – 11$ h) $y = (x+0,5)^2 – 5$, $y = -\frac{2}{3}x$

i) $y = (x–2)^2 + 1$, $y = 6x – 20$ j) $y = x^2 + 10x + 10$, $y = 5x + 6$

k) $y = x^2 – 13x + 1$, $y = -10,1x$ l) $y = -3x^2 + 16$, $y = 3x + 10$

9. Gegeben ist die Normalparabel $y = x^2 – 2x – 8$.

a) Wie lautet der Scheitelpunkt der Parabel?
b) Wo schneidet die Parabel die x-Achse?
c) Wo schneidet die Parabel die y-Achse?
d) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den y-Achsenabschnittspunkt und die positive Nullstelle der Parabel geht?
e) Liegen die Punkte A(2|-8), B(-10|112) und C(6|12) auf der Parabel?

10. a) Wie lautet die Gleichung der nach oben geöffneten Normalparabel, die den Scheitelpunkt S(-2|-16) hat?
b) Wie lauten die Nullstellen der Parabel?
c) Wo schneiden sich die Parabel und die Gerade mit der Gleichung $y = 5x$?
d) Wie lautet die zur Geraden $y = 5x$ parallele Gerade durch den Punkt P(6|10)?

11. a) Bestimme die nach oben geöffnete Normalparabel, die durch die Punkte A(1|-16) und B(10|11) geht.
b) Bestimme die Gerade durch die Punkte A und B.
c) Wie lautet der Scheitelpunkt der Parabel?
d) Wo schneidet die Parabel die x-Achse?
e) Wo schneidet die Gerade die x-Achse?
f) Wo schneidet die Parabel die y-Achse?
g) Wo schneidet die Gerade die y-Achse?

12. a) Bestimme die Schnittpunkte der nach oben geöffneten Normalparabel mit Scheitelpunkt S(4|-9) und der Parabel y = $\frac{1}{2}x^2 - 7$?
b) Wie weit sind die Schnittpunkte voneinander entfernt?
c) Bestimme die Gerade durch die Schnittpunkte?
d) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck, dessen Ecken die Nullstellen und der Scheitelpunkt der Normalparabel sind?
e) Welchen Umfang hat das Dreieck, dessen Ecken die Schnittpunkte und der Scheitelpunkt der allgemeinen Parabel sind?

13. a) Berechne die Fläche des Vierecks, dessen Eckpunkte die Scheitel- und Schnittpunkte der zwei Parabeln p_1: y = $-\frac{1}{2}x^2 + 23$ und p_2: y = $\frac{3}{2}x^2 - 9$.
b) Wie lautet die nach oben geöffnete Normalparabel p_3, die durch die Schnittpunkte der Parabeln p_1 und p_2 verläuft?
c) Die Normalparabel p_3 wird um 4 Einheiten nach rechts und um 3 Einheiten nach unten verschoben. Gib die Normalform dieser Parabel p_4 an. Wo schneidet die Parabel die x-Achse?
d) Wie lautet die Geradengleichung g durch den linken Schnittpunkt der allgemeinen Parabeln p_1 und p_2 und dem Scheitelpunkt der Normalparabel p_4. Gib den Steigungswinkel der Geraden g an.
e) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Eckpunkte der linke Schnittpunkt der allgemeinen Parabeln p_1 und p_2, der Scheitelpunkt der Normalparabel p_4 und der Scheitelpunkt der Parabel p_2 ist?

14. Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_1 hat den Scheitelpunkt S_1(1|-2), eine nach unten geöffnete Normalparabel p_2 den Scheitel S_2(0|3). Berechne die gemeinsamen Punkte der Parabeln sowie die Abstand zwischen den Schnittpunkten.

15. Gegeben ist die nach oben geöffnete Normalparabel y = $x^2 - 2x - 8$.
a) Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel und die Schnittpunkte mit der x-Achse.
b) Berechne die Gleichung der Geraden, die durch den Scheitelpunkt der Parabel und die Nullstelle mit negativer x-Koordinate verläuft.
c) Berechne die Gleichung der Geraden, die durch die Nullstelle mit positiver x-Koordinate läuft und die Steigung m = 1,5 besitzt.
d) Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden.

16. Der Bogen eines römischen Aquädukts ist größtenteils von Erde und Geröll begraben. Der Archäologe kennt immerhin mit 6,40 Metern die Bogenhöhe und misst einen Bogenpunkt an, der vom Scheitel des Bogens 1,5 Meter in der Horizontalen und 22,5 cm in der Vertikalen entfernt ist. Bestimme zum Aquäduktbogen eine geeignete Parabelgleichung und berechne die Breite des Bogens am Erdboden sowie in 2 Metern Höhe.

17. Ein Golfball wird aus dem Rough bis zum Loch 80 Meter weit geschlagen und erreicht dabei

eine maximale Höhe von 25 Metern.

a) Das Grün um das Loch ist kreisförmig und hat eine Fläche 330 Quadratmetern. Welche Höhe hat der Golfball, wenn er das Grün erreicht?
b) In 15 Metern Entfernung vom Loch befindet sich ein 18 Meter hoher Baum. Erreicht der Golfball das Grün mit dem Loch?
c) Welche maximale Höhe muss der Golfball mindestens haben, damit er den Baum passieren kann?

Lösungen: 1a)=3) / 1b)=1) / 1c)=2) / 1d)=4) / 1e)=6) / 1f)=5.
2a) $y = x^2 – 8x + 13$ / 2b) $y = x^2 + 6x + 4$ / 2c) $y = x^2 – 4x + 11$ / 2d) $y = x^2 + 5x + 11,25$.
3a) S(0|4) / 3b) S(-1,5|-6,25) / 3c) S(-1,5|-4,5) / 3d) S(1|11) / 3e) S(5|3) / 3f) S(-2,3|-1,8) / 3g) S(-4,5|-19,25) / 3h) S(7|0).
4a) S(0|-1,5) / 4b) S(-2,5|-9,25) / 4c) S(1|7) / 4d) S(0|1) / 4e) S(1,25|-1,5625) / 4f) S(-0,75|3,9375) /
4g) S(-4|-10) / 4h) S(2,5|0).
5a) S(0|-10,24), N(-3,2|0), N(3,2|0), S_y(0|-10,24) / 5b) S(0|8), N(-4|0), N(4|0), S_y(0|8) / 5c) S(-2,5|2), S_y(0|8,25) /
5d) S(3|-4), N(1|0), N(5|0), S_y(0|5) / 5e) S(2,5|-0,25), N(2|0), N(3|0), S_y(0|6) / 5f) S(-0,25|-5,0625), N(-2,5|0), N(2|0),
S_y(0|-5) / 5g) S(0|2), S_y(0|2) / 5h) S(-2|2), S_y(0|6) / 5i) S(1|-81), N(-8|0), N(10|0), S_y(0|-80) / 5j) S(-4,5|-25), N(-9,5|0),
N(0,5|0), S_y(0|-4,75) / 5k) $y = x^2 – 2x + 5,25$, S(1|4,25), N(-1,5|0), N(3,5|0), S_y(0|5,25) / 5l) S(-6,5|-42,25), N(-13|0),
N(0|0), S_y(0|0).
6a) $y = x^2 + 5x + 2$ / 6b) $y = x^2 – 6x – 11$ / 6c) $y = x^2 – x + 2$ / 6d) $y = x^2 – 3x + 4$ / 6e) $y = x^2 + 0,5x – 2$ /
6f) $y = (x+3)(x-5) = x^2 – 2x – 15$ / 6g) $y = x^2 + 7x – 12$.
7a) S_1(-2|6), S_2(2|6) / 7b) S_1(-1|-3), S_2(1|-3) / 7c) S_1(7|74) / 7d) S_1(0|5) / 7e) S_1(2|11) / 7f) S_1(2,5|8,25) /
7g) S_1(2|56,25) / 7h) S_1(-5|-15), S_2(2|6) / 7i) S_1(2|24), S_2(3,5|48,75) / 7j) S_1(-10|67), S_2(5|52) / 7k) – /
7l) S_1(3|7,5), S_2(17|147,5).
8a) S_1(-5|8), S_2(1|-10) / 8b) S_1(-1|7), S_2(3|23) / 8c) – / 8d) S_1(-2|-1) / 8e) – / 8f) S_1(2,5|2) /
8g) S_1(2|-7), S_2(3|-5) / 8h) S_1(-19/6|19/9), S_2(1,5|-1) / 8i) S_1(5|10) / 8j) S_1(-4|-14), S_2(-1|1) /
8k) S_1(0,4|4,04), S_2(2,5|25,25) / 8l) S_1(-2|4), S_2(1|13).
9. $y = x^2 – 2x – 8$: a) S(1|-9); b) N(-2|0), N(4|0); c) P(0|-8); d) $y = 2x-8$; e) A und B liegen auf der Parabel, C nicht.
10a) $y = (x+2)^2 – 16 = x^2 + 4x – 12$; b) N(-6|0), N(2|0); c) S(-3|-15), S(4|20); d) $y = 5x – 20$.
11a) $y = x^2 – 8x – 9$; b) $y = 3x – 19$; c) S(4|-25); d) N(-1|0), N(9|0); e) N($\frac{19}{3}$|0); f) P(0|-9); g) P(0|-3).
12a) S_1(2|-5), S_2(14|91); b) $\overline{S_1S_2} = 96,74$, c) $y = 8x – 21$, d) N(1|0), N(7|0), g=6, h=9 -> A_Δ=27 FE;
e) $\overline{S_1S_2} = 96,74$, S(0|-7) -> $\overline{SS_1} = 2,82$, $\overline{SS_2} = 99$ -> u = 198,56.
13a) Scheitel S_1(0|23), S_2(0|-9), Schnittpunkte P_1(-4|15), P_2(4|15) -> Viereck = Drache -> A = 128 FE;
b) p_3: $y = x^2 – 1$, S_3(0|-1), c) p_4: $y = x^2 – 8x + 12$, S_4(4|-4), Nullstellen N_1(2|0), N_2(6|0),;
d) P_1(-4|15), S_4(4|-4) -> g: $y = -2,375x + 5,5$, α = 67,12°, e) P_1(-4|15), S_4(4|-4), S_2(0|-9) -> Dreieck ->
$A = A_R – A_1 – A_2 – A_3 = 8·24 – 8·19/2 – 4·5/2 – 4·24/2 = 58$ FE.
14. p_1: $y = (x-1)^2-2 = x^2-x-2$, p_2: $y = -x^2+3$ -> Schnittpunkte P_1(-1|2), P_2(2|-1) -> Abstand der Schnittpunkte: 4,24 LE.
15a) Scheitel S(1|-9), Nullstellen N_1(-2|0), N_2(4|0); b) Gerade g: $y = -3x-6$; c) Gerade h: $y = 1,5x-6$; d) Schnittpunkt P(0|-6).
16. Parabel $y = -0,1x^2+6,4$; y = 0 -> x=±8 , y = 0 -> Bogenbreite: 16 m, y = 2 -> Breite: 13,27 m.
17a) Parabel $y = -0,015625x^2+25$, r = 10,25 m -> x = 29,75 -> Höhe y = 11,17 m; b) Parabel $y = -0,015625x^2+25$, Parabelpunkt P(25|15,23) -> nein; c) Punkte A(25|18), B(40|0) -> Parabel $y = -0,0185x^2+29,54$ -> maximale Höhe mindestens 29,54 m.

Datenblatt: Ebene Geometrie

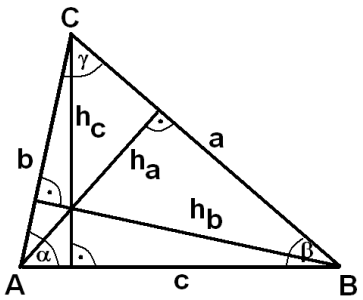
Ebene Figuren:

Dreieck

Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und Höhen h_a, h_b, h_c auf den Seiten bzw. Grundseite g und Höhe h:

Umfang: U = a + b + c, Fläche: A = $\frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ bzw.: A = $\frac{gh}{2}$

U = a + b + c	a = U – b – c	b = U – a – c	c = U – a – b
$A = \frac{ah_a}{2}$	$a = \frac{2A}{h_a}$	$h_a = \frac{2A}{a}$	
$A = \frac{bh_b}{2}$	$b = \frac{2A}{h_b}$	$h_b = \frac{2A}{b}$	
$A = \frac{ch_c}{2}$	$c = \frac{2A}{h_c}$	$h_c = \frac{2A}{c}$	
$A = \frac{gh}{2}$	$g = \frac{2A}{h}$	$h = \frac{2A}{g}$	

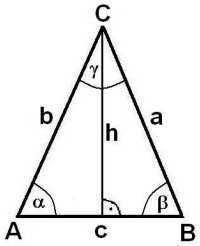


Gleichschenkliges Dreieck

Gleichschenkliges Dreieck mit Seitenlängen a, b, c (a = b) und Höhe h = h_c auf der Grundseite g = c:

Umfang: U = 2a + c, Fläche: A = $\frac{ch_c}{2}$ bzw.: A = $\frac{gh}{2}$

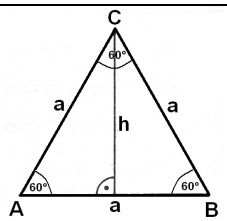
U = 2a + c	$a = \frac{U-c}{2}$	c = U – 2a
$A = \frac{1}{2}ch$	$c = \frac{2A}{h}$	$h = \frac{2A}{c}$
$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$	$a = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2}$	$c = 2\sqrt{a^2 - h^2}$



Gleichseitiges Dreieck

Gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a und Höhe h: Umfang: U = 3a, Fläche: A = $\frac{ah}{2}$

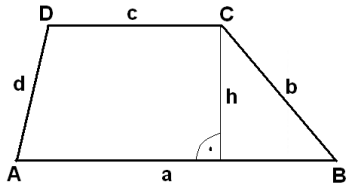
U = 3a	$a = \frac{U}{3}$	$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$	$a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$
$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$a = 2\sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}}$	$h = \sqrt{A\sqrt{3}}$	



Trapez

Trapez mit Seitenlängen a, b, c, d und Höhe h: Umfang: U = a + b + c + d, Fläche: A = $\frac{a+c}{2} \cdot h$

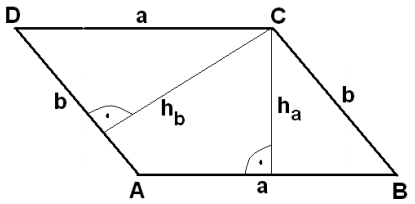
U = a + b + c + d	a= U – b – c – d	b = U – a – c – d	c = U – a – b – d d = U – a – b – c
A = $\frac{a+c}{2} \cdot h$	a = $\frac{2A}{h} - c$	c= $\frac{2A}{h} - a$	h = $\frac{2A}{a+c}$



Parallelogramm

Parallelogramm mit Seitenlängen a, b und Höhen h_a, h_b: Umfang: U = 2a + 2b, Fläche: A = ah_a = bh_b

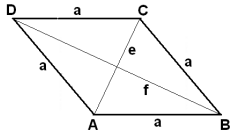
U = 2a + 2b	a = $\frac{U-2b}{2}$	b = $\frac{U-2a}{2}$
A = ah_a	a = $\frac{A}{h_a}$	h_a = $\frac{A}{a}$
A = bh_b	b = $\frac{A}{h_b}$	h_b = $\frac{A}{b}$



Raute

Raute mit Seitenlänge a und Diagonalen e, f: Umfang: U = 4a, Fläche: A = $\frac{ef}{2}$

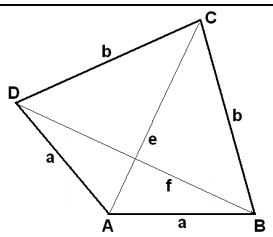
U = 4a	a = $\frac{U}{4}$		
A = $\frac{ef}{2}$	$e=\frac{2A}{f}$	$f=\frac{2A}{e}$	
$\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2=a^2$	$a=\sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2}$	$e=2\cdot\sqrt{a^2-\left(\frac{f}{2}\right)^2}$	$f=2\cdot\sqrt{a^2-\left(\frac{e}{2}\right)^2}$



Drachen

Drachen mit Seitenlängen a, b und Diagonalen e, f: Umfang: U = 2a + 2b, Fläche: A = $\frac{ef}{2}$

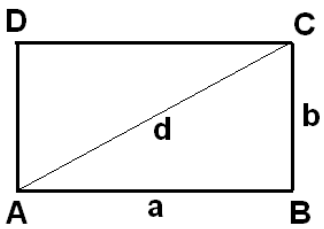
U = 2a + 2b	a = $\frac{U-2b}{2}$	b = $\frac{U-2a}{2}$
A = $\frac{ef}{2}$	$e=\frac{2A}{f}$	$f=\frac{2A}{e}$



Rechteck

Rechteck mit Seitenlängen a, b und mit Diagonale d: Umfang: U = 2a + 2b, Fläche: A = ab

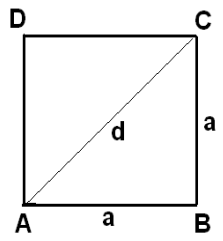
U = 2a +2 b	U = $2a+2\frac{A}{a}$	U = $2\frac{A}{b}+2b$	
	a = $\frac{U-2b}{2}$	b = $\frac{U-2a}{2}$	
A = ab	A = $a\cdot\frac{U-2a}{2}$	A = $b\cdot\frac{U-2b}{2}$	
	a = $\frac{A}{b}$	b = $\frac{A}{a}$	
	a = $\frac{U}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{U^2-16A}$	b = $\frac{U}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{U^2-16A}$	
$a^2+b^2=d^2$	$d=\sqrt{a^2+b^2}$	$a=\sqrt{d^2-b^2}$	$b=\sqrt{d^2-a^2}$



Quadrat

Quadrat mit Seitenlänge a und Diagonale d: Umfang: U = 4a, Fläche: A = a^2

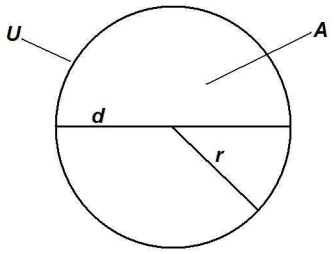
U = 4a	a = $\frac{U}{4}$	a = $\sqrt{A}$	U = $4\sqrt{A}$
A = a^2	A = $\left(\frac{U}{4}\right)^2 = \frac{U^2}{16}$		
$2a^2 = d^2$	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	



Kreis

Kreis mit Radius r, Durchmesser d: Durchmesser: d = 2r, Umfang: U = $2\pi r = \pi d$, Fläche: A = $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$

d = 2r	r = $\frac{d}{2}$	
U = $2\pi r$	r = $\frac{U}{2\pi}$	
U = πd	d = $\frac{U}{\pi}$	
A = πr^2	r = $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$	d = $2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}}$
A = $\frac{\pi d^2}{4}$	A = $\frac{U^2}{4\pi}$	U = $2 \cdot \sqrt{\pi A}$

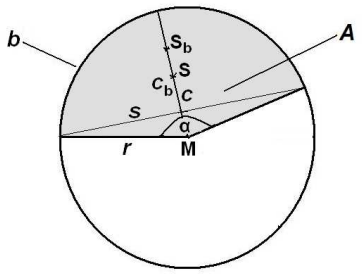


Kreisausschnitt

Kreisausschnitt (Kreissektor) mit Innenwinkel α und Radius r: Bogenlänge: b = $\frac{\pi\alpha r}{180°} = \frac{2A}{r}$,

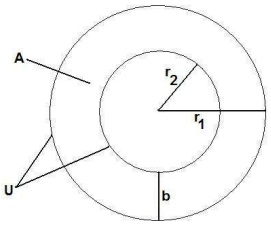
Fläche: A = $\pi r^2 \frac{\alpha}{360°} = \frac{br}{2}$

$r = \frac{b \cdot 180°}{\pi\alpha}$	$r = \sqrt{\frac{A \cdot 360°}{\pi\alpha}}$	$r = \frac{2A}{b}$
$\alpha = \frac{b \cdot 180°}{\pi r}$	$\alpha = \frac{A \cdot 360°}{\pi r^2}$	$\alpha = \frac{b^2 \cdot 90°}{\pi A}$
$b = \frac{\pi\alpha r}{180°}$	$b = \frac{2A}{r}$	$b = \sqrt{\frac{\pi A \alpha}{90°}}$
$A = \pi r^2 \frac{\alpha}{360°}$	$A = \frac{br}{2}$	$A = \frac{b^2 \cdot 90°}{\pi\alpha}$

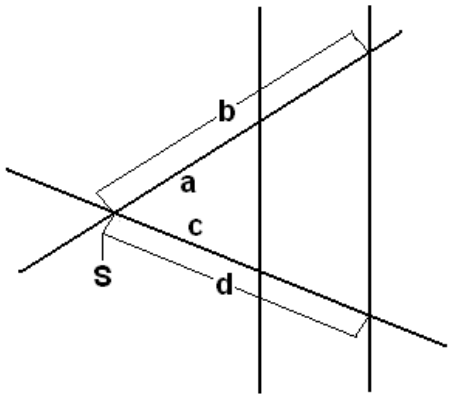


Kreisring mit Radius r_1 und $r_2<r_1$, Durchmesser d_1 und d_2: Durchmesser: $d_1 = 2r_1$, Durchmesser: $d_2 = 2r_2$, Breite des Kreisrings: $b = r_1 - r_2$.

Fläche: A = $\pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi(r_1^2 - r_2^2)$, A = $\frac{\pi d_1^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)$

$d_1 = 2r_1$	$r_1 = \frac{d_1}{2}$		
$d_2 = 2r_2$	$r_2 = \frac{d_2}{2}$		
$b = r_1 - r_2$	$r_1 = r_2 + b$	$r_2 = r_1 - b$	
$A = \pi(r_1^2 - r_2^2)$	$r_1 = \sqrt{\frac{A}{\pi} + r_2^2}$	$r_2 = \sqrt{r_1^2 - \frac{A}{\pi}}$	

Strahlensätze:

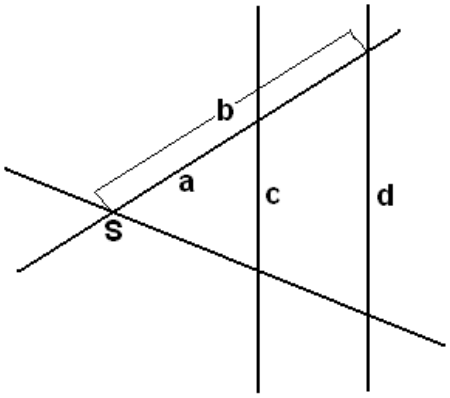


Es gilt die geometrische Situation: Zwei vom Strahlenzentrum S ausgehende Geraden werden von zwei parallelen Geraden geschnitten. Dann gilt gemäß der nebenstehenden Abbildungen:

1. Strahlensatz:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bzw. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

für jeweils zwei bei S beginnende Strecken a und b auf dem 1. sowie c und d auf dem zweiten Geradenstrahl.



2. Strahlensatz:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bzw. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

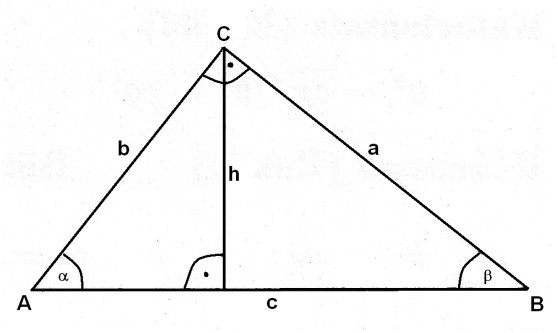
für die zwei bei S beginnenden Strecken a und b auf einem Geradenstrahl sowie die Strecken c und d auf den Parallelen.

Es gilt damit die Faustregel:

$\frac{kurz}{lang} = \frac{kurz}{lang}$ bzw. $\frac{lang}{kurz} = \frac{lang}{kurz}$

Datenblatt: Trigonometrie

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit den Seiten *a, b, c* und den Winkeln α, β, γ mit γ = 90°: *a* und *b* heißen Katheten, *c* heißt Hypotenuse, $h = h_c$ heißt Höhe des Dreiecks.

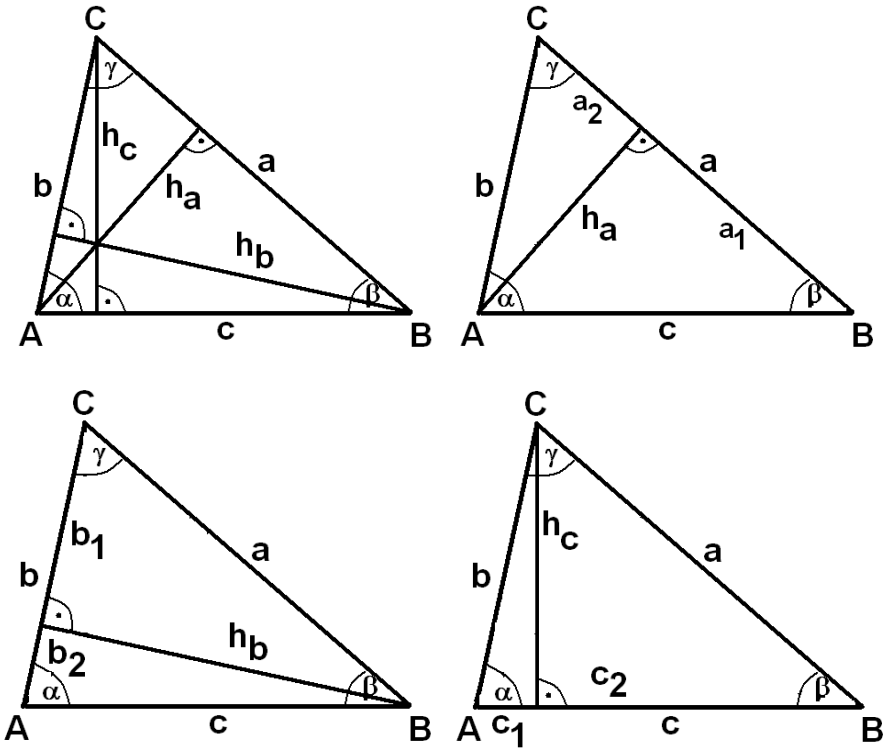


Rechtwinkliges Dreieck

Winkelsumme	α+β+γ = 180°		
γ = 90°	α+β = 90°	α = 90° – β	β = 90° – α
Umfang	U = a + b + c		
	a = U – b – c	b = U – a – c	c = U – a – b
Flächeninhalt	$A = \frac{1}{2}ab$		$A = \frac{1}{2}ch$
	$a = \frac{2A}{b}$	$b = \frac{2A}{a}$	$c = \frac{2A}{h}$
Satz des Pythagoras	$a^2 + b^2 = c^2$		
	$c^2 = a^2 + b^2$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$a^2 = c^2 - b^2$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$	$b^2 = c^2 - a^2$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$		(Sinus)
	$a = c\sin\alpha$	$c = \frac{a}{\sin\alpha}$	
	$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$		(Cosinus)
	$b = c\cos\alpha$	$c = \frac{b}{\cos\alpha}$	
	$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$		(Tangens)
	$a = b\tan\alpha$	$b = \frac{a}{\tan\alpha}$	
	$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$		(Sinus)
	$b = c\sin\beta$	$c = \frac{b}{\sin\beta}$	

	$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$		(Cosinus)
	$a = c\cos\beta$	$c = \frac{a}{\cos\beta}$	
	$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$		(Tangens)
	$b = a\tan\beta$	$a = \frac{b}{\tan\beta}$	
	$\sin\alpha = \cos\beta$	$\cos\alpha = \sin\beta$	
	$\tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$	$\tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}$	

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ. Der Inkreis berührt die Dreieckseiten, der Umkreis läuft durch die Dreiecksecken. Die drei Seitenhalbierenden halbieren jeweils von der gegenüberliegenden Ecke aus die Dreiecksseite, die drei Winkelhalbierenden halbieren die jeweiligen Dreieckswinkel.



Beliebiges Dreieck

Winkelsumme	α+β+γ = 180°		
	α = 180° – β – γ	β = 180“ – α – γ	γ = 180° – α – β
Umfang	U = a + b + c		
	a = U – b – c	b = U – a – c	c = U – a – b

Flächeninhalt	$A=\frac{1}{2}ah_a$	$A=\frac{1}{2}bh_b$	$A=\frac{1}{2}ch_c$
	$a=\frac{2A}{h_a}$	$h_a=\frac{2A}{a}$	
	$b=\frac{2A}{h_b}$	$h_b=\frac{2A}{b}$	
	$c=\frac{2A}{h_c}$	$h_c=\frac{2A}{c}$	
	$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$	$A=\frac{1}{2}ac\sin\beta$	$A=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$
	$a=\frac{2A}{b\sin\gamma}$	$b=\frac{2A}{a\sin\gamma}$	$\sin\gamma=\frac{2A}{ab}$
	$a=\frac{2A}{c\sin\beta}$	$c=\frac{2A}{a\sin\beta}$	$\sin\beta=\frac{2A}{ac}$
	$b=\frac{2A}{c\sin\alpha}$	$c=\frac{2A}{b\sin\alpha}$	$\sin\alpha=\frac{2A}{bc}$
Höhen	$h_a=b\sin\gamma$	$h_b=a\sin\gamma$	$h_c=a\sin\beta$
	$h_a=c\sin\beta$	$h_b=c\sin\alpha$	$h_c=b\sin\alpha$
Satz des Pythagoras	$a_1^2+h_a^2=c^2$ $c=\sqrt{a_1^2+h_a^2}$	$a_2^2+h_a^2=b^2$ $b=\sqrt{a_2^2+h_a^2}$	$h_a^2=c^2-a_1^2$ $h_a=\sqrt{c^2-a_1^2}$
a1 + a2 = a bzw. a1 – a2 = a bzw. a2 – a1 = a	$a_1^2=c^2-h_a^2$ $a_1=\sqrt{c^2-h_a^2}$	$a_2^2=b^2-h_a^2$ $a_2=\sqrt{b^2-h_a^2}$	$h_a^2=b^2-a_2^2$ $h_a=\sqrt{b^2-a_2^2}$
	$b_1^2+h_b^2=a^2$ $a=\sqrt{b_1^2+h_b^2}$	$b_2^2+h_b^2=c^2$ $c=\sqrt{b_2^2+h_b^2}$	$h_b^2=a^2-b_1^2$ $h_b=\sqrt{a^2-b_1^2}$
b1 + b2 = b bzw. b1 – b2 = b bzw. b2 – b1 = b	$b_1^2=a^2-h_b^2$ $b_1=\sqrt{a^2-h_b^2}$	$b_2^2=c^2-h_b^2$ $b_2=\sqrt{c^2-h_b^2}$	$h_b^2=c^2-b_2^2$ $h_b=\sqrt{c^2-b_2^2}$
	$c_1^2+h_c^2=b^2$ $b=\sqrt{c_1^2+h_c^2}$	$c_2^2+h_c^2=a^2$ $a=\sqrt{c_2^2+h_c^2}$	$h_c^2=b^2-c_1^2$ $h_c=\sqrt{b^2-c_1^2}$
c1 + c2 = c bzw. c1 – c2 = c bzw. c2 – c1 = c	$c_1^2=b^2-h_c^2$ $c_1=\sqrt{b^2-h_c^2}$	$c_2^2=a^2-h_c^2$ $c_2=\sqrt{a^2-h_c^2}$	$h_c^2=a^2-c_2^2$ $h_c=\sqrt{a^2-c_2^2}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin\alpha=\frac{h_c}{b}$	$b=\frac{h_c}{\sin\alpha}$	$h_c=b\sin\alpha$
	$\cos\alpha=\frac{c_1}{b}$	$b=\frac{c_1}{\cos\alpha}$	$c_1=b\cos\alpha$

	$\tan\alpha = \frac{h_c}{c_1}$	$c_1 = \frac{h_c}{\tan\alpha}$	$h_c = c_1 \tan\alpha$
	$\sin\alpha = \frac{h_b}{c}$	$c = \frac{h_b}{\sin\alpha}$	$h_b = c\sin\alpha$
	$\cos\alpha = \frac{b_2}{c}$	$c = \frac{b_2}{\cos\alpha}$	$b_2 = c\cos\alpha$
	$\tan\alpha = \frac{h_b}{b_2}$	$b_2 = \frac{h_b}{\tan\alpha}$	$h_b = b_2 \tan\alpha$
	$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$	$a = \frac{h_c}{\sin\beta}$	$h_c = a\sin\beta$
	$\cos\beta = \frac{c_2}{a}$	$a = \frac{c_2}{\cos\beta}$	$c_2 = a\cos\beta$
	$\tan\beta = \frac{h_c}{c_2}$	$c_2 = \frac{h_c}{\tan\beta}$	$h_c = c_2 \tan\beta$
	$\sin\beta = \frac{h_a}{c}$	$c = \frac{h_a}{\sin\beta}$	$h_a = c\sin\beta$
	$\cos\beta = \frac{a_1}{c}$	$c = \frac{a_1}{\cos\beta}$	$a_1 = c\cos\beta$
	$\tan\beta = \frac{h_a}{a_1}$	$a_1 = \frac{h_a}{\tan\beta}$	$h_a = a_1 \tan\beta$
	$\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$	$a = \frac{h_b}{\sin\gamma}$	$h_b = a\sin\gamma$
	$\cos\gamma = \frac{b_1}{a}$	$a = \frac{b_1}{\cos\gamma}$	$b_1 = a\cos\gamma$
	$\tan\gamma = \frac{h_b}{b_1}$	$b_1 = \frac{h_b}{\tan\beta}$	$h_b = b_1 \tan\beta$
	$\sin\gamma = \frac{h_a}{b}$	$b = \frac{h_a}{\sin\gamma}$	$h_a = b\sin\gamma$
	$\cos\gamma = \frac{a_2}{b}$	$b = \frac{a_2}{\cos\gamma}$	$a_2 = b\cos\gamma$
	$\tan\gamma = \frac{h_a}{a_2}$	$a_2 = \frac{h_a}{\tan\gamma}$	$h_a = a_2 \tan\gamma$

<u>Beispiele</u>:

a) *Aufgabe*: Gegeben ist ein Dreieck ΔABC mit Winkel γ=90° und den Seiten a = 6 cm, b = 4,8 cm. Bestimme alle Seiten, Winkel, Flächeninhalt und Umfang des rechtwinkligen Dreiecks.

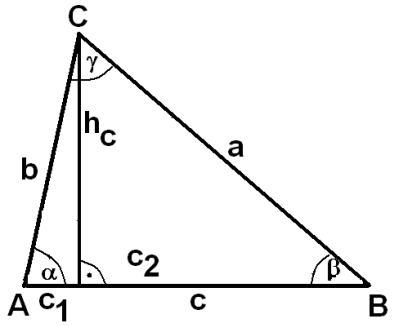
Lösung: I. Satz des Pythagoras -> $c^2 = 6^2 + 4{,}8^2$ => c = 7,68 cm. II. Winkel: $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{6}{4{,}8} = 1{,}25$

=> α = 51,34° => β = 90° – α = 38,66°. III. Flächeninhalt: A = $\frac{ab}{2} = \frac{6 \cdot 4{,}8}{2} = 14{,}4$ cm², Umfang: u = a + b + c =
18,48 cm.

b) *Aufgabe*: Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ΔABC (Winkel γ=90°) mit der Seite b = 10,5 cm und dem Winkel α = 25,8°. Bestimme alle Seiten, Winkel, Flächeninhalt und Umfang des Dreiecks.

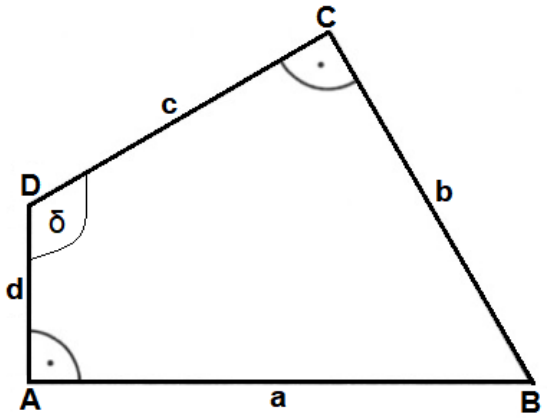
Lösung: I. Winkel: α = 25,8° => β = 90° – α = 63,2°. II. Hypotenuse: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ => $\cos 25{,}8° = \frac{10{,}5}{c}$ => $c = \frac{10{,}5}{\cos 25{,}8°} = 11{,}66$ ≈ 11,7 cm. III. Satz des Pythagoras -> $a^2 = 11{,}66^2 - 10{,}5^2$ => a = 5,07 ≈ 5,1 cm. IV. Flächeninhalt: A = $\frac{ab}{2} = \frac{5{,}1 \cdot 10{,}5}{2} = 26{,}78$ ≈ 26,8 cm², Umfang: u = a + b + c ≈ 27,3 cm.

c) *Aufgabe*: In einem allgemeinen Dreieck ΔABC ist die Seite a = 7 cm gegeben sowie die Winkel α = 76° und γ = 64°. Bestimme die fehlenden Seiten und Winkel im Dreieck.



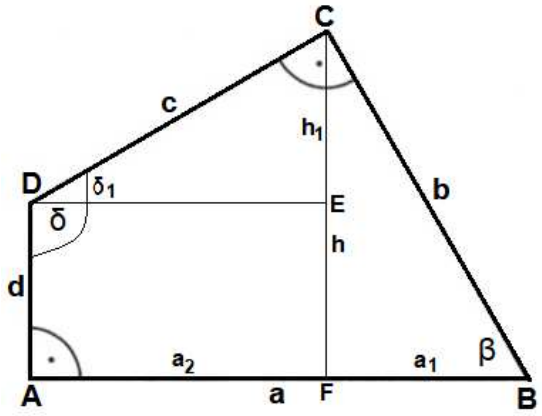
Lösung: I. Wir teilen das Dreieck ΔABC durch die Höhe h_c auf der Seite c in zwei rechtwinklige Dreiecke auf. II. Im rechten rechtwinkligen Dreieck gilt: β = 180° – 76° – 64° = 40°, Hypotenuse a = 7 cm, woraus folgt: $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$ => $\sin 40° = \frac{h_c}{7}$ => $h = 7 \cdot \sin 40° = 4{,}5$ cm. Mit dem Satz des Pythagoras errechnet sich: $c_2 = \sqrt{7^2 - 4{,}5^2} = 5{,}36$ cm. III. Im linken rechtwinkligen Dreieck gilt wegen α = 76°, Gegenkathete h_c = 4,5 cm: $\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ => $\sin 76° = \frac{4{,}5}{b}$ => $b = \frac{4{,}5}{\sin 76°} = 4{,}64$ cm. Mit dem Satz des Pythagoras errechnet sich: $c_1 = \sqrt{4{,}64^2 - 4{,}5^2} = 1{,}13$ cm. IV. Damit ist die Seite c des Dreiecks ΔABC: $c = c_1 + c_2$ = 1,13 + 5,36 = 6,49 ≈ 6,5 cm und alles bestimmt.

d) *Aufgabe*: Im Viereck ABCD sind die Seiten b = 7 cm, d = 3,3 cm lang, für den Winkel an der Ecke D gilt: δ = 118°. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Vierecks.



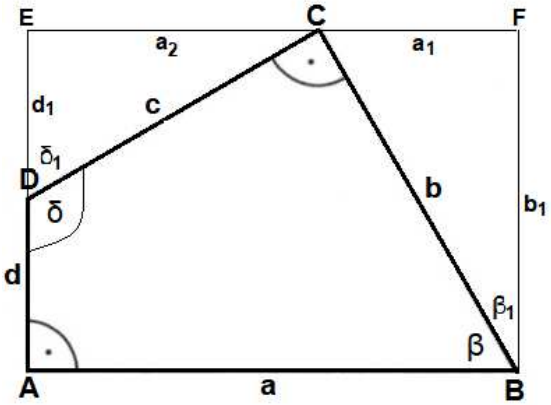
1. Lösung: I. Wir teilen zunächst das Viereck ABCD in rechtwinklige Innendreiecke und ein Innen-

rechteck mit Hilfe von zusätzlichen Punkten E und F ein:



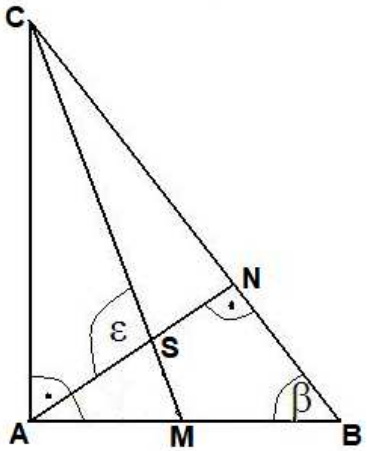
II. Im Viereck ABCD gilt die Winkelsumme von 360°, so dass sich der Winkel an der Viereckecke B auf Grund der beiden rechten Winkel und des Winkels δ = 118° errechnet als: β = 360° – 2·90° – δ = 62°. Wir verfügen damit im rechtwinkligen Dreieck BCF über einen bekannten Winkel (β = 62°) und eine bekannte Seite (b = 7 cm, Hypotenuse), so dass sich mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung: $\sin\beta = \frac{h}{b}$ => $\sin 62° = \frac{h}{7}$ => $h = 7 \cdot \sin 62° = 6{,}18$ cm die Höhe h = $\overline{CF}$ (Gegenkathete) errechnen lässt. Der Satz des Pythagoras liefert dann die dritte Seite (Kathete a_1) im Dreieck BCF: $a_1^2 = b^2 - h^2 = 7^2 - 6{,}18^2 = 10{,}81$ => $a_1 = \sqrt{10{,}81} = 3{,}29$ cm. Im Dreieck DEC erhalten wir die Seite h_1 = $\overline{CE}$ als: h_1 = h – d = 6,18 – 3,3 = 2,88 cm. Der Winkel δ_1 ist dort: δ_1 = δ – 90° = 118° – 90° = 28°. Auch im Dreieck DEC sind somit zwei Größen bekannt (h_1 = 2,88 cm, δ_1 = 28°), so dass beispielsweise die Anwendung des Tangens auf die Strecke a_2 = $\overline{AF}$: $\tan\delta_1 = \frac{h_1}{a_2}$ => $\tan 28° = \frac{2{,}88}{a_2}$ => $a_2 = \frac{2{,}88}{\tan 28°} = 5{,}42$ cm ergibt. Mit dem Satz des Pythagoras errechnet sich die dritte Seite (Hypotenuse c) im Dreieck DEC als: $c^2 = a_2^2 + h_1^2 = 5{,}42^2 + 2{,}88^2 = 37{,}67$ => $c = \sqrt{37{,}67} = 6{,}14$ ≈ 6,1 cm. III. Wir haben damit alle Informationen, um den Umfang des Vierecks ABCD zu ermitteln. Für die Seiten dieser geometrischen Figur gilt: a = a_1 + a_2 = 3,29 + 5,42 = 8,71 ≈ 8,7 cm, b = 5,5 cm, c = 6,1 cm, d = 3,5 cm, für den Umfang mithin: u = a + b + c + d = 8,7 + 5,5 + 6,1 + 3,5 = 23,8 cm. IV. Der Flächeninhalt des Vierecks ABCD folgt aus den Flächeninhalten der beiden rechtwinkligen Dreiecke BCF und DEC sowie des Rechtecks AFED: $A_{\Delta BCF}$ = $a_1h/2$ = 3,29·6,18/2 = 10,17 ≈ 10,2 cm², $A_{\Delta DEC}$ = $a_2h_1/2$ = 5,42·2,88/2 = 7,8 cm², A_{AFED} = a_2d = 5,42·3,3 = 17,89 ≈ 17,9 cm², woraus als Flächeninhalt des Vierecks: A = $A_{\Delta BCF}$ + $A_{\Delta DEC}$ + A_{AFED} = 10,2 + 7,8 + 17,9 = 35,9 cm² folgt.

2. Lösung: I. Wir ergänzen zunächst das Viereck ABCD durch rechtwinklige Außendreiecke mit den zusätzlichen Ecken E und F:



II. Im Viereck ABCD gilt die Winkelsumme von 360°, so dass sich der Winkel an der Viereckecke B auf Grund der beiden rechten Winkel und des Winkels δ = 118° errechnet als: β = 360° – 2·90° – δ = 62°. Der Nebenwinkel des Winkels β an der Ecke B ist: β_1 = 90° – β = 90° – 62° = 28°. Wir verfügen damit im rechtwinkligen Dreieck BFC über einen bekannten Winkel (β_1 = 28°) und eine bekannte Seite (b = 7 cm, Hypotenuse), so dass sich mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung: $\cos\beta_1 = \frac{b_1}{b}$ => $\cos 28° = \frac{b_1}{7}$ => $b_1 = 7 \cdot \cos 28° = 6{,}18$ cm die Strecke b_1 = $\overline{BF}$ (Ankathete) errechnen lässt. Der Satz des Pythagoras liefert dann die dritte Seite (Kathete a_1) im Dreieck BFC: $a_1^2 = b^2 - b_1^2 = 7^2 - 6{,}18^2 = 10{,}81$ => $a_1 = \sqrt{10{,}81} = 3{,}29$ cm. Für das rechtwinklige Dreieck CED berechnen wir den Winkel: δ_1 = 180° – δ = 180° – 118° = 62° und die Seite d_1 = $\overline{DE}$: $d_1 = b_1 - d$ = 6,18 – 3,3 = 2,88 cm. Auch im Dreieck CED sind somit zwei Größen bekannt (d_1 = 2,88 cm, δ_1 = 62°), so dass beispielsweise die Anwendung des Tangens auf die Strecke a_2 = $\overline{AF}$: $\tan\delta_1 = \frac{a_2}{d_1}$ => $\tan 62° = \frac{a_2}{2{,}88}$ => $a_2 = 2{,}88 \cdot \tan 62° = 5{,}42$ cm ergibt. Mit dem Satz des Pythagoras errechnet sich die dritte Seite (Hypotenuse c) im Dreieck DEC als: $c^2 = a_2^2 + d_1^2 = 5{,}42^2 + 2{,}88^2 = 37{,}67$ => $c = \sqrt{37{,}67} = 6{,}14$ ≈ 6,1 cm. III. Wir haben damit alle Informationen, um den Umfang des Vierecks ABCD zu ermitteln. Für die Seiten dieser geometrischen Figur gilt: a = $a_1 + a_2$ = 3,29 + 5,42 = 8,71 ≈ 8,7 cm, b = 5,5 cm, c = 6,1 cm, d = 3,5 cm, für den Umfang mithin: u = a + b + c + d = 8,7 + 5,5 + 6,1 + 3,5 = 23,8 cm. IV. Der Flächeninhalt des Vierecks ABCD folgt aus den Flächeninhalten der beiden rechtwinkligen Dreiecke BCF und DEC sowie des Rechtecks AFED: $A_{\Delta BCF} = a_1h/2$ = 3,29·6,18/2 = 10,17 ≈ 10,2 cm², $A_{\Delta DEC} = a_2h_1/2$ = 5,42·2,88/2 = 7,8 cm², $A_{AFED} = a_2d$ = 5,42·3,3 = 17,89 ≈ 17,9 cm², woraus als Flächeninhalt des Vierecks: $A = A_{\Delta BCF} + A_{\Delta DEC} + A_{AFED}$ = 10,2 + 7,8 + 17,9 = 35,9 cm² folgt.

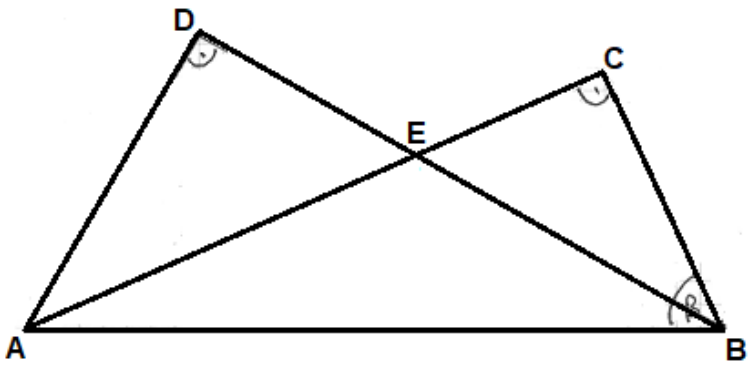
d) *Aufgabe*: Im nachstehenden rechtwinkligen Dreieck ABC halbiert die Mittellinie im Punkt M die Seite AB. Es ist: $\overline{AB}$ = 8,9 cm, $\overline{BC}$ = 14,3 cm. Zu bestimmen ist der Winkel ε und die Fläche des Dreiecks AMS.



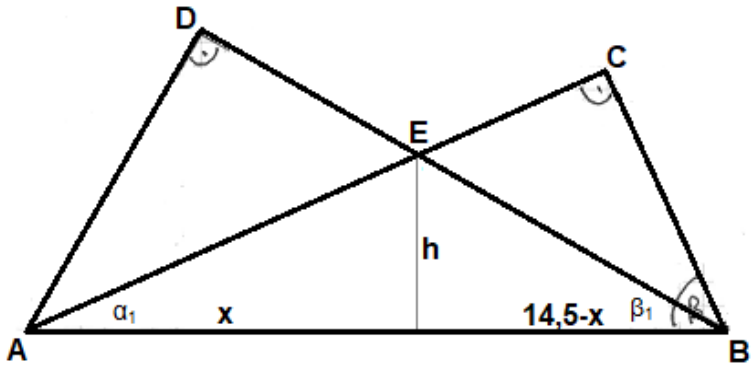
Lösung: I. Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck ABC und bestimmen den Winkel β bei B mit: $\cos\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{8{,}9}{14{,}3} = 0{,}6224$ => β = 51,5°. Der Winkel α_1 bei A ist dann im Dreieck ABN: α_1 = 90° – β = 38,5°. II. Im Dreieck AMC ist auf Grund des Satzes des Pythagoras im Dreieck ABC die Seite AC zu errechnen mit: $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = 14{,}3^2 - 8{,}9^2 = 125{,}28$ => $\overline{AC}$ = 11,2 cm. Im Dreieck AMC bestimmt wegen $\overline{AM}$ = 8,9/2 = 4,45 cm sich der Winkel δ mit: $\tan\delta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = \frac{11{,}2}{4{,}45} = 2{,}512$ cm => δ = 68,33°. Der dritte Winkel ε_1 im Dreieck AMS ist dann: ε_1 = 180° – α_1 – δ = 73,2°. III. ε_1 ist der Nebenwinkel zu ε. Damit gilt: ε = 180° – ε_1 = 106,8°.

IV. Im Dreieck AMS errichten wir die Höhe h auf der Seite AS als x und haben: $\sin\alpha_1 = \frac{h}{\overline{AM}}$ => $\sin 38{,}5° = \frac{h}{4{,}45}$ => $h = 4{,}45 \sin 38{,}5° = 2{,}77$ cm. V. Mit x = x_1 + x_2 bestimmt sich x_1 nach dem Satz des Pythagoras als: $x_1^2 = \overline{AM}^2 - h^2 = 4{,}45^2 - 2{,}77^2 = 12{,}13$ => x_1 = 3,48 cm. Für x_2 haben wir wegen ε_1 = 73,2°: $\tan\varepsilon_1 = \frac{h}{x_2}$ => $\tan 73{,}2° = \frac{2{,}77}{x_2}$ => $x_2 = \frac{2{,}77}{\tan 73{,}2°} = 0{,}84$ cm. Dann ist: x = 3,48 + 0,84 = 4,32 cm. VI. Die Fläche A des Dreiecks AMS errechnet sich damit wie folgt: $A = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2} \cdot 4{,}32 \cdot 2{,}77 = 5{,}98$ cm².

e) *Aufgabe*: Gesucht ist für zwei rechtwinklige Dreiecke ABC und ABD der Abstand des Punktes E von der Strecke AB, wenn gilt: $\overline{AB}$ = 14,5 cm, $\overline{BC}$ = 12,7 cm; β = 65,6°.



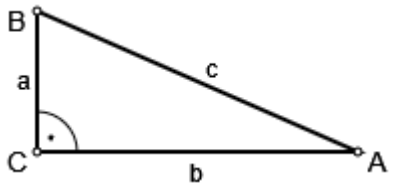
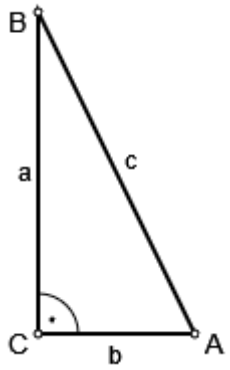
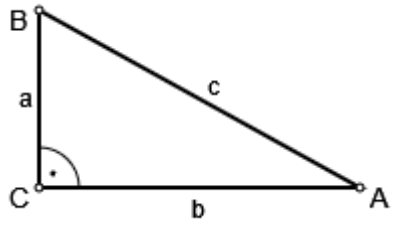
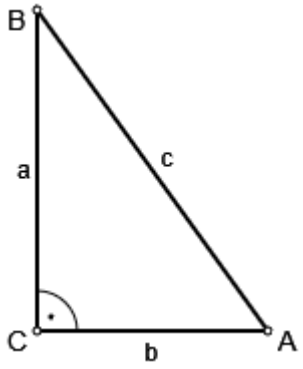
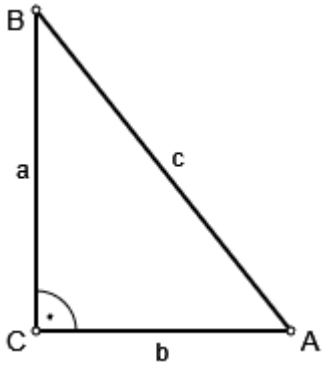
Lösung: I. Wir zeichnen die Höhe h auf AB ein und kennzeichnen die Winkel α_1 und β_1. Die Strecken x und 14,5–x unterteilen die Seite AB.

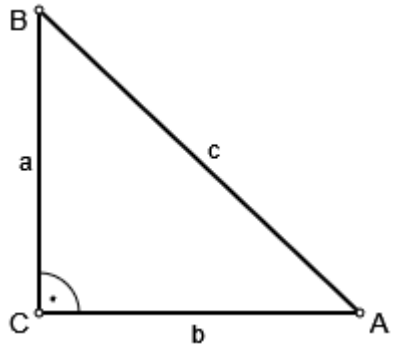
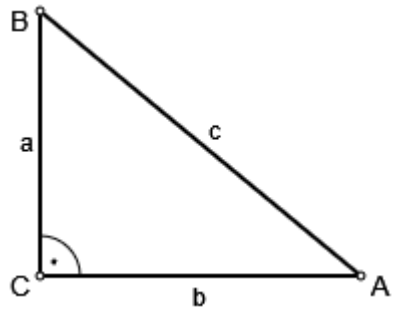
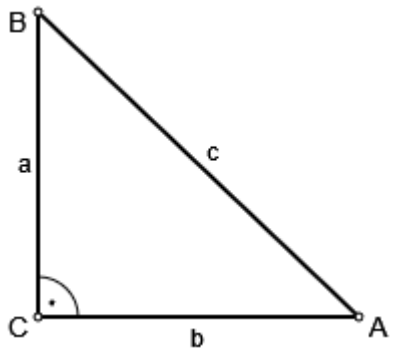


II. Der Winkel α_1 errechnet sich im rechtwinkligen Dreieck ABD als: α_1 = 90° – β = 90° – 65,6° = 24,4°. Für den Winkel β_1 gilt im rechtwinkligen Dreieck ABC: $\cos\beta_1 = \frac{12{,}7}{14{,}5} = 0{,}876$ => β_1 = 28,9°. III. Wir betrachten die durch x und h sowie durch 14,5–x und h aufgespannten rechtwinkligen Dreiecke und haben für das erste dieser Dreiecke: $\tan\alpha_1 = \frac{h}{x}$ => $h = x\tan\alpha_1 = x\tan 24{,}4° = 0{,}454x$ (1), für das zweite: $\tan\beta_1 = \frac{h}{14{,}5 - x}$ => $h = (14{,}5 - x)\tan\beta_1 = (14{,}5 - x)\tan 28{,}9° = 8 - 0{,}552x$ (2). IV. Gleichsetzen der h-Terme (1) und (2) ergibt: (1) = (2) => 0,454x = 8–0,552x => 1,006x = 8 => x = 7,95 cm. V. Mit x errechnen wir h als: h = 0,454·7,95 = 3,61 cm.

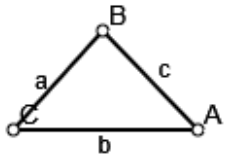
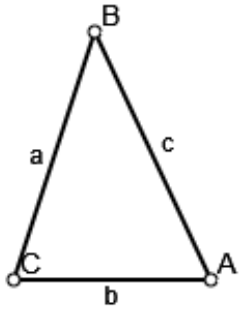
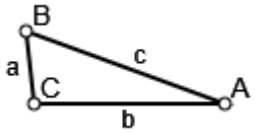
Aufgabenblatt: Trigonometrie

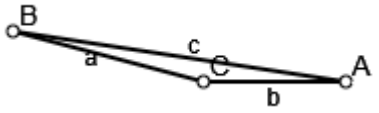
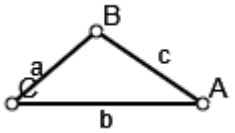
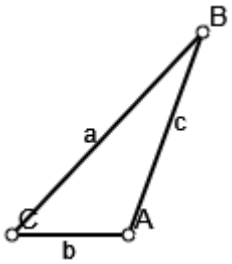
1. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel im, die Fläche und den Umfang des rechtwinkligen Dreiecks ΔABC (γ=90°).

	Gegeben:	*Grafik:*
a)	a = 7.4 cm, c = 18.4 cm	
b)	b = 4.8 cm, c = 11 cm	
c)	c = 13.1 cm, β = 61.3°	
d)	c = 18.1 cm, α = 54.2°	
e)	a = 7.8 cm, α = 51.5°	

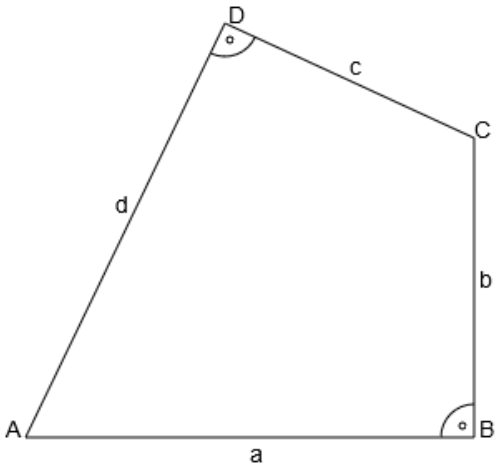
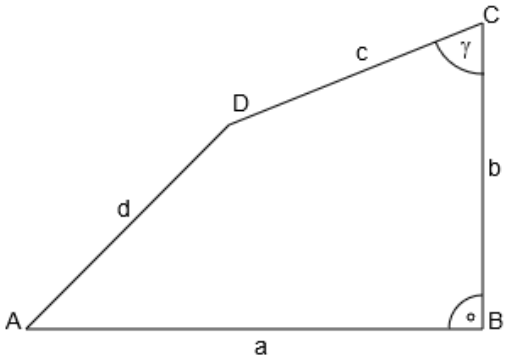
f)	b = 16.9 cm, α = 43.3°	
g)	a = 13.9 cm, b = 16.9 cm	
h)	a = 18.2 cm, b = 19.2 cm	

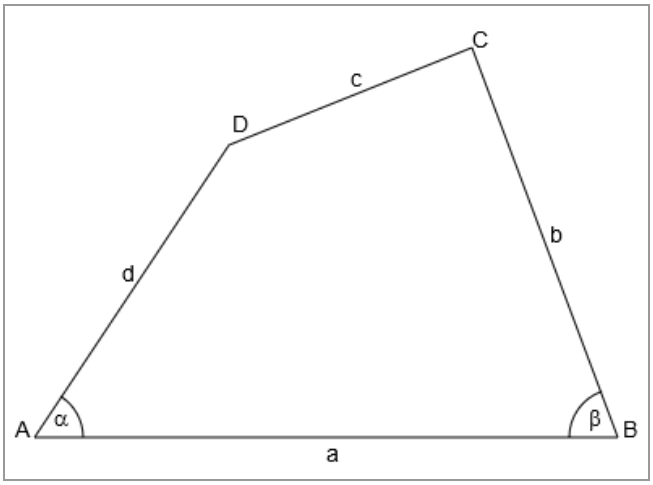
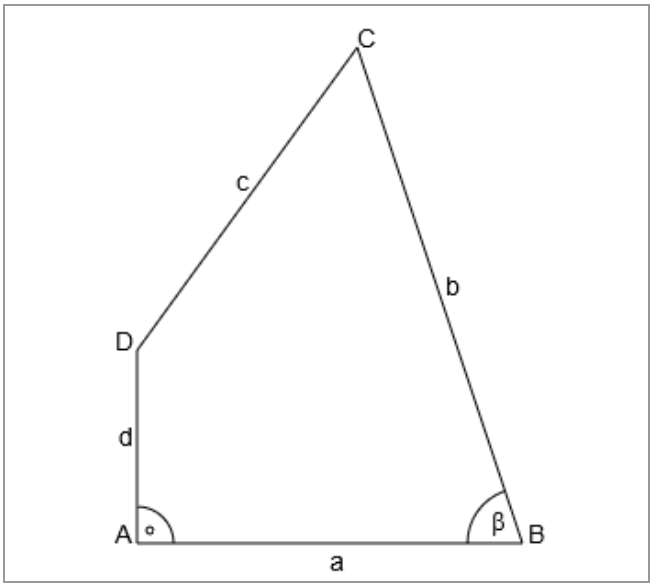
2. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel im, die Fläche und den Umfang des allgemeinen Dreiecks ΔABC.

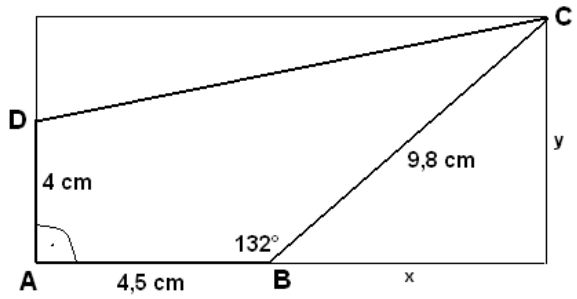
	Gegeben:	*Grafik:*
a)	b = 9.5 cm, β = 85.5°, γ = 48.2°	
b)	a = 19.2 cm, b = 14.4 cm, β = 42.9°	
c)	b = 15 cm, c = 16.6 cm, γ = 96.1°	

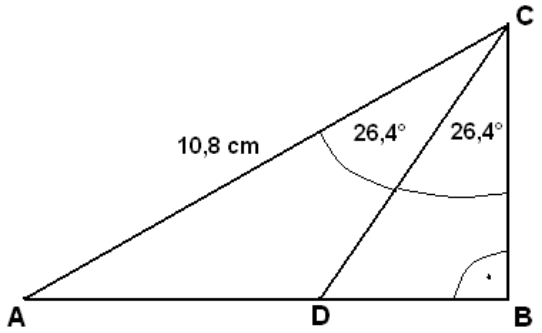
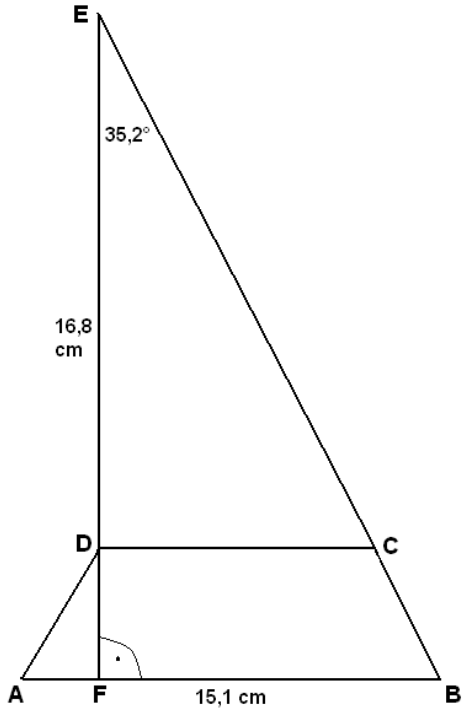
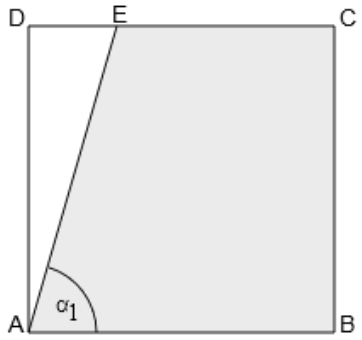
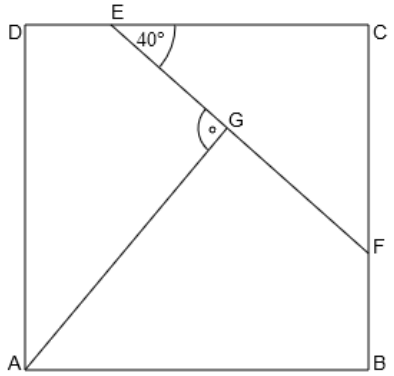
d)	a = 7.5 cm, α = 8.4°, γ = 165.5°	
e)	a = 9.7 cm, b = 16.5 cm, β = 104.8°	
f)	a = 17.4 cm, α = 109.9°, β = 23.2°	

3. Berechne Flächeninhalt und Umfang des Vierecks ABCD.

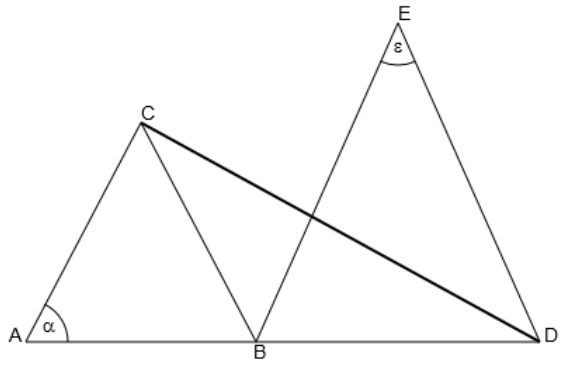
	Gegeben:	*Grafik:*
a)	a = 9 cm, b = 6 cm, d = 9,2 cm	
b)	a = 6 cm, b = 4 cm, c = 3,6 cm, γ = 71,2°	

c)	a = 12 cm, b = 8,5 cm, d = 7,2 cm, α = 58,5°, β = 69,8°	
d)	a = 7 cm, b = 9,5 cm, c= 6,8 cm, d = 3,5 cm β = 71,3°	

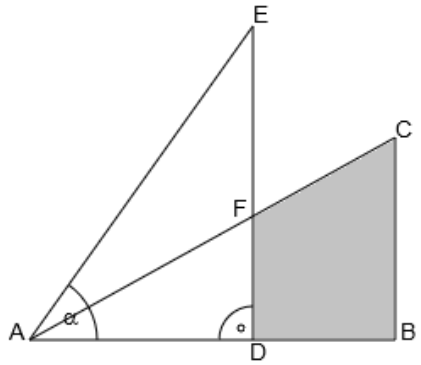
4. a) Berechne Flächeninhalt und Umfang des Vierecks ABCD.	

b) Berechne die Fläche des Dreiecks ADC.	
c) Gegeben ist das gleichschenklige Trapez ABCD und die Längen $\overline{AB}$ = 15,1 cm, $\overline{EF}$ = 16,8 cm. Berechne Umfang und Fläche des Trapezes ABCD.	
d) Die Seitenlänge des Quadrats ABCD beträgt 6 cm, der eingezeichnete Winkel beträgt α_1 = 73°. Berechne den Umfang des Vierecks ABCE im Quadrat.	
e) In einem Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 8 cm ist der Abstand der Ecke A zur Strecke EF zu berechnen; $\overline{DE}$ = 2 cm.	

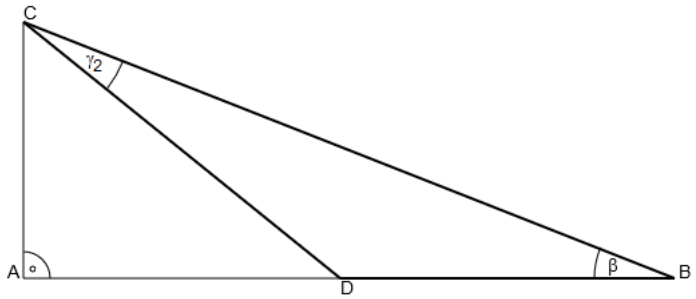
5. a) Gegeben sind die zwei gleichschenkligen Dreiecke ABC und CDE mit: $\overline{AB}$ = 8,2 cm, $\overline{DE}$ = 12,4 cm, $\overline{AC}$ = $\overline{BC}$, $\overline{BE}$ = $\overline{DE}$, α = 64°, ε = 48°. Berechne die Länge der Strecke $\overline{CD}$.



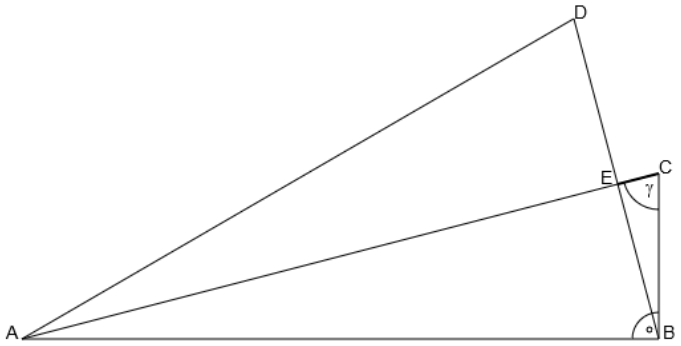
b) Die Strecke $\overline{AC}$ = 8,2 cm ist die Winkelhalbierende des Winkels α. Zudem gilt: $\overline{AE}$ = 7,6 cm, $\overline{BC}$ = 4cm. Berechne den Winkel α und bestimme den Flächeninhalt des Trapezes DBCF.



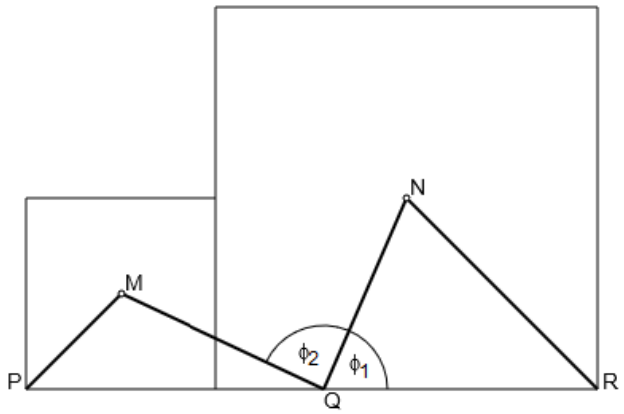
c) Gegeben sind die Winkel γ_2 = 15,8° und β = 22,8° sowie die Strecke $\overline{AD}$ = 6,3 cm. Berechne den Umfang des Dreiecks BCD.



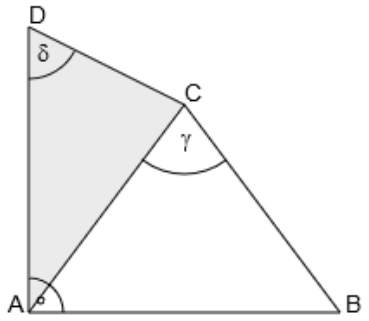
d) Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, das Dreieck ABD gleichschenklig mit $\overline{AB}$ = $\overline{AD}$ = 8 cm. Die Hypotenuse im Dreieck ABC halbiert den Winkel bei A, es gilt zudem: γ = 75°. Berechne die Länge der Strecke $\overline{CE}$ mit E als Schnittpunkt zwischen Hypotenuse und Strecke $\overline{BD}$.



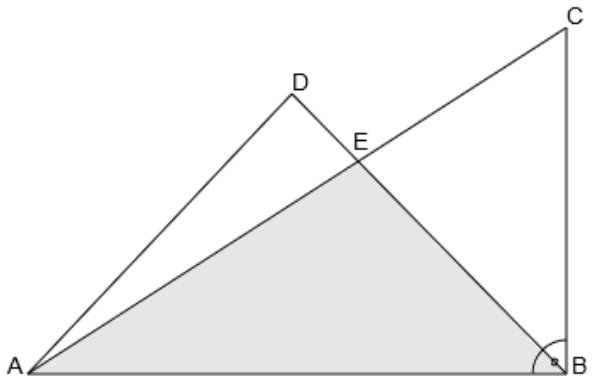
e) Die Seitenlänge des kleinen Quadrats beträgt 4 cm, die des großen Quadrats ist doppelt so lang. M und N sind die Mittelpunkte der jeweiligen Quadrate. Berechne die Länge des Streckenzugs PMQNR sowie die Weite des Winkels φ_2, wenn der Winkel φ_1 = 66,5° gegeben ist.



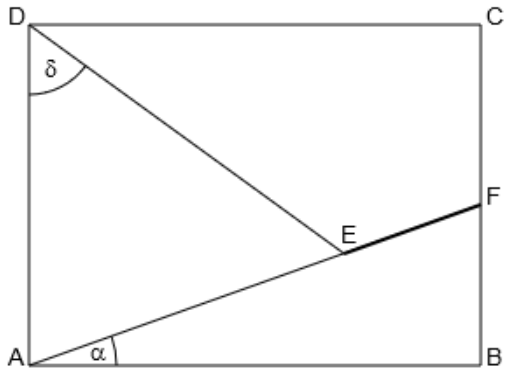
6. a) Das Viereck ABCD und das gleichschenklige Dreieck ABC (mit $\overline{AC} = \overline{BC}$) haben die Seite $\overline{AB}$ = 6 cm gemeinsam. Der Winkel bei C ist γ = 73,7° groß, der Winkel bei D δ = 62,5°. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ACD.



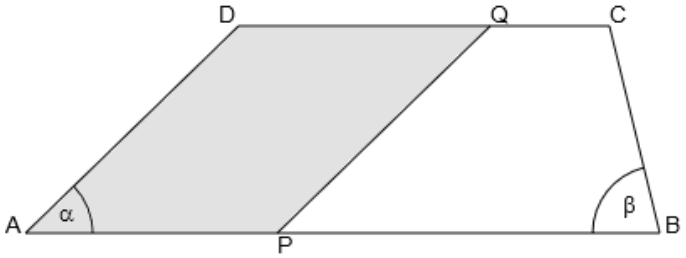
b) Das rechtwinklige Dreieck ABC besitzt die Seiten: $\overline{AB}$ = 10,4 cm, $\overline{BC}$ = 6,8 cm. Mit dem recht-winkligen Dreieck die Seite $\overline{AB}$ gemeinsam hat das gleichschenklige Dreieck ABD mit $\overline{AD} = \overline{BD}$ = 7,6 cm. Bestimme den Abstand des Punktes E von der Seite $\overline{AB}$ und den prozentualen Anteil des Flächeninhalts des Dreiecks ABE am Flächeninhalt des Dreiecks ABC.



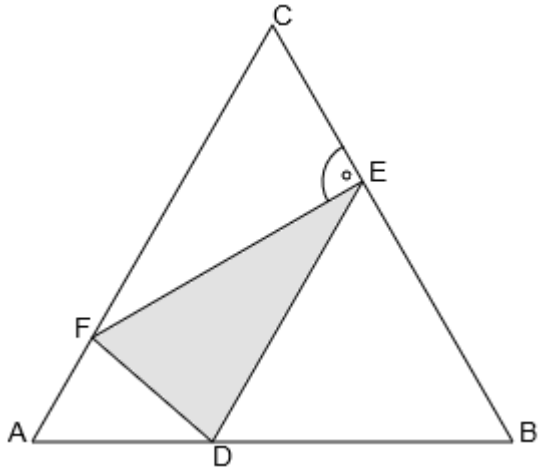
c) Das Rechteck ABCD hat eine Länge von $\overline{AB}$ = 8,6 cm und eine Höhe von $\overline{AD}$ = 6,5 cm. Im Rechteck liegen die Winkel α = 19,5° und δ = 55,3° vor. Berechne die Länge der Strecke $\overline{EF}$.



d) Im Trapez ABCD gilt: $\overline{AB}$ = 12,6 cm, $\overline{AD}$ = 5,9 cm, α = 44°, β = 76,2°. Berechne die Seitenlänge $\overline{CD}$ des Trapezes. Berechne die Abstände $\overline{QC}$ und $\overline{AP}$, wenn das Parallelogramm APQD denselben Flächeninhalt wie das Trapez PBCQ besitzt.



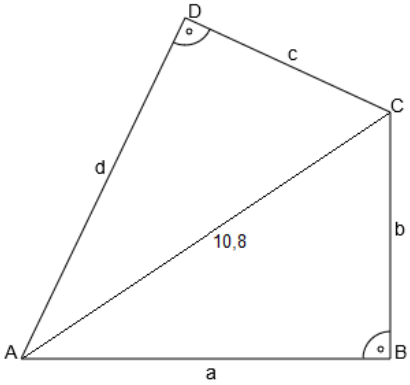
e) Das gleichseitige Dreieck ABC hat eine Seitenlänge von 8 cm. In das gleichseitige Dreieck wird das Dreieck DEF so einbeschrieben, dass das Dreieck DBE ebenfalls gleichseitig ist und die Seite $\overline{EF}$ = 5,2 cm senkrecht auf der Seite $\overline{BC}$ des gleichseitigen Dreiecks ABC steht. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks DEF.



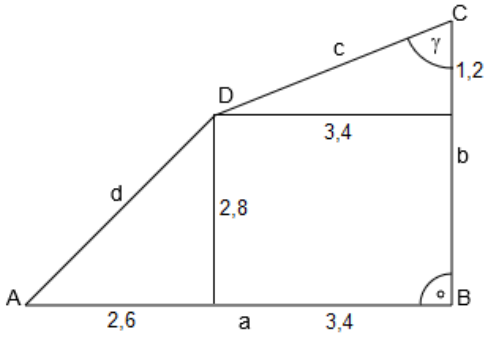
Lösungen: 1a) a = 7.4 cm, b = 16.9 cm, c = 18.4 cm, α = 23.6°, β = 66.4°, A = 62.5 cm^2, u = 42.7 cm; b) a = 9.9 cm, b = 4.8 cm, c = 11 cm, α = 64.1°, β = 25.9°, A = 23.8 cm^2, u = 25.7 cm; c) a = 6.3 cm, b = 11.5 cm, c = 13.1 cm, α = 28.7°, β = 61.3°, A = 36.2 cm^2, u = 30.9 cm; d) a = 14.7 cm, b = 10.6 cm, c = 18.1 cm, α = 54.2°, β = 35.8°, A = 77.9 cm^2, u = 43.4 cm; e) a = 7.8 cm, b = 6.2 cm, c = 10 cm, α = 51.5°, β = 38.5°, A = 24.2 cm^2, u = 24 cm; f) a = 15.9 cm, b = 16.9 cm, c = 23.2 cm, α = 43.3°, β = 46.7°, A = 134.4 cm^2, u = 56 cm; g) a = 13.9 cm, b = 16.9 cm, c = 21.9 cm, α = 39.4°, β = 50.6°, A = 117.5 cm^2, u = 52.7 cm; h) a = 18.2 cm, b = 19.2 cm, c = 26.5 cm, α = 43.5°, β = 46.5°, A = 174.7 cm^2, u = 63.9 cm.

2a) a = 6.9 cm, b = 9.5 cm, c = 7.1 cm, α = 46.4°, β = 85.5°, γ = 48.2°, h_a = 7.1 cm, h_b = 5.1 cm, h_c = 6.9 cm, A = 32.8 cm^2, u = 23.5 cm; b) a = 19.2 cm, b = 14.4 cm, c = 20.1 cm, α = 65.2°, β = 42.9°, γ = 71.9°, h_a = 13.7 cm, h_b = 18.2 cm, h_c = 13.1 cm, A = 138.2 cm^2, u = 53.7 cm; c) a = 5.7 cm, b = 15 cm, c = 16.6 cm, α = 20°, β = 64°, γ = 96.1°, h_a = 14.9 cm, h_b = 5.7 cm, h_c = 5.1 cm, A = 42.8 cm^2, u = 37.3 cm; d) a = 7.5 cm, b = 5.4 cm, c = 12.8 cm, α = 8.4°, β = 6.1°, γ = 165.5°, h_a = 1.3 cm, h_b = 1.9 cm, h_c = 0.8 cm, A = 20.3 cm^2, u = 25.7 cm; e) a = 9.7 cm, b = 16.5 cm, c = 11.1 cm, α = 34.6°, β = 104.8°, γ = 40.6°, h_a = 10.7 cm, h_b = 6.3 cm, h_c = 9.4 cm, A = 80 cm^2, u = 37.3 cm; f) a = 17.4 cm, b = 7.3 cm, c = 13.5 cm, α = 109.9°, β = 23.2°, γ = 46.8°, h_a = 5.3 cm, h_b = 12.7 cm, h_c = 6.9 cm, A = 63.5 cm^2, u = 38.2 cm.

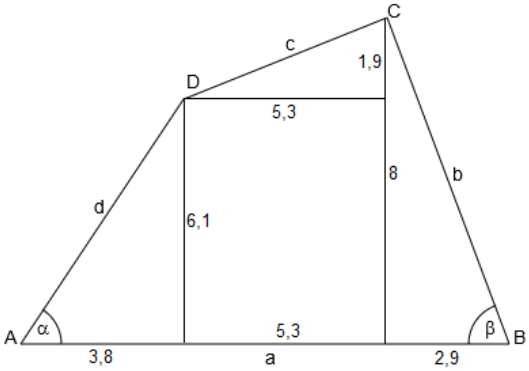
3a) c = 5,5 cm, u = 29,7 cm, A = 52,3 cm^2:



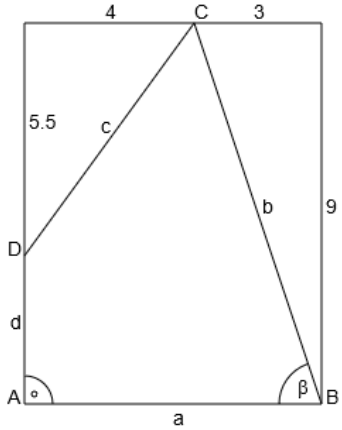
3b) b = 3,8 cm, u = 17,4 cm, A = 15,2 cm^2



3c) c = 5,6 cm, u = 33,3 cm, A = 60,6 cm^2:



3d) u = 26,8 cm, A = 38,5 cm^2:



4a) x = 6,56 cm, y = 7,28 cm, $\overline{DC}$ = 11,53 cm, u_{ABCD} = 29,83 cm, A_{ABCD} = 38,5 cm^2 / 4b) γ = 52,8°, $\overline{AB}$ = 8,6 cm, $\overline{BC}$ = 6,53 cm, $\overline{DB}$ = 3,24 cm, A_{ABC} = 28,08 cm^2, A_{DBC} = 10,58 cm^2, A_{ADC} = 17,5 cm^2 / 4c) $\overline{FB}$ = 11,85 cm, $\overline{AF}$ = 3,25 cm, c = 8,6 cm, ∠FAD = 54,8°, $\overline{DF}$ = 4,61 cm, b = d = 5,64 cm, u = 34,98 cm, A_{ABCD} = 54,63 cm^2 / 4d) $\overline{AE}$ = 6,3 cm, $\overline{DE}$ = 1,8 cm, $\overline{CE}$ = 4,2 cm -> u = 22,5 cm / 4e) $\overline{AE}$ = 8,25 cm, ∠AEG = 180° – 40° – ∠AED = 64°, $\overline{AG}$ = 7,4 cm.

5a) h_{ABC} = 8,41 cm, h_{BDE} = 11,33 cm, $\overline{BD}$ = 10,1 cm, $\overline{CD}$ = 16,5 cm / 5b) α = 54,6°, $\overline{AB}$ = 7,2 cm, $\overline{AD}$ = 4,4 cm, h_{Tr} = 2,8 cm, $\overline{DF}$ = 3,2 cm -> A_{Tr} = 10 cm^2 / 5c) γ = 55,2°, γ_1 = 39,4°, $\overline{AC}$ = 7,67 cm, $\overline{CD}$ = 10 cm, $\overline{AB}$ = 18,25 cm, $\overline{BC}$ = 19,46 cm -> u = 35,4 cm / 5d) $\overline{AC}$ = 8,28 cm, $\overline{BC}$ = 2,14 cm, α = 30°, rechter Winkel bei E, $\overline{BE}$ = 2,07 cm -> $\overline{EC}$ = 0,54 cm / 5e) $\overline{PM}$ = 2,83 cm, $\overline{PQ}$ = 6,26 cm, $\overline{MQ}$ = 4,71 cm, $\overline{QR}$ = 5,74 cm, $\overline{QN}$ = 4,36 cm, $\overline{NR}$ = 5,66 cm -> Streckenlänge l = 17,56 cm, Winkel φ_2 = 88,4°.

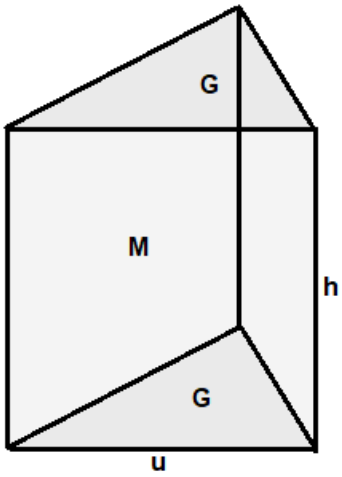
6a) $\overline{AC}$ = 5 cm, ∠CAD = 26,9°, allgemeines Dreieck ACD -> g = $\overline{AD}$ = 5,56 cm, h = 3 cm -> A_{ACD} = 8,35 cm^2 / 6b) ΔABC: α_1 = 33,2°, ΔADE: α_2 = 13,6°, δ = 86,4°, $\overline{AE}$ = 7,5 cm -> Abstand h = 4,1 cm -> A_{ABE} = 21,35 cm^2, A_{ABC} = 35,36 cm^2 -> prozentualer Anteil = 60,4 % / 6c) $\overline{AF}$ = 9,12 cm, allgemeines Dreieck ADE -> $\overline{AE}$ = 6,36 cm -> $\overline{EF}$ = 2,76 cm / 6d) $\overline{CD}$ = 12,6 – 4,24 – 1 = 7,36 cm, h_{Tr} = 4,1 cm, A_{Tr} = 40,92 cm^2, A_P = 20,46 cm^2 -> $\overline{AP}$ = 5 cm, $\overline{QC}$ = 2,36 cm / 6e) $\overline{CE}$ = 3 cm, $\overline{CF}$ = 6cm, allgemeines Dreieck DEF -> $\overline{DE}$ = 5cm, $\overline{DF}$ = 2,65 cm -> A_{DEF} = 6,51 cm^2.

Datenblatt: Prismen

Ein (gerades) Prisma ist ein geometrischer Körper, bei dem eine (n-eckige) Grundfläche parallel zu einer dazu gleichen Deckfläche ist und die Prismenhöhe h als Verbindung zwischen entsprechenden Ecken senkrecht zu Grund- und Deckfläche steht. Wir unterscheiden bei Grundkanten a, b, c, … die Grund- und Deckfläche G, die Mantelfläche M, die Oberfläche O sowie das Volumen V.

Prismen

Grundfläche, Umfang: Dreieck	$G = \frac{1}{2} g h_g$	$u = a + b + c$
Grundfläche, Umfang: Quadrat	$G = a^2$	$u = 4a$
Grundfläche, Umfang: Rechteck	$G = ab$	$u = 2a + 2b$
Grundfläche, Umfang: Parallelogramm	$G = ah_a = bh_b$	$u = 2a + 2b$
Grundfläche, Umfang: Trapez	$G = \frac{1}{2}(a + c)h_{Tr}$	$u = a + b + c + d$
Grundfläche, Umfang: Regelmäßiges 6-Eck	$G = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$	$u = 6a$
Grundfläche, Umfang: Regelmäßiges n-Eck	$G = \frac{na^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)}$	$u = na$



Mantelfläche	$M = u \cdot h$	$u = \frac{M}{h}$	$h = \frac{M}{u}$
Oberfläche	$O = 2G + M$	$M = O - 2G$	$G = \frac{O - M}{2}$
Volumen	$V = G \cdot h$	$G = \frac{V}{h}$	$h = \frac{V}{G}$
Winkel zwischen Mantelfläche und Grundfläche:		90°	

Würfel:

Grundfläche, Umfang	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	$u = 4a$	$a = \frac{u}{4}$
Oberfläche	$O = 6a^2$	$a = \sqrt{\frac{O}{6}}$		
Volumen	$V = a^3$	$a = \sqrt[3]{V}$		

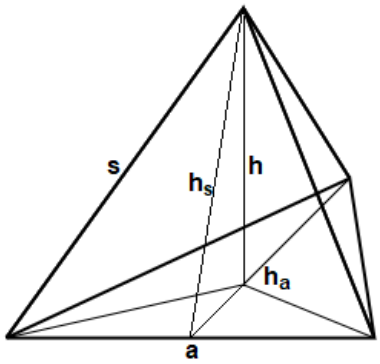
Quader:

Grundfläche, Umfang	$G = ab$	$u = 2a + 2b$		
Oberfläche	$O = 2(ab + ac + bc)$	$a = \frac{O - 2bc}{2(b + c)}$	$b = \frac{O - 2ac}{2(a + c)}$	$c = \frac{O - 2ab}{2(a + b)}$
Volumen	$V = abc$	$a = \frac{V}{bc}$	$b = \frac{V}{ac}$	$c = \frac{V}{ab}$

Datenblatt: Regelmäßige Pyramiden

Regelmäßige Dreieckpyramide:

Eine Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Dreiecks und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.

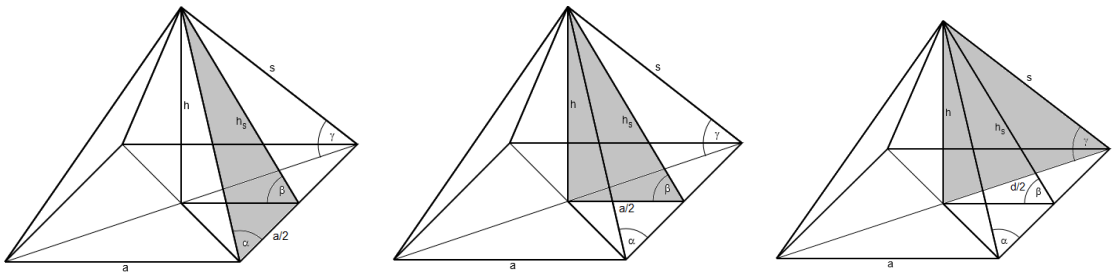


Dreieckspyramide

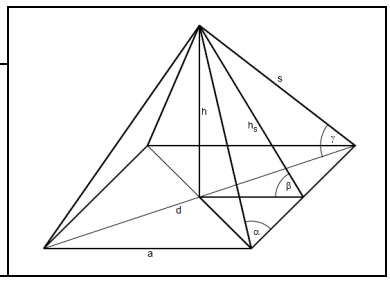
Grundfläche, Dreieckshöhe	$G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$	$a = \sqrt{\frac{4G}{\sqrt{3}}}$	$h_a = \frac{a}{2}\sqrt{3}$
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{h_a}{3}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{h_a}{3}\right)^2$	$h_a^2 = 9(h_s^2 - h^2)$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramidenhöhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{2h_a}{3}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{2h_a}{3}\right)^2$	$h_a^2 = \frac{9}{4}\left(s^2 - h^2\right)$
Mantelfläche	$M = \frac{3}{2}ah_s$	$h_s = \frac{2M}{3a}$	$a = \frac{2M}{3h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = \frac{a}{4}\left(a\sqrt{3} + 6h_s\right)$	$G = O - M$	$M = O - G$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{a^2}{12}h\sqrt{3}$	$G = \frac{3V}{h}$	$h = \frac{3V}{G}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{h_a}{3h_s}$	$\tan\beta = \frac{3h}{h_a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{2h_a}{3s}$	$\tan\gamma = \frac{3h}{2h_a}$

Quadratische Pyramide:

Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.

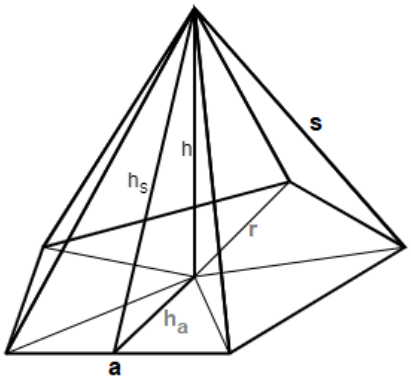


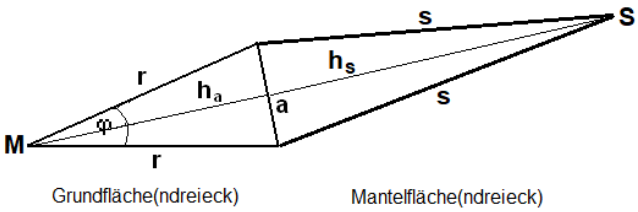
Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen-diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$		
	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2 h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan\beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan\gamma = \frac{2h}{d}$

Regelmäßige Fünfeckpyramide:

Eine Pyramide mit einem regelmäßigen Fünfeck als Grundfläche ist durch die Grundkantenlänge a, die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V. Die Grundfläche G besteht aus fünf gleichschenkligen Dreiecken mit Innenwinkel φ = 72°, Grundseite a, Schenkeln r und Höhe h_a.



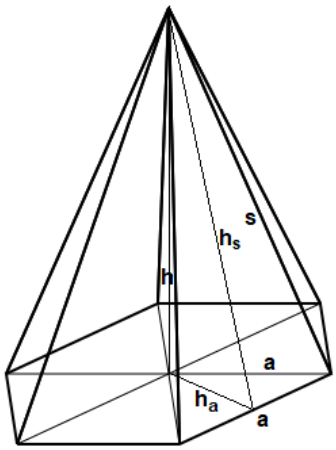


Fünfeckpyramide

Dreieck: Halber Innenwinkel	$\frac{\varphi}{2} = 36°$	$r = \frac{h_a}{\cos 36°}$	$h_a = r \cdot \cos 36°$
Dreieck: Schenkel, Höhe	$r^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$r = \frac{a}{2 \cdot \sin 36°}$	$h_a = \frac{a}{2 \cdot \tan 36°}$
Grundfläche	$G = \frac{5ah_a}{2}$	$h_a = \frac{2G}{5a}$	$a = \frac{2G}{5h_a}$
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + h_a^2$	$h^2 = h_s^2 - h_a^2$	$h_a^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramidenhöhe	$s^2 = h^2 + r^2$	$h^2 = s^2 - r^2$	$r^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = \frac{5}{2} a h_s$	$h_s = \frac{2M}{5a}$	$a = \frac{2M}{5h_s}$
Oberfläche	$O = G + M$	$G = O - M$	$M = O - G$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h$	$G = \frac{3V}{h}$	$h = \frac{3V}{G}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin \alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos \alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan \alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin \beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos \beta = \frac{h_a}{h_s}$	$\tan \beta = \frac{h}{h_a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin \gamma = \frac{h}{s}$	$\cos \gamma = \frac{r}{s}$	$\tan \gamma = \frac{h}{r}$

Regelmäßige Sechseckpyramide:

Eine Pyramide mit einem regelmäßigen Sechseck als Grundfläche ist durch die Grundkantenlänge a, die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V. Die Grundfläche G besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken mit Innenwinkel φ = 60°, Seiten a, Grundflächenradius r und Höhe h_a.

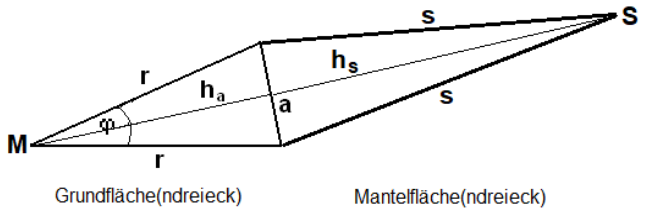


Sechseckpyramide

Gleichseitiges Grundflächendreieck	$h_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$	$a = \frac{2}{\sqrt{3}}h_a$	$A_\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$r = a$
Grundfläche aus sechs Dreiecken	$G = 3ah_a = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$	$h_a = \frac{G}{3a}$	$a = \frac{G}{3h_a} = \sqrt{\frac{2G}{3\sqrt{3}}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + h_a^2$	$h^2 = h_s^2 - h_a^2$	$h_a^2 = h_s^2 - h^2$	
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$	
Pyramidenhöhe	$s^2 = h^2 + a^2$	$h^2 = s^2 - a^2$	$a^2 = s^2 - h^2$	
Mantelflächendreieck	$A_\Delta = \frac{1}{2}ah_s$	$a = \frac{2A_\Delta}{h_s}$	$h_s = \frac{2A_\Delta}{a}$	
Mantelfläche aus sechs Dreiecken	$M = 3ah_s$	$h_s = \frac{M}{3a}$	$a = \frac{M}{3h_s}$	
Oberfläche	$O = G + M = \frac{3a}{2}(a\sqrt{3} + 2h_s)$	$G = O - M$	$M = O - G$	
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{a^2}{2}h\sqrt{3}$	$G = \frac{3V}{h}$	$h = \frac{3V}{G} = \frac{2V}{a^2\sqrt{3}}$	
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$	
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{h_a}{h_s}$	$\tan\beta = \frac{h}{h_a}$	
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{a}{s}$	$\tan\gamma = \frac{h}{a}$	

Regelmäßige Siebeneckpyramide:

Eine Pyramide mit einem regelmäßigen Siebeneck als Grundfläche ist durch die Grundkantenlänge a, die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V. Die Grundfläche G besteht aus sieben gleichschenkligen Dreiecken mit Innenwinkel φ = 51,43°, Grundseite a, Schenkeln r und Höhe h_a.

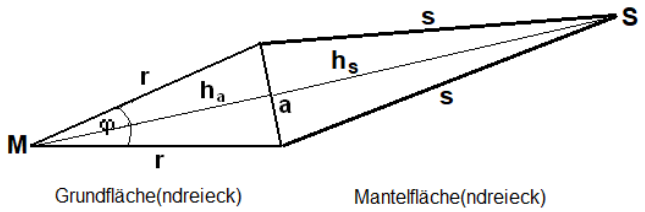


Siebeneckpyramide

Dreieck: Halber Innenwinkel	$\frac{\varphi}{2} = 25{,}7°$	$r = \frac{h_a}{\cos 25{,}7°}$	$h_a = r \cdot \cos 25{,}7°$
Dreieck: Schenkel, Höhe	$r^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$r = \frac{a}{2 \cdot \sin 25{,}7°}$	$h_a = \frac{a}{2 \cdot \tan 25{,}7°}$
Grundfläche	$G = \frac{7ah_a}{2}$	$h_a = \frac{2G}{7a}$	$a = \frac{2G}{7h_a}$
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + h_a^2$	$h^2 = h_s^2 - h_a^2$	$h_a^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramidenhöhe	$s^2 = h^2 + r^2$	$h^2 = s^2 - r^2$	$r^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = \frac{7}{2} a h_s$	$h_s = \frac{2M}{7a}$	$a = \frac{2M}{7h_s}$
Oberfläche	$O = G + M$	$G = O - M$	$M = O - G$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h$	$G = \frac{3V}{h}$	$h = \frac{3V}{G}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin \alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos \alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan \alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin \beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos \beta = \frac{h_a}{h_s}$	$\tan \beta = \frac{h}{h_a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin \gamma = \frac{h}{s}$	$\cos \gamma = \frac{r}{s}$	$\tan \gamma = \frac{h}{r}$

Regelmäßige Achteckpyramide:

Eine Pyramide mit einem regelmäßigen Achteck als Grundfläche ist durch die Grundkantenlänge a, die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V. Die Grundfläche G besteht aus acht gleichschenkligen Dreiecken mit Innenwinkel φ = 45°, Grundseite a, Schenkeln r und Höhe h_a.

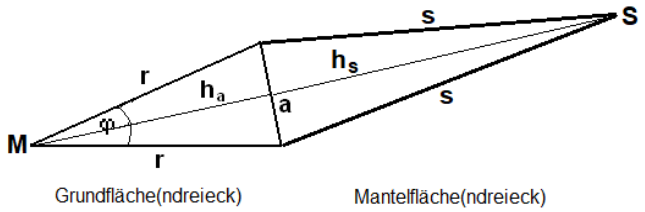


Achteckpyramide

Dreieck: Halber Innenwinkel	$\frac{\varphi}{2} = 22{,}5°$	$r = \frac{h_a}{\cos 22{,}5°}$	$h_a = r \cdot \cos 22{,}5°$
Dreieck: Schenkel, Höhe	$r^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$r = \frac{a}{2 \cdot \sin 22{,}5°}$	$h_a = \frac{a}{2 \cdot \tan 22{,}5°}$
Grundfläche	$G = 4ah_a$	$h_a = \frac{G}{4a}$	$a = \frac{G}{4h_a}$
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + h_a^2$	$h^2 = h_s^2 - h_a^2$	$h_a^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden-Höhe	$s^2 = h^2 + r^2$	$h^2 = s^2 - r^2$	$r^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 4ah_s$	$h_s = \frac{M}{4a}$	$a = \frac{M}{4h_s}$
Oberfläche	$O = G + M$	$G = O - M$	$M = O - G$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h$	$G = \frac{3V}{h}$	$h = \frac{3V}{G}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{h_a}{h_s}$	$\tan\beta = \frac{h}{h_a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{r}{s}$	$\tan\gamma = \frac{h}{r}$

Regelmäßige Neuneckpyramide:

Eine Pyramide mit einem regelmäßigen Neuneck als Grundfläche ist durch die Grundkantenlänge a, die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V. Die Grundfläche G besteht aus neun gleichschenkligen Dreiecken mit Innenwinkel φ = 40°, Grundseite a, Schenkeln r und Höhe h_a.

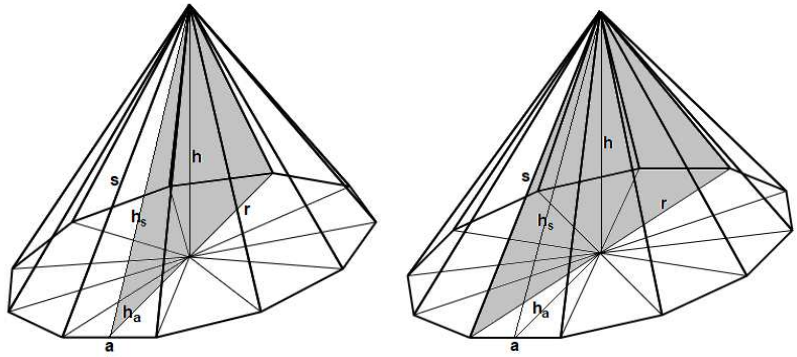


Neuneckpyramide

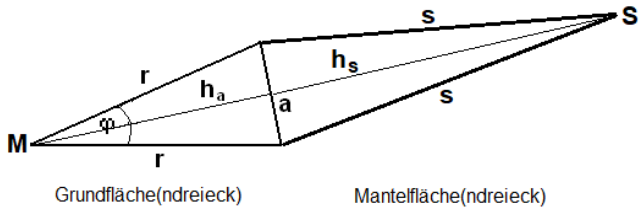
Dreieck: Halber Innenwinkel	$\frac{\varphi}{2} = 20°$	$r = \frac{h_a}{\cos 20°}$	$h_a = r \cdot \cos 20°$
Dreieck: Schenkel, Höhe	$r^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$r = \frac{a}{2 \cdot \sin 20°}$	$h_a = \frac{a}{2 \cdot \tan 20°}$
Grundfläche	$G = \frac{9ah_a}{2}$	$h_a = \frac{2G}{9a}$	$a = \frac{2G}{9h_a}$
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + h_a^2$	$h^2 = h_s^2 - h_a^2$	$h_a^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramidenhöhe	$s^2 = h^2 + r^2$	$h^2 = s^2 - r^2$	$r^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = \frac{9}{2} a h_s$	$h_s = \frac{2M}{9a}$	$a = \frac{2M}{9h_s}$
Oberfläche	$O = G + M$	$G = O - M$	$M = O - G$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h$	$G = \frac{3V}{h}$	$h = \frac{3V}{G}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin \alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos \alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan \alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin \beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos \beta = \frac{h_a}{h_s}$	$\tan \beta = \frac{h}{h_a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin \gamma = \frac{h}{s}$	$\cos \gamma = \frac{r}{s}$	$\tan \gamma = \frac{h}{r}$

Regelmäßige n-Eckpyramide:

Eine Pyramide mit einem regelmäßigen n-Eck als Grundfläche ist durch die Grundkantenlänge a, die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V. Die Grundfläche G besteht aus n gleichschenkligen Dreiecken mit Innenwinkel φ = 360°/n, Grundseite a, Schenkeln r und Höhe h_a.



n-Eckpyramiden: n ungerade, n gerade



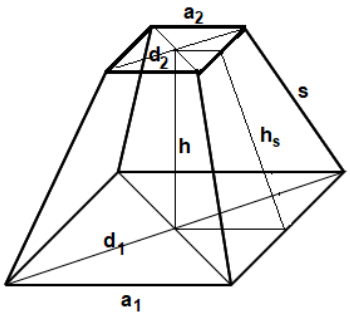
n-Eckpyramide

Dreieck: Halber Innenwinkel	$\frac{\varphi}{2} = \frac{180°}{n}$	$r = \frac{h_a}{\cos(\frac{\varphi}{2})}$	$h_a = r \cdot \cos(\frac{\varphi}{2})$
Dreieck: Schenkel, Höhe	$r^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$r = \frac{a}{2 \cdot \sin(\frac{\varphi}{2})}$	$h_a = \frac{a}{2 \cdot \tan(\frac{\varphi}{2})}$
Grundfläche	$G = \frac{nah_a}{2}$	$h_a = \frac{2G}{na}$	$a = \frac{2G}{nh_a}$
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + h_a^2$	$h^2 = h_s^2 - h_a^2$	$h_a^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramidenhöhe	$s^2 = h^2 + r^2$	$h^2 = s^2 - r^2$	$r^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = \frac{n}{2} a h_s$	$h_s = \frac{2M}{na}$	$a = \frac{2M}{nh_s}$
Oberfläche	$O = G + M$	$G = O - M$	$M = O - G$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h$	$G = \frac{3V}{h}$	$h = \frac{3V}{G}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{h_a}{h_s}$	$\tan\beta = \frac{h}{h_a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{r}{s}$	$\tan\gamma = \frac{h}{r}$

Datenblatt: Pyramidenstumpf

Ein Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlängen a der Quadrate und durch Stumpfhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.

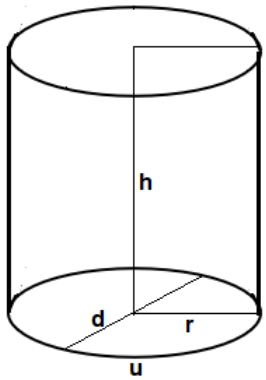
Quadratischer Pyramidenstumpf

Grundfläche, Grundkante unten	$G_1 = a_1^2$	$a_1 = \sqrt{G_1}$	
Grundfläche, Grundkante oben	$G_2 = a_2^2$	$a_2 = \sqrt{G_2}$	
Grundflächen-diagonale unten	$d_1 = a_1\sqrt{2}$	$a_1 = \frac{d_1}{\sqrt{2}}$	
Grundflächen-diagonale oben	$d_2 = a_2\sqrt{2}$	$a_2 = \frac{d_2}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2(a_1 + a_2)h_s$		
	$a_1 = \frac{M}{2h_s} - a_2$		$a_2 = \frac{M}{2h_s} - a_1$
	$h_s = \frac{M}{2(a_1 + a_2)}$		
Oberfläche	$O = G_1 + G_2 + M = a_1^2 + 2(a_1 + a_2)h_s + a_2^2$		
	$M = O - G_1 - G_2$	$G_1 = O - M - G_2$	$G_2 = O - M - G_1$
	$a_1 = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O - 2a_2h_s - a_2^2}$		$a_2 = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O - 2a_1h_s - a_1^2}$
	$h_s = \frac{O - a_1^2 - a_2^2}{2(a_1 + a_2)}$		
Volumen	$V = \frac{1}{3}h(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)$		
	$a_1 = -\frac{1}{2}a_2 + \sqrt{\frac{3V}{h} - \frac{3}{4}a_2^2}$		$a_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \sqrt{\frac{3V}{h} - \frac{3}{4}a_1^2}$
	$h = \frac{3V}{a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2}$		
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a_1	$\sin\alpha_1 = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha_1 = \frac{a_1 - a_2}{2s}$	$\tan\alpha_1 = \frac{2h_s}{a_1 - a_2}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G_1	$\sin\beta_1 = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta_1 = \frac{a_1 - a_2}{2h_s}$	$\tan\beta_1 = \frac{2h}{a_1 - a_2}$

Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G_1	$\sin\gamma_1 = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma_1 = \frac{d_1 - d_2}{2s}$	$\tan\gamma_1 = \frac{2h}{d_1 - d_2}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a_2	$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$	$\alpha_1 = 180° - \alpha_2$	
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G_2	$\beta_2 = 180° - \beta_1$	$\beta_1 = 180° - \beta_2$	
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G_2	$\gamma_2 = 180° - \gamma_1$	$\gamma_1 = 180° - \gamma_2$	

Datenblatt: Zylinder

Ein gerader Zylinder mit einem Kreis als Grundfläche ist durch den Radius r des Kreises und durch die Zylinderhöhe h bestimmt, weiter durch die Grundfläche G, die Oberfläche O, die Mantelfläche M und das Volumen V.

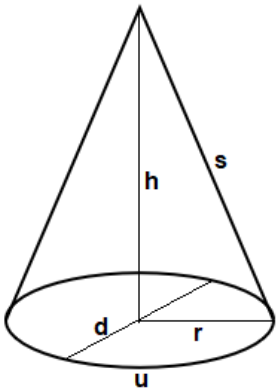


Zylinder

Grundfläche, Radius	$G = \pi r^2$	$r = \sqrt{\frac{G}{\pi}}$	
Durchmesser	$d = 2r$	$r = \frac{d}{2}$	
Kreisumfang	$U = 2\pi r$	$U = \pi d$	$r = \frac{U}{2\pi}$
Mantelfläche	$M = 2\pi r h$	$r = \frac{M}{2\pi h}$	$h = \frac{M}{2\pi r}$
Oberfläche	$O = 2 \cdot G + M = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h)$		
	$G = \frac{O-M}{2}$	$M = O - 2 \cdot G$	
		$r = -\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{O}{2\pi}}$	$h = \frac{O}{2\pi r} - r$
Volumen	$V = G \cdot h = \pi r^2 h$	$r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$	$h = \frac{V}{\pi r^2}$
Radius, Höhe	$r = \frac{2V}{M}$	$h = \frac{M^2}{4\pi V}$	$h = \frac{V}{G}$

Datenblatt: Kegel

Ein gerader Kegel ist durch den Radius r des Kreises als Grundfläche G und durch die Kegelhöhe h bestimmt, weiter durch die Mantellinie s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M und das Volumen V bis hin zum Winkel des zum Kegel gehörenden Kreisausschnitts, der entsteht, wenn man den Kegel abrollt.



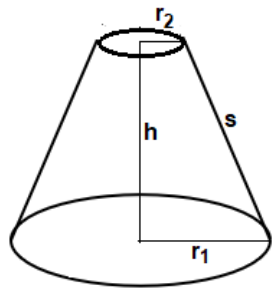
Kegel

Grundfläche, Radius	$G = \pi r^2$	$r = \sqrt{\frac{G}{\pi}}$	
Durchmesser	$d = 2r$	$r = \frac{d}{2}$	
Kreisumfang	$U = 2\pi r$	$U = \pi d$	$r = \frac{U}{2\pi}$
Mantellinie, Höhe	$s^2 = r^2 + h^2$	$r^2 = s^2 - h^2$	$h^2 = s^2 - r^2$
Mantelfläche	$M = \pi r s$	$r = \frac{M}{\pi s}$	$s = \frac{M}{\pi r}$
Oberfläche	$O = G + M = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r+s)$		
	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$r = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{O}{\pi}}$	$s = \frac{O}{\pi r} - r$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$	$h = \frac{3V}{\pi r^2}$
Winkel zwischen Mantel- und Grundfläche	$\sin\alpha = \frac{h}{s}$	$\cos\alpha = \frac{r}{s}$	$\tan\alpha = \frac{h}{r}$
Halber Winkel in der Kegelspitze	$\sin\beta = \frac{r}{s}$	$\cos\beta = \frac{h}{s}$	$\tan\beta = \frac{r}{h}$
Kreisbogen	$b = 2\pi r$	$b = \pi s \cdot \frac{\gamma}{180°}$	$s = b \cdot \frac{180°}{\pi \cdot \gamma}$
Abrollfläche, Kreisausschnitt	$A = M = \pi r s$	$A = \pi s^2 \cdot \frac{\gamma}{360°}$	
Abrollwinkel	$\gamma = \frac{b}{\pi s} \cdot 180°$	$\gamma = \frac{A}{\pi s^2} \cdot 360°$	$\gamma = \frac{r}{s} \cdot 360°$

Datenblatt: Kreiskegelstumpf

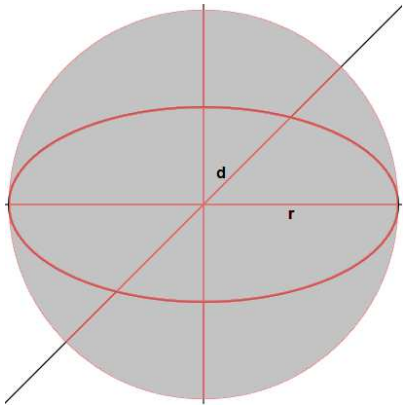
Ein Kegelstumpf mit einem Kreis als Grundfläche und einem zweiten Kreis als Deckfläche ist durch die Radien r_1 und r_2 der Kreise und durch Stumpfhöhe h bestimmt, weiter durch die Mantellinie s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G_1 und die Deckfläche G_2 sowie das Volumen V.

Kreiskegelstumpf

Grundfläche, Radius unten	$G_1 = \pi r_1^2$	$r_1 = \sqrt{\frac{G_1}{\pi}}$	
Deckfläche, Radius oben	$G_2 = \pi r_2^2$	$r_2 = \sqrt{\frac{G_2}{\pi}}$	
Durchmesser unten	$d_1 = 2r_1$	$r_1 = \frac{d_1}{2}$	
Durchmesser oben	$d_2 = 2r_2$	$r_2 = \frac{d_2}{2}$	
Mantellinie, Höhe	$s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2$	$h^2 = s^2 - (r_1 - r_2)^2$	$(r_1 - r_2)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = \pi s(r_1 + r_2)$ $r_1 = \frac{M}{\pi s} - r_2$	$r_2 = \frac{M}{\pi s} - r_1$	$s = \frac{M}{\pi(r_1 + r_2)}$
Oberfläche	$O = G_1 + G_2 + M = \pi\left[(r_1^2 + r_2^2) + s(r_1 + r_2)\right]$ $M = O - G_1 - G_2$ $r_1 = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{O}{\pi} - sr_2 - r_2^2}$	$G_1 = O - M - G_2$ $r_2 = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{O}{\pi} - sr_1 - r_1^2}$	$G_2 = O - M - G_1$ $s = \frac{O - \pi r_1^2 - \pi r_2^2}{\pi(r_1 + r_2)}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ $r_1 = -\frac{1}{2}r_2 + \sqrt{\frac{3V}{\pi h} - \frac{3}{4}r_2^2}$	$r_2 = -\frac{1}{2}r_1 + \sqrt{\frac{3V}{\pi h} - \frac{3}{4}r_1^2}$ $h = \frac{3V}{\pi(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}$	
Winkel zwischen Mantellinie s und Grundfläche	$\sin\alpha_1 = \frac{h}{s}$	$\cos\alpha_1 = \frac{r_1 - r_2}{s}$	$\tan\alpha_1 = \frac{h}{r_1 - r_2}$
Winkel zwischen Mantellinie s und Deckfläche	$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$	$\alpha_1 = 180° - \alpha_2$	

Datenblatt: Kugel

Eine Kugel ist durch den Radius r bestimmt, weiter durch die Oberfläche O und das Volumen V.



Kugel

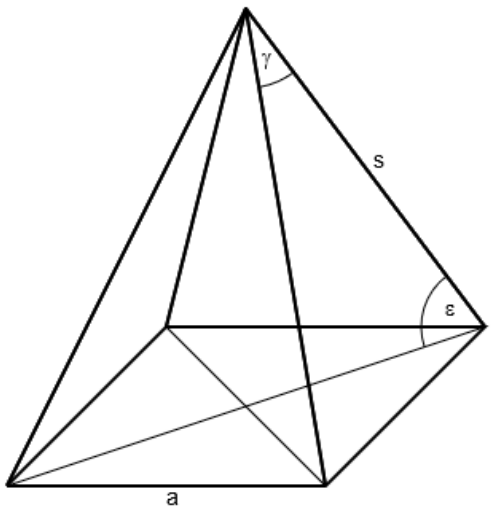
Radius, Durchmesser	$d = 2r$	$r = \frac{d}{2}$	
Kugelumfang	$U = 2\pi r$	$U = \pi d$	$r = \frac{U}{2\pi}$
Oberfläche	$O = 4\pi r^2$	$r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}$	
Volumen	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$	$r = \frac{3V}{O}$

Halbkugel

Radius, Durchmesser	$d = 2r$	$r = \frac{d}{2}$	
Kugelumfang	$U = 2\pi r$	$U = \pi d$	$r = \frac{U}{2\pi}$
Oberfläche	$O = 2\pi r^2$	$r = \sqrt{\frac{O}{2\pi}}$	
Volumen	$V = \frac{2}{3}\pi r^3$	$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$	$r = \frac{3V}{O}$

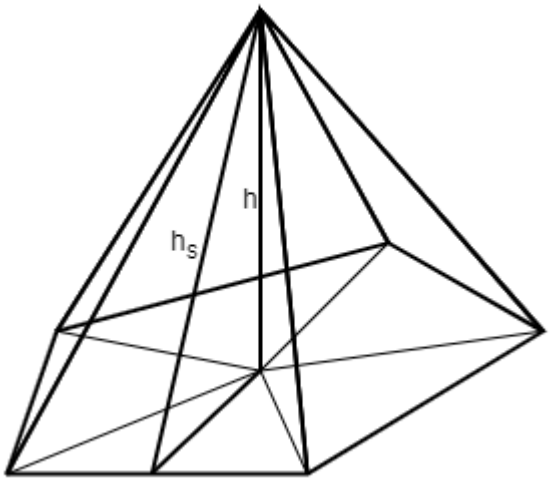
Beispiele:

a) *Aufgabe*: Von einer quadratischen Pyramide sind gegeben: die Grundkante a = 8 cm, der Winkel eines Mantelflächendreiecks γ = 40,8°. Berechne den Winkel, den die Seitenkante mit der Grundfläche einschließt.



Lösung: I. Im gleichschenkligen Mantelflächendreieck ist der Winkel an der Spitze γ = 40,8° groß, die Grundkante ist a = 8 cm lang. Die Halbierung des Dreiecks führt auf zwei rechtwinklige Dreiecke mit Winkel γ/2 = 40,8°:2 = 20,4° und Gegenkathete a/2 = 4 cm. Solch ein rechtwinkliges Dreieck wird außerdem durch die Seitenhöhe h_s als Ankathete und die Seitenkante s als Hypotenuse begrenzt. Wir berechnen die Seitenkante s mit Hilfe des Sinus: $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{s} \Rightarrow$ $\sin 20{,}4° = \frac{4}{s} \Rightarrow s = \frac{4}{\sin 20{,}4°}$ = 11,48 cm. II. Die Grundfläche G der Pyramide ist ein Quadrat mit Grundkantenlänge a = 8 cm. Letztlich nach dem Satz des Pythagoras ist die Diagonale d dieses Quadrats $d = a\sqrt{2} \Rightarrow d = 8\sqrt{2}$ = 11,31 cm. III. Wir betrachten das rechtwinklige Diagonaldreieck in der Pyramide, das durch die Seitenkante s, die halbe Diagonale d/2 und die Pyramidenhöhe h begrenzt wird. Wir bestimmen: d/2 = 11,31:2 = 5,66 cm und kennen mit der Seitenkante s = 11,48 cm somit zwei Seiten im Dreieck. Der Winkel ε zwischen Seitenkante und Grundfläche bestimmt sich dann mit Hilfe des Kosinus: $\cos\varepsilon = \frac{\frac{d}{2}}{s} \Rightarrow \cos\varepsilon = \frac{5{,}66}{11{,}48} \Rightarrow \varepsilon = \cos^{-1}\left(\frac{5{,}66}{11{,}48}\right)$ = 60,46° ≈ 60,5°. Der gesuchte Winkel ist also: ε = 60,5°.

b) *Aufgabe*: Von einer regelmäßigen Fünfeckpyramide sind gegeben: die Seitenhöhe h_s = 6,9 cm, die Höhe h = 6 cm. Berechne Oberfläche und Rauminhalt der Pyramide.



Lösung: I. Zusammen mit h_a, der Höhe in einem der fünf Grundflächendreiecke der Fünfeckpyramide, bilden die Pyramidenhöhe h und die Seitenhöhe h_s das Höhendreieck. Es gilt nach dem Satz des Pythagoras: $h_a^2 = h_s^2 - h^2 = 6{,}9^2 - 6^2 = 11{,}61 \Rightarrow h_a = \sqrt{11{,}61}$ = 3,4 cm. II. Im gleichschenkligen Grundflächendreieck ist der Innenwinkel wegen der regelmäßigen Fünfeckpyramide: φ = 360°:5 = 72°. Der halbe Innenwinkel im halben Grundflächendreieck beträgt demgemäß: φ/2 = 36°. Das halbe Grundflächendreieck ist rechtwinklig mit den Katheten h_a und a/2. Somit berechnen wir mit dem Tangens die Gegenkathete a/2 als: $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h_a} \Rightarrow \tan 36° = \frac{\frac{a}{2}}{3{,}4} \Rightarrow$

$\frac{a}{2} = 3{,}4 \cdot \tan 36° = 2{,}47 \Rightarrow$ a = 4,94 cm und erhalten damit die Pyramidengrundkante a = 4,94 cm.

III. Mit der Grundkante a, der Seitenhöhe h_s und der Grundflächenhöhe h_a erhalten wir sofort die <u>Oberfläche</u> der Pyramide – entweder vermöge der Grundfläche G und der Mantelfläche M mit:

$G = \frac{5}{2} a h_a = \frac{5}{2} \cdot 4{,}94 \cdot 3{,}4$ = 41,99 ≈ 42 cm², $M = \frac{5}{2} a h_s = \frac{5}{2} \cdot 4{,}94 \cdot 6{,}9$ = 85,22 ≈ 85,2 cm² =>

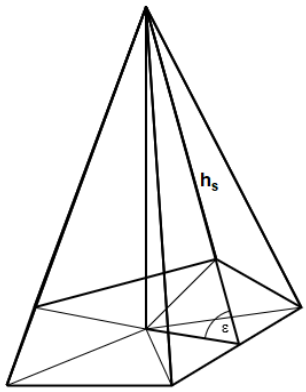
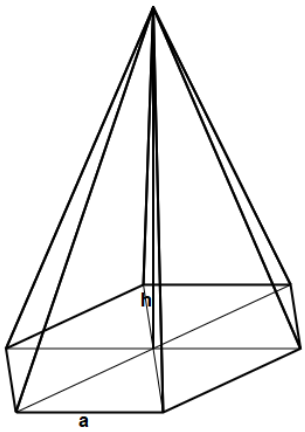
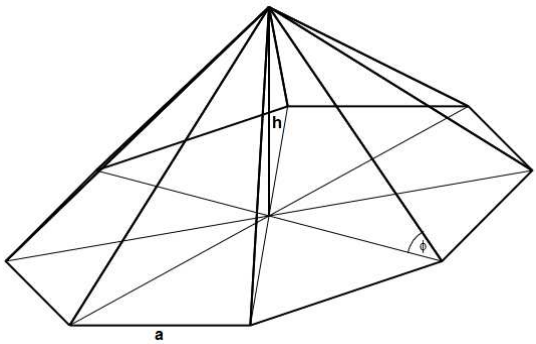
O = G + M = 42 + 85,2 = 127,2 cm² oder unmittelbar vermöge der Formel:

$O = \frac{5}{2} a(h_a + h_s) = \frac{5}{2} \cdot 4{,}94 \cdot (3{,}4 + 6{,}9) = \frac{5}{2} \cdot 4{,}94 \cdot 10{,}3$ = 127,21 ≈ 127,2 cm². IV. Das Volumen (Rauminhalt) der Fünfeckpyramide ergibt sich aus Grundfläche G und Pyramidenhöhe h mit: G = 42 cm² und h = 6 cm als: $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 42 \cdot 6$ = 84 cm³.

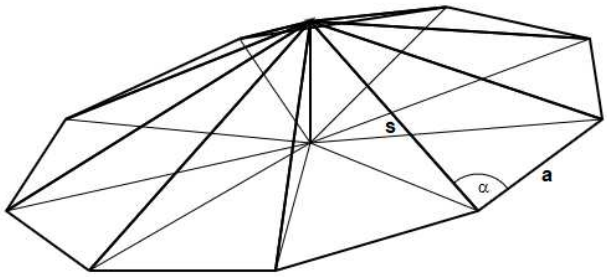
Aufgabenblatt: Räumliche Geometrie

1. Gegeben ist eine quadratische Pyramide. Berechne die fehlenden Größen: Kanten, Höhen, Grund-, Mantel-, Oberfläche, Volumen, Winkel.

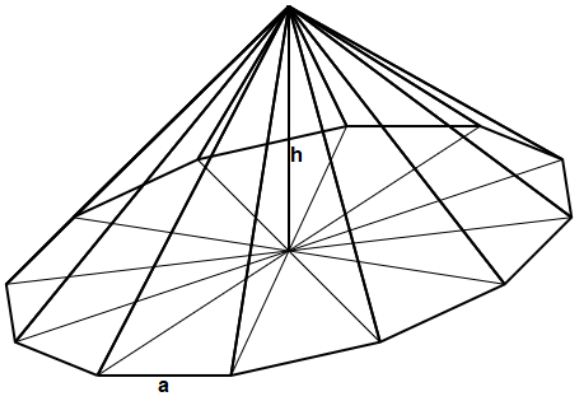
a) $a = 4$ cm, $h = 6$ cm
b) $a = 10$ cm, $h_s = 8$ cm
c) $h_s = 10$ cm, $s = 14$ cm
d) $a = 14$ cm, $M = 560$ cm^2
e) $M = 176$ cm^2, $O = 297$ cm^2
f) $a = 8$ cm, $V = 256$ cm^3

2. a) Von einer regelmäßigen Fünfeckpyramide sind gegeben: Grundkante $a = 4{,}8$ cm, Mantelfläche $M = 120$ cm^2. Berechne die Seitenhöhe h_s und den Winkel ε im Höhendreieck.	
b) Von einer regelmäßigen Sechseckpyramide sind bekannt: $a = 10{,}5$ cm, $h = 24{,}3$ cm. Berechne die Oberfläche der Pyramide.	
c) Bei einer regelmäßigen Achteckpyramide hat ein Manteldreieck eine Fläche von 30 cm^2, die Seitenhöhe ist 10 cm lang. Wie groß ist das Volumen der Pyramide, wie groß der Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche?	

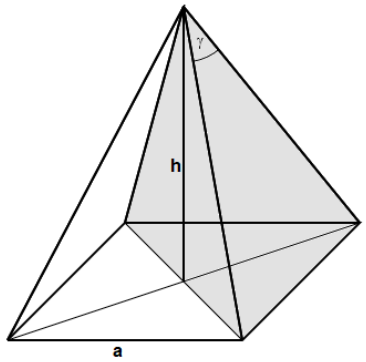
d) In einer regelmäßigen Neuneckpyramide ist die Seitenkante 10 cm lang und der Winkel zwischen Seiten- und Grundkante beträgt 75°. Berechne das Volumen der Pyramide.



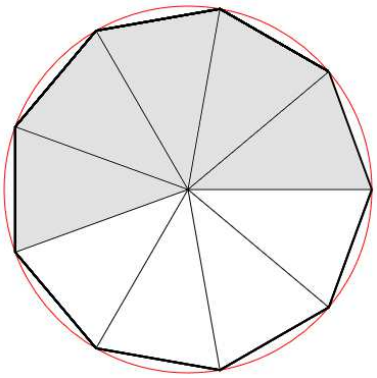
e) Das Volumen einer Zwölfeckpyramide ist 292,6 cm^3 groß, deren Grundkante 3,5 cm lang. Berechne die Oberfläche der Pyramide.



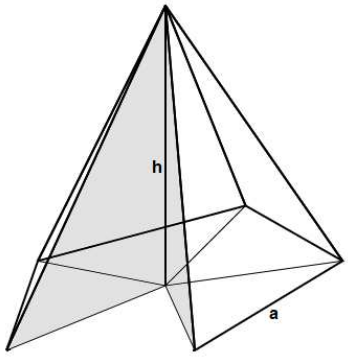
3. a) Eine quadratische Pyramide mit Grundkante a = 10,6 cm und Mantelflächenwinkel γ = 42,9° wird im Diagonalschnitt halbiert. Wie groß ist die Oberfläche einer Pyramidenhälfte?



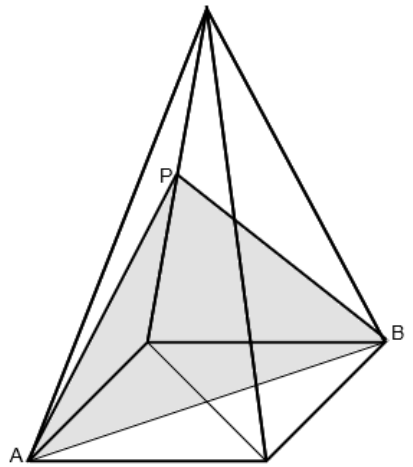
b) Aus einem regelmäßigen Neuneck mit Umkreisradius r = 12 cm werden fünf zusammenhängende Dreieckflächen ausgeschnitten. Die Dreieckflächen bilden den Mantel einer Fünfeckpyramide. Berechne das Volumen dieser Pyramide.



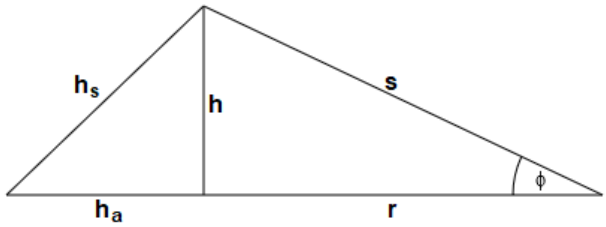
c) Eine regelmäßige Fünfeckpyramide hat das Volumen V = 624 cm^3 und die Grundkantenlänge a = 9 cm. Ein Teil der Pyramide wird ausgeschnitten. Berechne die Oberfläche des neu entstandenen Körpers.



d) Von einer quadratischen Pyramide seien bekannt: Grundkante a = 6,6 cm, Seitenhöhe h_s = 11,4 cm. Der Punkt P halbiert die Seitenkante s der Pyramide. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABP.



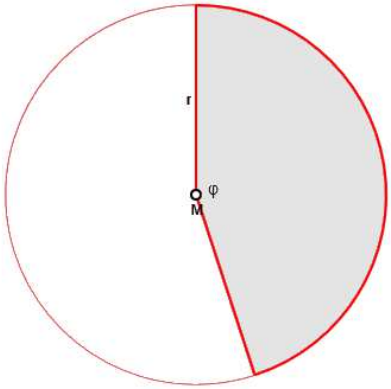
e) Gegeben ist der Querschnitt einer regelmäßigen Dreieckpyramide mit Seitenkante s = 9,8 cm und Winkel φ = 25,4° zwischen Grundfläche und Seitenkante. Berechne Querschnittsfläche und Oberfläche der Pyramide.



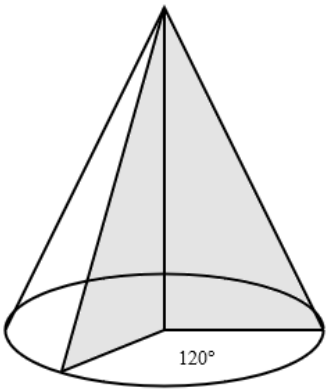
4. Gegeben ist ein Kegel. Berechne die fehlenden Größen: Radius, Höhe, Mantellinie, Grund-, Mantel-, Oberfläche, Volumen, Winkel.

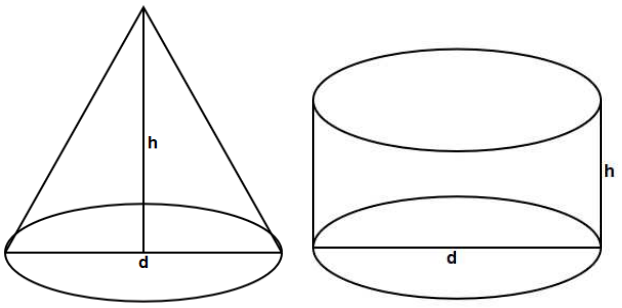
a) r = 10 cm, h = 16 cm
b) h = 10 cm, s = 12 cm
c) r = 9 cm, O = 678.6 cm^2
d) h = 6.4 cm, O = 426.57 cm^2
e) h = 10 cm, V = 670.2 cm^3
f) G = 452.4 cm^2, O = 1206.4 cm^2

5. a) Die Mantelfläche eines Kegels ist ein Kreisausschnitt mit Radius r = 16,5 cm und Kreisausschnittswinkel φ = 162°. Bestimme den Rauminhalt des zur Mantelfläche zugehörigen Kegels.

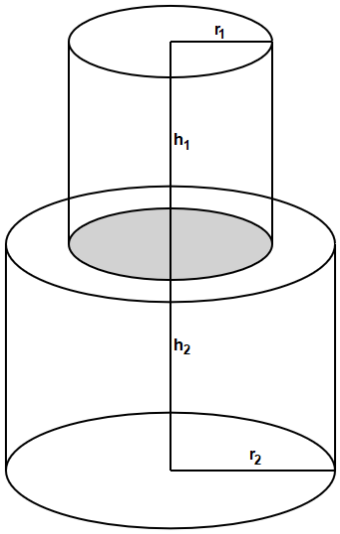
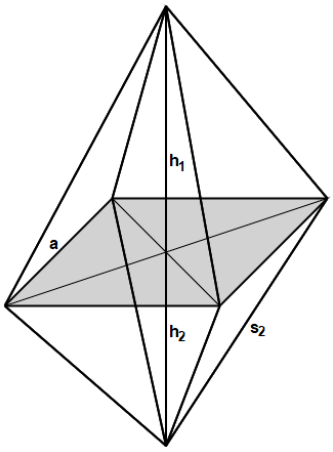
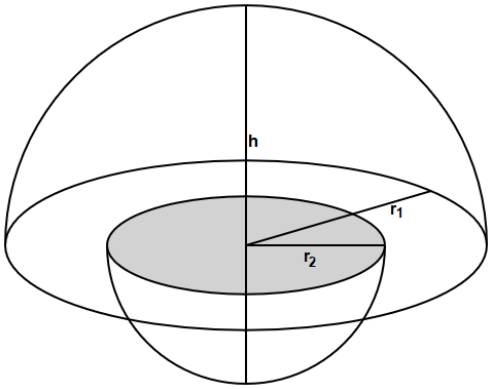


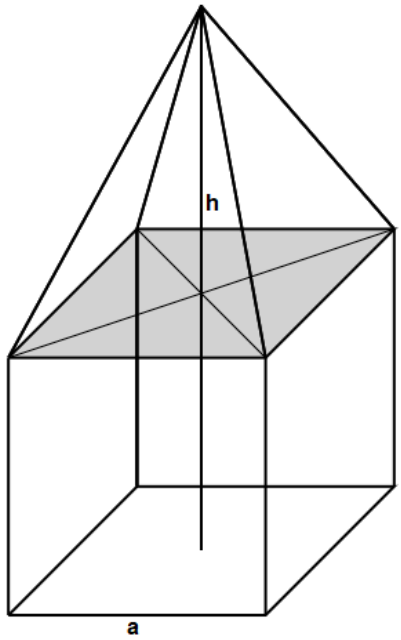
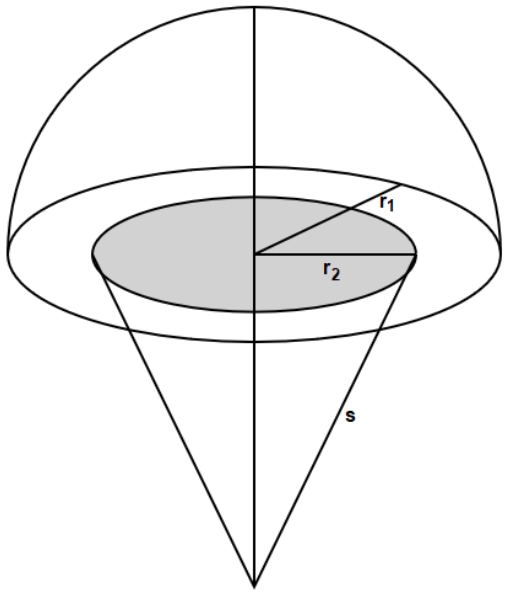
b) Ein Kegel hat ein Volumen V = 400 cm^3, der Umfang der Grundkreises beträgt u = 36 cm. Um wie viel Prozent nimmt die Oberfläche des Kegels ab, wenn ein Drittel des Kegels ausgeschnitten wird?

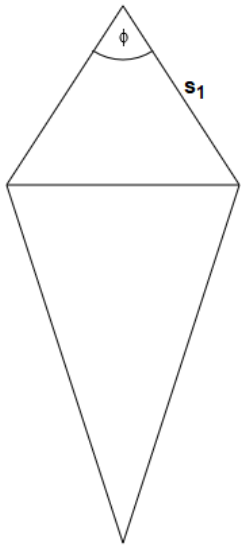


c) Ein Kegel und ein Zylinder besitzen dieselbe Mantelfläche M = 129,8 cm^2 und denselben Durchmesser d. Die Höhe des Kegels beträgt h_{Kegel} = 8 cm. Berechne das Volumen des Zylinders.	

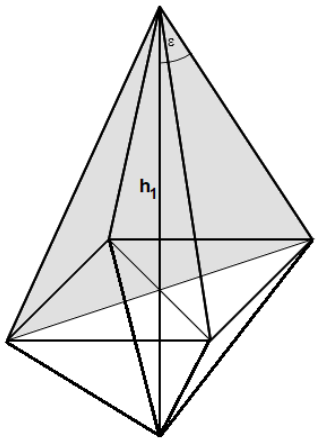
6. Bestimme Oberfläche und Volumen der zusammengesetzten Körper.

	Gegeben:	*Grafik:*
a)	Zusammengesetzter Körper aus zwei Zylindern mit den Radien r_1 = 3,4 cm, r_2 = 5,5 cm und den Höhen h_1 = 6,8 cm, h_2 = 7,6 cm.	
b)	Quadratische Doppelpyramide mit Grundfläche G = 49 cm^2, obere Pyramide mit Höhe h_1 = 8 cm, untere Pyramide mit Seitenkante s_2 = 8 cm.	
c)	Zusammengesetzter Körper aus zwei Halbkugeln mit Gesamthöhe h = 12,3 cm und Radius der oberen Halbkugel r_1 = 7,8 cm.	

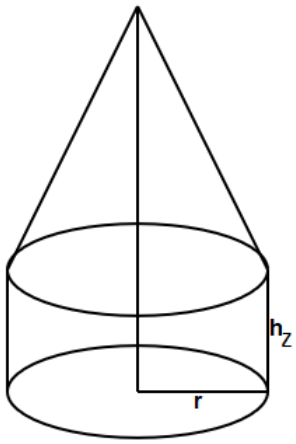
d)	Quadratische Pyramide mit Würfel, Gesamthöhe h = 18,4 cm, Würfelkante a = 8,7 cm.	
e)	Zusammengesetzter Körper aus Halbkugel und Kegel mit Kugelradius r_1 = 6,7 cm, Kegelradius r_2 = 4,4 cm, Mantellinie des Kegels s = 10 cm.	

7. a) Ein Körper besteht aus zwei aneinanderhängenden Kegeln mit derselben Grundfläche. Die Höhe des unteren Kegels ist doppelt so groß wie die des oberen. Der Achsenschnitt durch den Körper zeigt den Winkel φ = 68,4° und die Mantellinie s_1 = 10,4 cm. Berechne das Volumen des Körpers.	

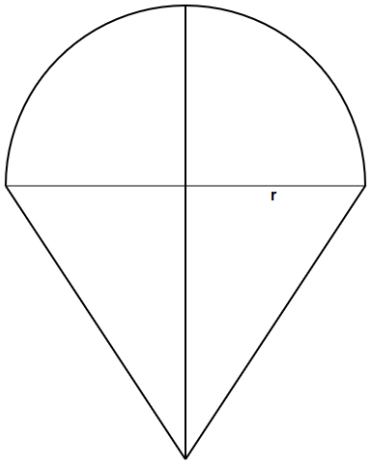
b) Ein Körper ist aus zwei quadratischen Pyramiden mit gleicher Grundfläche zusammengesetzt. Der Diagonalschnitt durch den Körper zeigt: h_1 = 8,4 cm, ε = 45,3°. Das Volumen der unteren Pyramide ist halb so groß wie das der oberen. Berechne die Oberfläche des Körpers.



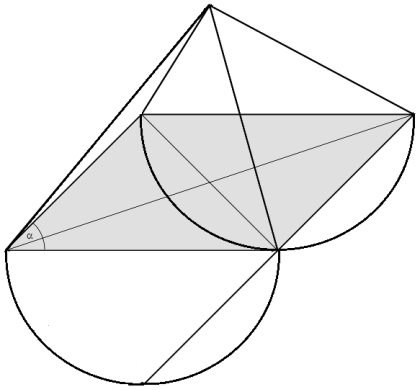
c) Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem Zylinder und einem Kegel mit jeweils gleicher Grundfläche. Dabei gilt: Volumen des Kegels V_K = 503,2 cm^3, Höhe des Kegels h_K = 12,5 cm, Gesamtoberfläche des Körpers O_{ges} = 618,5 cm^2. Berechne die Gesamthöhe des Körpers.



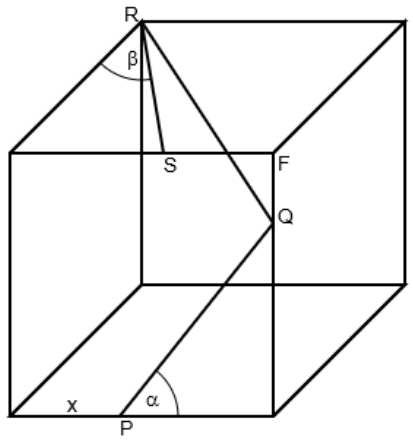
d) Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einer Halbkugel und einem Kegel. Der Flächeninhalt des Achsenschnitts beträgt A_{ges} = 118,7 cm^2, der Radius der Halbkugel ist r = 6,2 cm. Berechne die Oberfläche des Körpers.



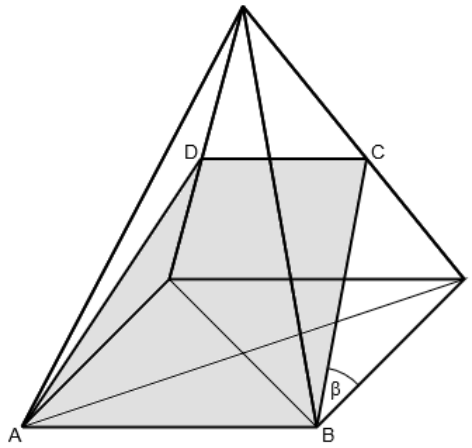
e) In einer quadratischen Pyramide hat die Seitenkante eine Länge s = 12,1 cm, der Basiswinkel einer Mantelfläche beträgt α = 58,7°. Mit der Grundfläche der Pyramide verbunden ist ein Halbzylinder. Pyramide und Halbzylinder bilden einen Körper, dessen Volumen zu bestimmen ist.



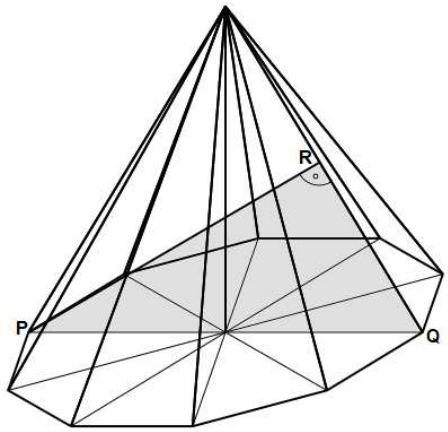
8. a) Ein Würfel hat eine Kantenlänge von 6 cm. Am und im Würfel besitzt der Streckenzug PQRS eine Gesamtlänge von 21,1 cm. Weiter gilt: β = 28,1°, $\overline{FQ}$ = 1,6 cm. Berechne den Winkel α und die Länge der Strecke x.



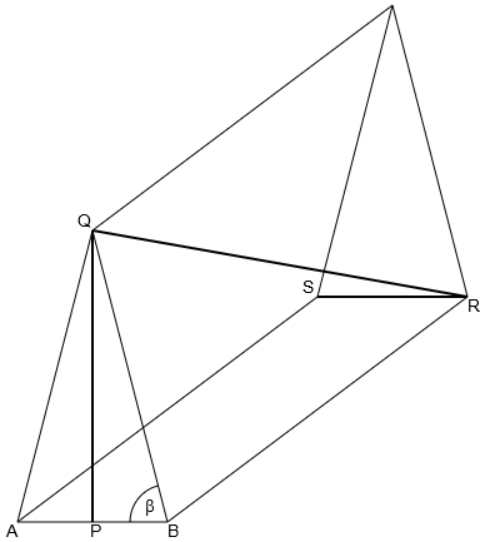
b) Eine quadratische Pyramide hat als Grundkante a = 8,4 cm, als Seitenkante s = 11,5 cm. Weiter ist der Winkel β = 41,7° gegeben. Gesucht ist der Umfang des Trapezes ABCD.



c) Im Diagonalschnitt einer Zehneckpyramide soll der Umfang des rechtwinkligen Dreiecks PQR errechnet werden, wenn das Volumen der Pyramide V = 319,1 cm^3 und die Grundkante a = 3,6 cm beträgt.



d) Ein Prisma hat das gleichschenklige Dreieck ABQ als Grundfläche mit: $\overline{AQ}$ = $\overline{BQ}$ = 8 cm und Winkel β = 75,6°. Weiter hat der Streckenzug PQRS die Länge 26,7 cm. Bestimme die Oberfläche des Prismas.



Lösungen: 1a) h_s = 6.32 cm, s = 6.63 cm, G = 16 cm^2, M = 50,56 cm^2, O = 66,56 cm^2, V = 32 cm^3, α = 72,4°, β = 71,7°, γ = 64,8° / 1b) h = 6.24 cm, s = 9.43 cm, G = 100 cm^2, M = 160 cm^2, O = 260 cm^2, V = 208 cm^3, α = 58,03°, β = 51,3°, γ = 41,4° / 1c) a = 19.6 cm, h = 2 cm, G = 384,16 cm^2, M = 392 cm^2, O = 776,16 cm^2, V = 254,83 cm^3, α = 45,6°, β = 11,5°, γ = 8,2° / 1d) h = 18.73 cm, h_s = 20 cm, s= 21,19 cm, G = 196 cm^2, O = 756 cm^2, V = 1223.69 cm^3, α = 70,07°, β = 69,5°, γ = 62,1° / 1e) a = 11 cm, h = 5,81 cm, h_s = 8 cm, s = 9.71 cm, G = 121 cm^2, V = 234,34 cm^3, α = 55,5°, β = 46,6°, γ = 36,75° / 1f) h = 12 cm, h_s = 12.65 cm, s = 13.27 cm, G = 64 cm^2, M = 202,4 cm^2, O = 266,4 cm^2, V = 234,34 cm^3, α = 72,4°, β = 71,6°, γ = 64,7°.

2a) h_s = 10 cm, ε = 70,7° / 2b) h_a = 9,09 cm, h_s = 25,95 cm, M = 817,29 cm^2, G = 286,44 cm^2, O = 1103,73 cm^2 / 2b) h_s = 25,95 cm, G = 286,44 cm^2, M = 817,29 cm^2, O = 1103,73 cm^2 / 2c) M = 240 cm^2, h_s = 10 cm, a = 6 cm, h = 6,9 cm -> V = 399,52 cm^3, s = 10,44 cm, r = 7,84 cm -> Winkel = 36,9° / 2d) a = 5,18 cm, h_a = 7,11 cm, r = 7,57 cm, G = 165,73 cm^2, h = 6,54 cm, V = 361,3 cm^3 / 2e) h = 6,4 cm, h_s = 9,14 cm, G = 137,15 cm^2, M = 192,03 cm^2, O = 329,2 cm^2.

3a) d = 15 cm, h = 12,4 cm, h_s = 13,5 cm, s = 14,5 cm, O = 398,25 cm^2 -> O_1 = O/2 + dh/2 = 292,13 cm^2 / 3b) s = 12 cm, Mantelflächenspitzenwinkel γ = 40° -> a = 8,2 cm, V = 376,53 cm^3 / 3c) h = 13,42 cm, h_s = 14,78 cm, G = 139,5 cm^2, M = 332,56 cm^2, O = 471,92 cm^2 / 3d) d = 9,33 cm, h = 10,92 cm, s = 11,87 cm, h_{ABP} = 5,94 cm, A_{ABP} = $dh_{ABP}/2$ = 27,71 cm^2 / 3e) a = 15,33 cm, h = 4,2 cm, h_s = 6,1 cm, h_a = 4,43 cm, r = 8,85 cm -> $A_{Querschnitt}$ = 27,89 cm^2, O = 242,23 cm^2.

4a) s = 18.87 cm, G = 314.16 cm^2, M = 592.82 cm^2, O = 906.98 cm^2, V = 1675.52 cm^3, α = 58° / 4b) r = 6.63 cm, G = 138.1 cm^2, M = 250 cm^2, O = 388.1 cm^2, V = 460.3 cm^3, α = 56,5° / 4c) h = 12 cm, s = 15 cm, G = 254.47 cm^2, M = 424.12 cm^2, V = 1017.9 cm^3, α = 53,13° / 4d) r = 7.68 cm, s = 10 cm, G = 185.3 cm^2, M = 241.27 cm^2, V = 395.3 cm^3, α = 39,8° / 4e) r = 8 cm, s = 12.8 cm, G = 201.06 cm^2, M = 321.95 cm^2, O = 523 cm^2, α = 51,3° / 3f) r = 12 cm, h = 16 cm, s = 20 cm, M = 754 cm^2, V = 2412.7 cm^3, α = 53,13°.

5a) u = b = 46,65 cm, s = r = 16,5 cm, A = M = 384,88 cm^2 -> h = 7,43 cm, V = 2118,3 cm^3 / 5b) Kegel: r = 5,73 cm, h = 11,64 cm, s = 12,97 cm, O = 336,59 cm^2 -> ausgeschnittener Kegel: O_1 = 2O/3 + $2A_{Dr}$ = 291,09 cm^2 -> prozentuale Abnahme = -13,52 % / 5c) Kegel: r = 4,5 cm -> Zylinder: $h_{Zylinder}$ = 4,59 cm, V = 292 cm^3.

6a) O = M_1 + O_2 = 597,97 cm^2, V = V_1 + V_2 = 969,21 cm^3 / 6b) O = M_1 + M_2 = 222,96 cm^2, V = V_1 + V_2 = 233 cm^3 / 6c) O = $O_{HKu,1}$ + $O_{HKu,2}$ + A_{KRing} = 637,02 cm^2, V = V_1 + V_2 = 168,83 cm^3 / 6d) h_1 = 9,7 cm, V = V_1 + V_2 = 244,73 + 658,5 = 903,23 cm^3, O = M_1 + $5a^2$ = 184,97 + 378,45 = 563,42 cm^2 / 6e) h_2 = 9 cm, V = V_1 + V_2 = 629,92 + 182,46 = 812,38 cm^3, O = O_1 + M_2 + $A_{Kreisring}$ = 282,05 + 138,48 + 80,2 = 500,73 cm^2.

7a) r = 5,57 cm, h_1 = 8,78 cm, h_2 = 17,56 cm, V = 2567,59 cm^3 / 7b) d = 16,98 cm, a = 12 cm -> obere Pyramide: h_{s1} = 10,32 cm, M_1 = 247,75 cm^2, untere Pyramide: h_2 = 4,2 cm, h_{s2} = 4,86 cm, M_2 = 116,69 cm^2 -> O_{ges} = 364,44 cm^2 / 7c) Kegel: r = 6,2 cm, s = 13,95 cm, M_K = 271,78 cm^2, Zylinder: G = 120,76 cm^2, M_Z = O_{ges} – M_K – G = 225,94 cm^2, h_Z = 5,8 cm -> h_{ges} = 18,3 cm / 7d) r = r_K = 6,2 cm, A_{HK} = 60,38 cm^2, A_K = A_{ges} – A_{HK} = 58,32 cm^2 -> Kegel: h_K = 9,4 cm, s = 11,26 cm, M_K = 219,32 cm^2, Halbkugel: O_{HK} = 241,53 cm^2, -> O_{ges} = 460,85 cm^2 / 7e) Pyramide: a = 12,6 cm, h_P = 8,2 cm, V_P = 433,94 cm^3, Zylinder: r = a/2 = 6,3 cm, h_Z = 12,6 cm, V_Z = 1497,46 cm^3 -> V_{ges} = 1931,4 cm^3.

8a) $\overline{PQ}$ = 5,69 cm, $\overline{QR}$ = 8,63 cm, $\overline{RS}$ = 6,8 cm -> α = 50,7, x = 2,4 cm / 8b) Basiswinkel des Mantelflächendreiecks = 68,9°, allgemeines Dreieck mit Basiswinkel, β und Grundkante a -> $\overline{BC}$ = 8,24 cm, Seitenkante von Pyramidenecke zu C = 5,96 cm -> Strahlensätze: $\overline{CD}$ = 4,35 cm -> u_{Tr} = 8,4 + 2·8,24 + 4,35 = 29,23 cm / 8c) h = 9,6 cm, s = 11,23 cm, r = 5,82 cm, Winkel bei Q = 58,8° -> $\overline{PQ}$ = 11,64, $\overline{PR}$ = 9,96 cm, $\overline{QR}$ = 6,03 cm -> u_{PQR} = 27,63 cm / 8d) $\overline{PQ}$ = 7,8 cm, $\overline{SR}$ = 4 cm, $\overline{QR}$ = 26,7 – 7,8 – 4 = 14,9 cm -> h_{Pr} = 12,6 cm, G = 15,6 cm^2, u_G = 16 cm, M = 201,6 cm^2 -> O = 233,6 cm^2.

Datenblatt: Abhängigkeit von Formvariablen

Die Formvariable e steht in der Geometrie und Trigonometrie für eine beliebige reelle Zahl, die die Grundlage einer geometrisch-trigonometrisch und daher exakten Formel bildet. Seitenlängen sind dabei Vielfaches von e, Flächen Vielfaches von e^2, Volumen Vielfaches von e^3. Beim Satz des Pythagoras treten dann Ausdrücke vom Typ

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{a}^2 = a \text{ (Wurzel und Quadrat)}$$

$$\sqrt{ae^2} = e\sqrt{a} = ne\sqrt{a_1} \text{ (teilweises Wurzelziehen)}$$

$$\frac{e}{\sqrt{a}} = \frac{e}{a}\sqrt{a} \text{ (Ganzrationalmachen des Nenners)}$$

auf. Im Bereich der trigonometrischen Funktionen sind die exakten Werte von Sinus, Kosinus und Tangens für spezielle Winkel wichtig:

$$\sin 30° = \frac{1}{2},\ \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \tan 45° = 1,\ \tan 60° = \sqrt{3}$$

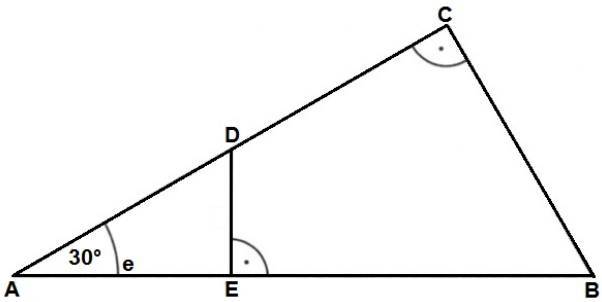
Zu beachten ist auch, dass ein 45°-Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck auf ein gleichschenkliges Dreieck hinweist, ein 30°- oder 60°-Winkel auf ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Hälfte das Dreieck mit dem 30°- oder 60°-Winkel ist.

Beispiele:

a) *Aufgabe*: Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist D die Mitte der Seite zwischen A und C sowie e die Länge der Strecke zwischen A und E. Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass der Flächeninhalt des Vierecks BCDE

$$A_{BCDE} = \frac{13}{18}e^2\sqrt{3}$$

beträgt.



Lösung: I. Wir betrachten zunächst das rechtwinklige Dreieck ADE mit dem Winkel α = 30° bei der Ecke A und mit der Katheten $\overline{AE} = e$. Für die Berechnung der Hypotenuse im Dreieck verwenden wir den Kosinus mit: $\cos\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Rightarrow \cos 30° = \frac{e}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{e}{\cos 30°} = \frac{e}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2e}{\sqrt{3}} = \frac{2e\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} =$

$\frac{2e\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}e\sqrt{3}$ (Umstellen, Ganzrationalmachen des Nenners). Zur Bestimmung der Seite $\overline{DE}$

im Dreieck ADE gilt nach dem Satz des Pythagoras: $\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AE}^2 \Rightarrow \overline{DE}^2 = \left(\frac{2}{3}e\sqrt{3}\right)^2 - e^2 =$

$\frac{4}{9}e^2\cdot 3 - e^2 == \frac{4}{3}e^2 - e^2 = \frac{1}{3}e^2 \Rightarrow \overline{DE} = \frac{e}{\sqrt{3}} = \frac{e\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{e\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}e\sqrt{3}$. II. Mit $\overline{AD} = \frac{2}{3}e\sqrt{3}$

gilt: $\overline{AC} = \frac{4}{3}e\sqrt{3}$, da der Punkt D in der Mitte der Seite $\overline{AC}$ im rechtwinkligen Dreieck ABC liegt.

Wir berechnen die Seite $\overline{BC}$, indem wir wiederum den Winkel α = 30° sowie den Tangens im Dreieck ABC benutzen: $\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan 30° = \frac{\overline{BC}}{\frac{4}{3}e\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{4}{3}e\sqrt{3}\cdot\tan 30° =$

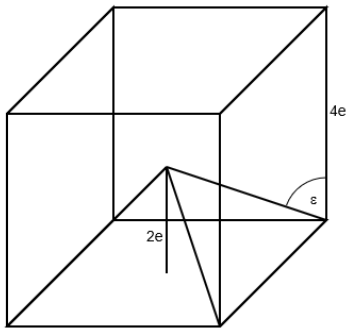
$\frac{4}{3}e\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}e$ (Umstellen, Kürzen). III. Wir haben damit alle Katheten in den rechtwinkligen Dreiecken ABC und ADE bestimmt und können nun an die Berechnung des gesuchten Flächeninhalts des Vierecks BCDE gehen. Dieser ergibt sich als Differenz der Flächeninhalte des Dreiecks ABC und des Dreiecks ADE auf Grund der allgemeinen Flächeninhaltsformel für Dreiecke A = gh/2, hier mit den Katheten g und h:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}e\sqrt{3}\cdot\frac{4}{3}e = \frac{8}{9}e^2\sqrt{3},\ A_{\Delta ADE} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{DE} = \frac{1}{2}\cdot e\cdot\frac{1}{3}e\sqrt{3} = \frac{1}{6}e^2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$A_{BCDE} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ADE} = \frac{8}{9}e^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}e^2\sqrt{3} = \left(\frac{8}{9}-\frac{1}{6}\right)e^2\sqrt{3} = \left(\frac{16}{18}-\frac{3}{18}\right)e^2\sqrt{3} = \frac{13}{18}e^2\sqrt{3}$$

(Ausklammern, Differenz der Brüche ermitteln).

b) Aus einem Würfel mit Kantenlänge a = 4e ist eine quadratische Pyramide mit halber Würfelhöhe als Pyramidenhöhe herausgearbeitet. Es sollen Oberfläche O und Volumen V des Restkörpers sowie der Winkel ε bestimmt werden. Die Pyramidenhöhe beträgt dazu: a/2 = 2e, die Diagonale des Würfels: d = $a\sqrt{2} = 4e\sqrt{2}$. Die Seitenkante s der Pyramide hat wegen:



$$s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (2e)^2 + (2e\sqrt{2})^2 = 4e^2 + 8e^2 = 12e^2$$

eine Länge von $s = 2e\sqrt{3}$, die Seitenhöhe h_s der Pyramide wegen:

$$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (2e\sqrt{3})^2 - (2e)^2 = 12e^2 - 4e^2 = 8e^2$$

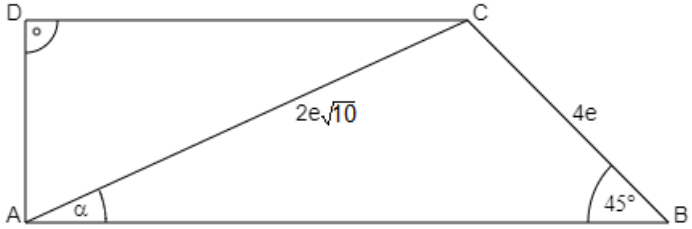
eine Länge von $h_s = 2e\sqrt{2}$. Die Mantelfläche M der Pyramide errechnet sich als: $M = 2ah_s = 2\cdot 4e\cdot 2e\sqrt{2} = 16e^2\sqrt{2}$, hinzu kommt die Würfeloberfläche: $O_W = 5a^2 = 5\cdot(4e)^2 = 5\cdot 16e^2 = 80e^2$. Die Gesamtoberfläche O des Körpers beträgt dann: $O = O_W + M = 80e^2 + 16e^2\sqrt{2} = 16e^2(5+\sqrt{2})$.

Mit $V_W = a^3 = (4e)^3 = 64e^3$, $V_P = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}\cdot(4e)^2\cdot 2e = \frac{32}{3}e^3$ errechnet sich das Volumen V des Körpers als: $V = V_W - V_P = 64e^3 - \frac{32}{3}e^3 = \frac{160}{3}e^3$. Hinsichtlich des Winkels ε zwischen Würfelkante und Pyramidenseitenkante gilt dann noch mit der Seitenkante $s = 2e\sqrt{3}$ als Hypotenuse und der halben Würfelkante a/2 = 2e als Ankathete:

$$\cos\varepsilon = \frac{2e}{2e\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1. a) Im rechtwinkligen Trapez ABCD gilt: $\overline{AC} = 2e\sqrt{10}$, $\overline{BC}$ = 4e. Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für den Winkel α die folgende Beziehung gilt:

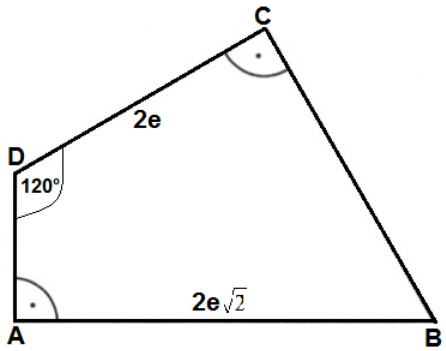
$$\tan\alpha = \frac{1}{2}.$$



b) Im Viereck ABCD ist die Seite zwischen A und B $2e\sqrt{2}$ lang, die Seite zwischen C und D 2e. Rechte Winkel liegen an den Ecken A und C vor, für den Winkel an der Ecke D gilt: δ = 120°. Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass der Umfang des Vierecks ABCD

$$u_{ABCD} = 2e\left(3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} - 1\right)$$

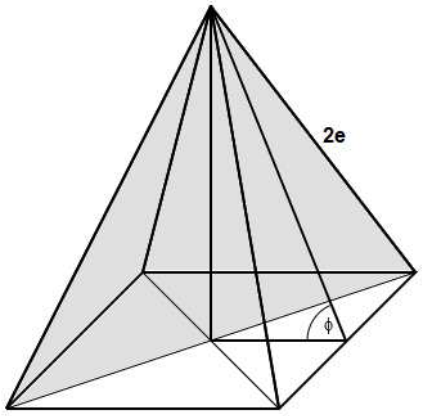
beträgt.



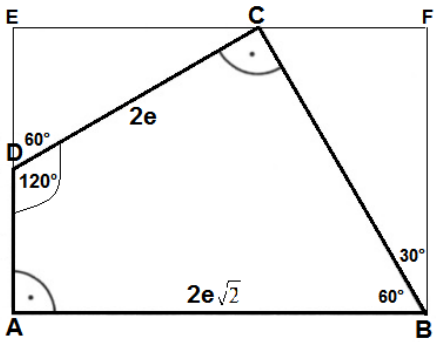
c) Der Diagonalschnitt einer quadratischen Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 2e. Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für die Pyramidenoberfläche O bzw. den Winkel φ zwischen Seitenhöhe und Grundfläche gilt:

$$O = 2e^2(1+\sqrt{7})$$

$$\cos\varphi = \frac{2}{7}\sqrt{7}.$$



<u>Lösungen</u>: 1a) $\overline{AD} = 2e\sqrt{2}$, rechtwinkliges Dreieck mit Katheten $2e\sqrt{2}$, $4e\sqrt{2}$ -> tan*α* / 1b) Ergänzung durch Außendreiecke mit: $\overline{CE} = e\sqrt{3}$, $\overline{DE} = e$, $\overline{CF} = e(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$, $\overline{BF} = e(2\sqrt{6} - 3)$, $\overline{AD} = e(2\sqrt{6} - 4)$ -> u / 1c) s = 2e, d = 2e, h = $e\sqrt{3}$, a = $e\sqrt{2}$, h_s = $e\sqrt{14}/2$ -> O, cos*φ*.



Datenblatt: Prozentrechnung

Prozentrechnung ist das Zusammenspiel von Grundwert G (100%) und Prozentwert W (Prozentsatz p%) vermöge der Formeln:

$$p\% = \frac{p}{100}$$

$$W = \frac{p \cdot G}{100} \text{ (Prozentwert)}$$

$$p = \frac{W \cdot 100}{G} \text{ (Prozentsatz)}$$

$$G = \frac{W \cdot 100}{p} \text{ (Grundwert)}$$

Für die vermehrten und verminderten Grundwerte gilt:

$$q^+ = 1 + \frac{p}{100} \text{ (Prozentfaktor [vermehrt])}$$

$$G^+ = G \cdot q^+,\ G = \frac{G^+}{q^+},\ q^+ = \frac{G^+}{G} \text{ (vermehrter Grundwert)}$$

$$q^- = 1 - \frac{p}{100} \text{ (Prozentfaktor [vermindert])}$$

$$G^- = G \cdot q^-,\ G = \frac{G^-}{q^-},\ q^- = \frac{G^-}{G} \text{ (verminderter Grundwert)}$$

Beispiele:

a) Der Verkaufspreis einer Ware setzt sich zusammen aus: 35% Herstellungskosten, 32% Personalkosten, 15% Verwaltungskosten, 10% Rücklagen und 8% Gewinn, wobei der Gewinn € 4,80 beträgt. Der Verkaufspreis errechnet sich – ohne Berücksichtigung der anderen vorgegebenen Daten – als: $\frac{4{,}80 \cdot 100}{8} = 60$ € (Prozentwert: 4,80; Prozentsatz: 8). Die Herstellungskosten betragen $\frac{35 \cdot 60}{100} = 21$ € (Grundwert: 60; Prozentsatz: 35), die Personalkosten $\frac{32 \cdot 60}{100} = 19{,}20$ €, die Verwaltungskosten $\frac{15 \cdot 60}{100} = 9{,}00$ €, die Rücklagen $\frac{10 \cdot 60}{100} = 6{,}00$ €.

b) Wenn 40% von 120 Vereinsmitgliedern wählen und davon 62,5% den Vereinsvorsitzenden, so haben $\frac{40 \cdot 120}{100} = 48$ Mitglieder gewählt und $\frac{62{,}5 \cdot 48}{100} = 30$ Mitglieder den Vorsitzenden oder insgesamt: $\frac{62{,}5 \cdot 40 \cdot 120}{100 \cdot 100} = 30$ haben den Vorsitzenden gewählt.

c) Reduzierter Preis: € 95,-; Preisreduzierung um 8%. Der ursprüngliche Preis betrug: $G^- = 95$; $q^- = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$; G = 95:0,92 = 103,26 €.

d) Preis mit 19% Mehrwertsteuer: € 240,-. Preis ohne Mehrwertsteuer: $G^+ = 240$; $q^+ = 1 + 0{,}19 = 1{,}19$; G = 240:1,19 = 201,68 €.

Aufgabenblatt: Prozentrechnung

1. Berechne jeweils den Prozentwert, Prozentsatz bzw. Grundwert:

Nr.	*Prozentwert* W=	*Prozentsatz* p=	*Grundwert* G=
1	12.9		123.06
2		82.8 %	15.07
3	3.4		37.33
4	80.1	87.8 %	
5	102.8		116.83
6		7.4 %	124.7
7	193.9		199.24
8	55.7		190.91
9		52.1 %	50.45
10	37.1	36.8 %	
11	156.9	85.5 %	
12	4.7		14.92
13	22.4		88.35
14	108.4		130.13
15	9.9	98.1 %	
16		25.1 %	22.89
17	50.8		110.85
18	7.4	43.6 %	
19	33.1		49.62
20	154.7		181.96

2. Berechne jeweils den Prozent-/Wachstumsfaktor bzw. den Prozentsatz:

Nr.	*Prozentsatz* p=	*Prozent-/Wachstumsfaktor* q=
1	-12.7 %	
2	-4.9 %	
3		1.15
4		1.03
5	18.6 %	
6	-3.9 %	
7		0.837
8		1.13
9		1.148
10	-1 %	

3. Der Nettoverkaufspreis einer Ware betrug ursprünglich € 115,-. Nach einer Preissenkung kostet die Ware € 116,32 brutto; Mehrwertsteuersatz 19%.

4. Gegeben sind folgende Umsatzzahlen (€) eines Unternehmens:

2009: 124.500; 2010: 135.200; 2011: 141.900; 2012: 128.100; 2013: 131.000

Berechne die absoluten und prozentualen Änderungen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Jahren. Welches durchschnittliche Wachstum ist bei den Umsatzzahlen im gesamten Zeitraum zu beobachten?

5. In einer Sonderaktion werden beim Schlussverkauf um 30% rabattierte Waren nochmals um 20% reduziert. Wie teuer war eine Ware, wenn diese nach den zwei Preissenkungen nur noch € 13,99 kostet?

6. Der Preis eines Fahrrades wird um 2,72% bzw. € 52,90 erhöht. Was kostete das Fahrrad vor der Preiserhöhung? Wie viel kostet das Fahrrad, wenn 2% Skonto gewährt wird? Wie hoch ist die im skontierten Verkaufspreis enthalten Mehrwertsteuer? Mehrwertsteuersatz: 19%.

7. Die 640 Schüler einer Realschule verteilen sich auf die Jahrgangsstufen 5 bis 10. Ergänze dementsprechend die nachstehende Tabelle:

Jahrgangsstufe	*Anzahl der Schüler*	*Prozentsatz*
5	96	
6		12,50 %
7		20,00 %
8	112	
9	120	
10		
Summe		

Lösungen: 1.

Nr.	*Prozentwert* P=	*Prozentsatz* p=	*Grundwert* G=
1	12.90	10.5 %	123.06
2	12.50	82.8 %	15.07
3	3.40	9.1 %	37.33
4	80.10	87.8 %	91.24
5	102.80	88.0 %	116.83
6	9.20	7.4 %	124.70
7	193.90	97.3 %	199.24
8	55.70	29.2 %	190.91
9	26.30	52.1 %	50.45
10	37.10	36.8 %	100.68
11	156.90	85.5 %	183.51
12	4.70	31.2 %	14.92
13	22.40	25.4 %	88.35
14	108.40	83.3 %	130.13
15	9.90	98.1 %	10.09
16	5.70	25.1 %	22.89
17	50.80	45.8 %	110.85
18	7.40	43.6 %	17.07
19	33.10	66.8 %	49.62
20	154.70	85.0 %	181.96

2.

Nr.	*Prozentsatz* p=	*Prozent-/Wachstumsfaktor* q=
1	-12.7 %	0.873
2	-4.9 %	0.951
3	15 %	1.15
4	3 %	1.03
5	18.6 %	1.186
6	-3.9 %	0.961
7	-16.3 %	0.837
8	13 %	1.13
9	14.8 %	1.148
10	-1 %	0.99

7.

Jahrgangsstufe	*Anzahl*	*Prozentsatz*
5	96	15,00 %
6	80	12,50 %
7	128	20,00 %
8	112	17,50 %
9	120	18,75 %
10	104	16,25 %
Summe	640	100,00 %

3. -15% / 4. +10700, +6700, -13800, +2900; +8.59%, +4.96%, -9.73%, +2.26% -> +1,28 %. / 5. € 24,98 /
6. Preis vor Preiserhöhung = 1944,85 €, neuer Preis = 1997,75, skontierter Preis = 1957,80 €, Mwst. = 312,59 € .

Datenblatt: Zinsrechnung

Zinsrechnung

Zinsen bei Anfangskapital K_0 und Endkapital K_E: $Z = K_E - K_0$, $K_E = K_0 + Z$, $K_0 = K_E - Z$ (€)
Zinsrechnung mit Anfangskapital $K = K_0$, p = Zinssatz (%), Anzahl der Tage t bzw. der Monate m:

Zeitraum t (Tage): $Z = \frac{K \cdot t \cdot p}{100 \cdot 360}$, $K = \frac{100 \cdot 360 \cdot Z}{t \cdot p}$, $p = \frac{100 \cdot 360 \cdot Z}{K \cdot t}$, $t = \frac{100 \cdot 360 \cdot Z}{K \cdot p}$

Zeitraum m (Monate): $Z = \frac{K \cdot m \cdot p}{100 \cdot 12}$, $K = \frac{100 \cdot 12 \cdot Z}{m \cdot p}$, $p = \frac{100 \cdot 12 \cdot Z}{K \cdot m}$, $m = \frac{100 \cdot 12 \cdot Z}{K \cdot p}$

Zinseszinsrechnung

Zinsen bei Anfangskapital K_0 und Endkapital K_n: $Z = K_n - K_0$, $K_n = K_0 + Z$, $K_0 = K_n - Z$ (€)
Zinseszinsrechnung mit Anfangskapital K_0, Endkapital K_n, p = Zinssatz p (%), Zinsfaktor q, Anzahl der Jahre n:

$$q = 1 + \frac{p}{100},\ K_n = K_0 \cdot q^n,\ K_0 = \frac{K_n}{q^n},\ q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}},\ Z = K_0 \cdot (q^n - 1),\ K_0 = \frac{Z}{q^n - 1}$$

Prozentualer Zuwachs (%): $\left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right) \cdot 100 = \frac{K_n}{K_0} \cdot 100 - 100$

$K_1 = K_0 q$, $K_2 = K_1 q = K_0 q^2$, ..., $K_n = K_{n-1} q = K_0 q^n$ (Kapital)

$z_1 = K_1 - K_0 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$, $z_2 = K_2 - K_1 = K_1 \cdot \frac{p}{100}$, ..., $z_n = K_n - K_{n-1} = K_{n-1} \cdot \frac{p}{100}$ (Jahreszinsen)

Zuwachssparen

Zinsen Z bei Anfangskapital K_0 und Endkapital K_n: $Z = K_n - K_0$, $K_n = K_0 + Z$, $K_0 = K_n - Z$
Zuwachssparen mit Anfangskapital K_0, Endkapital K_n, Zinssätze p_1, p_2, …, p_n pro Jahr, Zinsfaktoren q_1, q_2, … q_n, Anzahl der Jahre n:

$q_1 = 1 + \frac{p_1}{100}$, $q_2 = 1 + \frac{p_2}{100}$, ..., $q_n = 1 + \frac{p_n}{100}$ (Zinsfaktoren)

$K_1 = K_0 q_1$, $K_2 = K_1 q_2 = K_0 q_1 q_2$, ..., $K_n = K_0 q_1 q_2 q_3 ... q_n$ (Kapital)

$z_1 = K_1 - K_0 = K_0 \cdot \frac{p_1}{100}$, $z_2 = K_2 - K_1 = K_1 \cdot \frac{p_2}{100}$, ..., $z_n = K_n - K_{n-1} = K_{n-1} \cdot \frac{p_n}{100}$ (Jahreszinsen)

Prozentualer Zuwachs (%): $\left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right) \cdot 100 = \frac{K_n}{K_0} \cdot 100 - 100$

Durchschnittliche Verzinsung (%): $\left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right) \cdot 100 = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \cdot 100 - 100$

Ratensparen

Beim Ratensparen wird während eines Anlagezeitraums von n Jahren jährlich eine meist konstante Sparrate R einbezahlt. Alle Raten werden jährlich mit einem (meist) konstanten Zinssatz p verzinst. Bei konstanter Rate R und konstantem Zinssatz p gilt:

Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$

Endkapital $K_n = R(q^n + ... + q^2 + q)$, $R = \frac{K_n}{q^n + ... + q^2 + q}$

$z_1 = Rq - R$, $z_2 = Rq^2 - R$, ..., $z_n = Rq^n - R$ (Jahreszinsen)

$Z = K_n - n \cdot R = R(q^n + ... + q^2 + q - n)$ (Gesamtzinsen)

Prozentualer Zuwachs (%): $\left(\frac{K_n}{nR} - 1\right) \cdot 100 = \frac{K_n}{nR} \cdot 100 - 100$

Bei konstanter Rate R und unterschiedlichen Zinssätzen p_1,… gilt:

Zinssätze p_1, p_2, … p_n, Zinsfaktoren $q_1 = 1 + \frac{p_1}{100}$, $q_2 = 1 + \frac{p_2}{100}$, ... $q_n = 1 + \frac{p_n}{100}$

Endkapital $K_n = R(q_1 q_2 ... q_n + ... + q_{n-2} q_{n-1} q_n + q_{n-1} q_n + q_n)$

$z_1 = Rq_1 - R$, $z_2 = Rq_1 q_2 - R$, ..., $z_n = Rq_1 q_2 ... q_n - R$ (Jahreszinsen)

$Z = K_n - n \cdot R = R(q_1 q_2 ... q_n + ... + q_{n-2} q_{n-1} q_n + q_{n-1} q_n + q_n - n)$ (Gesamtzinsen)

Prozentualer Zuwachs (%): $\left(\frac{K_n}{nR} - 1\right) \cdot 100 = \frac{K_n}{nR} \cdot 100 - 100$

Bei gleichmäßig ansteigender Rate R und konstantem Zinssatz p gilt:

Raten R, R + d, R + 2d, … R + (n-1)d, die sich jährlich um einen konstanten Betrag d erhöhen

Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$

Endkapital
$$K_n = Rq^n + (R+d)q^{n-1} + ... + (R+(n-2)d)q^2 + (R+(n-1)d)q$$
$$= R(q^n + ... + q^2 + q) + d(q^{n-1} + 2q^{n-2} + ... + (n-1)q)$$

$K_2 = R(q^2 + q) + dq$, $K_3 = R(q^3 + q^2 + q) + d(q^2 + 2q)$,

$K_4 = R(q^4 + q^3 + q^2 + q) + d(q^3 + 2q^2 + 3q)$, ... (Kapital)

Kredit

Ein Kreditbetrag K wird von einem Kreditgeber (Bank, Gläubiger) für n Monate zu einem monatlichen Zinssatz von p% bei einer Bearbeitungsgebühr B in Höhe von p*% des Kreditbetrags ausgeliehen. Dafür zahlt der Kreditnehmer (Schuldner) in n Monatsraten Kreditbetrag K und Kreditkosten KK (= Zinsen Z + Bearbeitungsgebühr B) zurück (Rückzahlungsbetrag RZ), und zwar im ersten Monat die Rate R_1, in den folgenden Monaten 2 bis n die Rate R. Die Rate R ergibt sich durch Aufrunden der ermittelten durchschnittlichen, auf die n Monate bezogenen Rate Ř auf volle Euro, die Rate R_1, die daher kleiner ist als die Rate R, als Differenz von Rückzahlungsbetrag RZ und Summe der Raten der Monate 2 bis n. Mathematisch gesehen gelten die Formeln:

K + Z + B = RZ, Z = K·n·p, B = K·p*, KK = Z + B, RZ = R_1 + (n-1)·R, Ř = $\frac{K+Z+B}{n}$

R = Ř aufgerundet, R_1 = K + Z + B – (n-1)·R

, also im Fall einer gegebenen Bearbeitungsgebühr B:

K + K·n·p + B = R_1 + (n-1)·R, K = $\frac{R_1+(n-1)R-B}{1+np}$

p = $\frac{R_1+(n-1)R-B-K}{nK}$ · 100 %, n = $\frac{K+B+R-R_1}{R-Kp}$

bzw. im Fall eines Bearbeitungssatzes von p*%:

K + K·n·p + K·p* = R_1 + (n-1)·R, K = $\frac{R_1+(n-1)R}{1+np+p*}$

p = $\frac{R_1+(n-1)R-Kp*-K}{nK}$ · 100 %, n = $\frac{K+Kp*+R-R_1}{R-Kp}$

Annuitätendarlehen

Ein Darlehen ist ein (größerer) Kredit zwischen Kreditgeber (Bank, Gläubiger) und Kreditnehmer über einen längeren Zeitraum (von Jahren). Zu Darlehenssumme und Zinssatz wird eine bestimmte jährliche, gleich bleibende Rate (Annuität) vereinbart, die den Zinsaufwand und die Tilgung enthält. Die Laufzeit des Darlehens ergibt sich aus der Rate. Der Darlehensplan (Jahr, Restschuld/Jahresanfang, Zinsen, Tilgung, Restschuld/Jahresende, Annuität) ergibt sich gemäß den Formeln:

K_0 = Darlehensbetrag (€), K_i = Restschuld am Ende des Jahres i der Darlehensrückzahlung (€), p = Zinssatz (%), R = jährliche Rate (Annuität, €), Z = jährliche Zinsen (€), T = jährliche Tilgung (€):

K_{i-1} Restschuld am Ende des Vorjahres i-1 der Darlehensrückzahlung

Z = $K_{i-1}\cdot\frac{p}{100}$, T = R – Z, K_i = K_{i-1} – T (bezogen auf das Jahr i der Darlehensrückzahlung)

Beispiele:

a) Zins: Anfangskapital K = 2000 €, Zinsen Z = 50 €, Zinssatz p = 4%: Zeitraum $t=\frac{100\cdot 12\cdot 50}{2000\cdot 4}=7{,}5$ Monate.

b) Zinseszins: Anfangskapital K_0 = 2000.00 €, Endkapital $K_{10.00}$ = 2560.17 €, Zinsen Z = 560.17 €, prozentualer Zuwachs $p_{Zuwachs}$ = 28.01 %, Zinssatz p = 2.50 %, Laufzeit n = 10 Jahre.

	Anfangskapital K_0 (€):	**Zinssatz** p (%):	
	2000.00	**2.50**	
Jahr n	**Kapital** K_n (Jahresende, €)	**Jahreszinsen** z_n (€)	**Jahreszinsen** kumuliert (€)
1	2050.00	50.00	50.00
2	2101.25	51.25	101.25
3	2153.78	52.53	153.78
4	2207.63	53.84	207.63
5	2262.82	55.19	262.82
6	2319.39	56.57	319.39
7	2377.37	57.98	377.37
8	2436.81	59.43	436.81
9	2497.73	60.92	497.73
10	**2560.17**	62.44	560.17

c) Zuwachssparen: Anfangskapital K_0 = 8000.00 €, Endkapital $K_{5.00}$ = 8971.47 €, Zinsen Z = 971.47 €, prozentualer Zuwachs $p_{Zuwachs}$ = 12.14 %, durchschnittlicher Zinssatz $p_{Durchschnitt}$ = 2.32 %, Laufzeit n = 5 Jahre.

	Anfangskapital K_0 (€):			
	8000.00			
Jahr n	**Kapital** K_n (Jahresende, €)	**Jahreszinssatz** p_n (%)	**Jahreszinsen** z_n (€)	**Jahreszinsen** kumuliert (€)
1	8120.00	1.50	120.00	120.00
2	8282.40	2.00	162.40	282.40
3	8481.18	2.40	198.78	481.18
4	8710.17	2.70	228.99	710.17
5	**8971.47**	3.00	261.31	971.47

d) Ratensparen: Rate R = 400.00 €, Raten insgesamt = 2000.00 €, Endkapital K_5 = 2123.25 €, Zinsen Z = 123.25 €, prozentualer Zuwachs $p_{Zuwachs}$ = 6.16 %, Zinssatz p = 2.00 %, Laufzeit n = 5 Jahre.

	Rate R (€):		**Zinssatz** p (%):	
	400.00		**2.00**	
Jahr n	**Raten** kumuliert (Jahresanfang, €)	**Kapital** K_n (Jahresende, €)	**Jahreszinsen** z_n (€)	**Jahreszinsen** kumuliert (€)
1	400.00	408.00	8.00	8.00
2	800.00	824.16	16.16	24.16
3	1200.00	1248.64	24.48	48.64
4	1600.00	1681.62	32.97	81.62
5	2000.00	**2123.25**	41.63	123.25

e) Kredit: Kredithöhe 10000,- €, monatlicher Zinssatz 0,5%, 24 Monate Laufzeit, Bearbeitungsgebühr in Höhe von 120,- €. Gesucht: Zinsen, Kreditkosten, Rückzahlungsbetrag, monatliche Raten.

Lösung: I. *Vorgaben*: K = 10000, p=0,5%, n = 24, B = 120; Kredit. II. *Zinsen*: Z = 10000·24·0,005 = 1200. III. *Bearbeitungsgebühr*: B = 120. IV. *Kreditkosten*: KK = 1200 + 120 = 1320. V. *Rückzahlungsbetrag* als Summe von Kreditbetrag und Kreditkosten, d.h. als Summe von Kreditbetrag, Zin-

sen und Bearbeitungsgebühr: RZ = 10000 + 1200 + 120 = 11320. VI. *Monatliche Raten*: Durchschnittliche Rate: Ř = 11320:24 = 471,67. Aufgerundet ergibt dies: R = 472 für die Monate 2 bis 24. Als Rate für den 1. Monat haben wir dann: R_1 = 11320 - 23·472 = 464.

f) Darlehensplan (Annuitätendarlehen):

	Darlehenssumme (€):	**Zinssatz** (%):			**Rate** (€):
	12000.00	**4.00**			**1400.00**
Jahr	**Restschuld** (Jahresanfang, €)	**Zinsen** (€)	**Tilgung** (€)	**Restschuld** (Jahresende, €)	**Annuität** (€)
1	12000.00	480.00	920.00	11080.00	1400.00
2	11080.00	443.20	956.80	10123.20	1400.00
3	10123.20	404.93	995.07	9128.13	1400.00
4	9128.13	365.13	1034.87	8093.25	1400.00
5	8093.25	323.73	1076.27	7016.98	1400.00
6	7016.98	280.68	1119.32	5897.66	1400.00
7	5897.66	235.91	1164.09	4733.57	1400.00
8	4733.57	189.34	1210.66	3522.91	1400.00
9	3522.91	140.92	1259.08	2263.83	1400.00
10	2263.83	90.55	1309.45	954.38	1400.00
11	954.38	38.18	954.38	0.00	992.56
		2992.56	12000.00		14992.56
		Zinsen insgesamt (€)	**Tilgung insgesamt** (€)		**Annuitäten insgesamt** (€)

Aufgabenblatt: Zinsrechnung

1. Es gilt die Zinsrechnung für Zeiträume bis zu einem Jahr.

a) Wie viel Zinsen ergeben sich bei einem Kapital von 3550 € in 66 Tagen und einem Zinssatz von 2,45%?
b) Welches Kapital ergibt in 5 Monaten bei einem Zinssatz von 1,65% Zinsen in Höhe von 55,- €?
c) Bei welchem Zinssatz wächst ein Kapital in Höhe von 3500 € in 140 Tagen um 68,06 €?
d) In wie vielen Monaten wächst ein Kapital in Höhe von 6400 € bei einem Zinssatz von 1,8% um 86,40 €?
e) In wie vielen Tagen wächst ein Kapital in Höhe von 9000 € bei einem Zinssatz von 3,75% um 112,50 €?
f) Ein Kapital in Höhe von 3000 € wird zu einem Zinssatz von 4,5% für 320 Tage angelegt.
g) Ein Kredit in Höhe von 7500 € wird zu einem Zinssatz von 12,5% für 166 Tage in Anspruch genommen.
h) Das Girokonto wird bei einem Zinssatz von 14% 23 Tage überzogen. Wie hoch war im Durchschnitt die Überziehung, wenn die Zinsen 56,92 € betragen?
i) Nach 5 Monaten wird ein Kredit in Höhe von 11000 € mit 11450 € einschließlich Zinsen zurückbezahlt.
j) Wie viel Tage war ein Girokonto überzogen, wenn bei einem Kredit von 1859,60 € und einem Zinssatz von 11,2% Überziehungszinsen in Höhe von 6,94 € anfielen?

2. Zinsen werden mitverzinst.

a) Ein Kapital in Höhe von € 12800,- wird über 5 Jahre mit einem Zinssatz von 1,75% verzinst. Wie hoch ist das Endkapital? Wie viel Zinsen fallen im 3. Anlagejahr an, um wie viel sind die Zinsen im 5. Anlagejahr höher als im 4.?
b) Nach Anlage eines Kapitalbetrags über 4 Jahre beträgt bei einem Zinssatz von 2,4% das Endkapital € 9865,60. Wie hoch ist das Anfangskapital? Auf wie viel ist das Kapital nach 2 Jahren angewachsen? Um wie viel Prozent ist das Kapital während der 4 Jahre gewachsen?
c) Wie groß ist der Zinssatz, wenn ein Anfangskapital in Höhe von € 5500,- innerhalb von 3 Jahren um 3,64% wächst? Berechne das Endkapital und die angefallenen Zinsen insgesamt.
d) Wie hoch ist das Anfangskapital, wenn dieses bei einem Zinssatz von 2% über 1 Jahr und 5 Monate Zinsen in Höhe von 71,25 € erbringt?

3. Zuwachssparen:

a) Ein Kapital in Höhe von € 4000,- wird über 4 Jahre zu 1,1%, 1,3%, 1,5% und 2% verzinst. Wie hoch ist das Endkapital, wie hoch die durchschnittliche Verzinsung? Um wie viel Prozent ist das Kapital angestiegen?
b) Welche Anlageform ist günstiger? Anlage A: Kapitalverzinsung über 3 Jahre mit einem gleich bleibenden Zinssatz von 2,5%; Anlage B: Zuwachssparen über 3 Jahre mit 1,9%, 2,2%, 2,7%.
c) Ein Kapital in Höhe von € 4000,- wird über 4 Jahre zu 1,8% im 1., 2,1% im 3. und 2,2% im 4. Jahr verzinst; die Zinsen im 2. Jahr betragen € 81,44. Wie hoch ist das Endkapital, wie hoch die durchschnittliche Verzinsung, wie hoch der Zinssatz im 2. Anlagejahr?
d) Wie hoch ist das Anfangskapital, wenn das Endkapital bei einer Anlage über 4 Jahre auf 9007,04 € gewachsen ist, im 1. Jahr Zinsen von € 164,-, im 2. Zinsen in Höhe von € 184,01 anfallen und im 3. Jahr ein Zinssatz von 2,5%, im 4. ein Zinssatz von 2,8% anfällt. Berechne das Anfangskapital und die fehlenden Zinssätze.
e) Die Zinssätze beim Zuwachssparen betragen für drei Jahre: 4%, 4,5%, 5%, das Endkapital 18258,24 €. Wie hoch ist das Anfangskapital, wie groß sind die Zinsen im 2. Anlagejahr, wie hoch ist die durchschnittliche Verzinsung?
f) Ein Kapital in Höhe von 6000,- € wird über drei Jahre beim Zuwachssparen angelegt. Im 1. Jahr beträgt die Verzinsung 2,5%, im 3. Jahr fallen 221,71 € Zinsen an, insgesamt fallen 556,21 € Zinsen an. Berechne die fehlenden Zinssätze und die durchschnittliche Verzinsung.

4. Ratensparen:

a) Wie groß ist das Endkapital, wenn jeweils am Jahresanfang über 3 Jahre € 2000,- eingezahlt

werden und der Zinssatz der Bank 2,1% beträgt? Um wie viel Prozent ist das eingezahlte Kapital angewachsen? Wie hoch muss die Rate sein, wenn dasselbe Endkapital über einen Zeitraum von 4 Jahren erreicht werden soll?
b) Wie hoch ist der Zinssatz, wenn mit einer Rate von € 800,- über zwei Jahre ein Endkapital von € 1658,06 erreicht wird?
c) Bei einer Rate in Höhe von jährlich € 500,- soll das eingezahlte Kapital über 4 Jahre mit 1,8%, 2%, 2,2% und 2,4% verzinst werden. Wie hoch ist das Endkapital? Wie viel Zinsen fallen im 2., wie viel im 3. Anlagejahr an?

5. Kleinkredit: Gegeben: Monatlicher Zinssatz 0,5%, 24 Monate Laufzeit, Bearbeitungsgebühr in Höhe von 1,2% des Kreditbetrags, 1. Rate 464,- €, 2.-24. Rate 472,- €. Gesucht: Kreditbetrag, Zinsen, Kreditkosten, Rückzahlungsbetrag.

6. Annuitätendarlehen: Gegeben: Darlehenssumme: € 65000,-, jährlicher Zinssatz 2,8%, jährliche Rate € 5000,-. Gesucht: Darlehensplan.

Lösungen: 1a) 15,95 € / 1b) 8000 € / 1c) 5% / 1d) 9 / 1e) 120 / 1f) Z = 120 € / 1g) Z = 432.29 € /
1h) 6373.63 € / 1i) Z = 450 €, p = 9.82% / 1j) 12
2a) K_5 = 13959.89 €, Z_3 = 231.91 €, $Z_5 – Z_4$ = 4.13 € / 2b) K_0 = 9000 €, K_2 = 9437.18 €, p = 9.95% /
2c) 1.2%, K_3 = 5700.39 €, Z = 200.39 € / 2d) K_0 = 2500 €
3a) K_4 = 4241.18 €, p = 1.47%, p = 6.03% / 3b) K_0 = 1000 € -> A: K_3 = 1076.89, B: K_3 = 1069.54 € -> A /
3c) K_4 = 4333.96 €, p = 2.02%, p_2 = 2% / 3d) K_0 = 8200 €, p_1 = 2%, p_2 = 2.2%
4a) K_4 = 6255.55 €, p = 4.26%; R = 1484.31 € / 4b) p = 2.4% /
4c) K_4 = 2112.33 €, Z_2 = 20.18 €, Z_3 = 33.64 €
5. Kreditbetrag = 10000 €, Rückzahlungsbetrag = 11.320 €, Kreditkosten = 1120 €, davon: Zinsen = 1200 €, Bearbeitungsgebühr = 120 €
6. Darlehensplan (Annuitätendarlehen):

	Darlehenssumme (€):	**Zinssatz** (%):			**Rate** (€):
	65000.00	**3.80**			**5000.00**
Jahr	**Restschuld** (Jahresanfang, €)	**Zinsen** (€)	**Tilgung** (€)	**Restschuld** (Jahresende, €)	**Annuität** (€)
1	65000.00	2470.00	2530.00	62470.00	5000.00
2	62470.00	2373.86	2626.14	59843.86	5000.00
3	59843.86	2274.07	2725.93	57117.93	5000.00
4	57117.93	2170.48	2829.52	54288.41	5000.00
5	54288.41	2062.96	2937.04	51351.37	5000.00
6	51351.37	1951.35	3048.65	48302.72	5000.00
7	48302.72	1835.50	3164.50	45138.22	5000.00
8	45138.22	1715.25	3284.75	41853.48	5000.00
9	41853.48	1590.43	3409.57	38443.91	5000.00
10	38443.91	1460.87	3539.13	34904.78	5000.00
11	34904.78	1326.38	3673.62	31231.16	5000.00
12	31231.16	1186.78	3813.22	27417.94	5000.00
13	27417.94	1041.88	3958.12	23459.82	5000.00
14	23459.82	891.47	4108.53	19351.30	5000.00
15	19351.30	735.35	4264.65	15086.65	5000.00
16	15086.65	573.29	4426.71	10659.94	5000.00
17	10659.94	405.08	4594.92	6065.02	5000.00
18	6065.02	230.47	4769.53	1295.49	5000.00
19	1295.49	49.23	1295.49	0.00	1344.71
		26344.71	65000.00		91344.71
		Zinsen insgesamt (€)	**Tilgung insgesamt** (€)		**Annuitäten insgesamt** (€)

Datenblatt: Daten, Diagramme

Mit Daten verbunden sind die zahlenmäßige Erfassung von Sachverhalten und Beobachtungen und deren grafische Darstellung. Daten ergeben damit ein mathematisches Modell, das mit Hilfe mathematischer Methoden analysiert und bewertet werden kann. Sind zu bestimmten Datenausprägungen wie Einzelwerten oder Klassen (A, B, C, …) absolute Häufigkeiten (Anzahlen) n_A, n_B, n_C, … gegeben, so lassen sich die Gesamtsumme der absoluten Häufigkeiten $n = n_A + n_B + n_C + \ldots$ und die relativen Häufigkeiten (Prozentzahlen) bestimmen.

Absolute Häufigkeiten lassen sich mit einem Balken- oder Säulendiagramm (auch Stabdiagramm, Histogramm, Häufigkeitspolygon) darstellen. Relative Häufigkeiten (Prozentzahlen) lassen sich mit einem Kreis- oder Streifendiagramm grafisch umsetzen. Beim Kreisdiagramm ergeben sich aus den Prozentzahlen die zu A, B, C, … gehörenden Winkel der entsprechenden Kreisausschnitte vermöge:

$$100\,\% \leftrightarrow 360°,\ 1\% \leftrightarrow 3{,}6°.$$

Beim Streifendiagramm entspricht der Prozentzahl die Breite des Streifenabschnitts in Zentimetern, so dass etwa gilt:

$$100\% \leftrightarrow 10 \text{ cm}.$$

Der Polygonzug verbindet die die Daten repräsentierenden Punkte im x-y-Koordinatensystem.

Daten ergeben ein mathematisches Modell, das mit Hilfe mathematischer Methoden analysiert und bewertet werden kann. Liegen Datenreihen in einer Rangliste vor, so ist eine geordnete Liste von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vorhanden mit:

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$$

Die Rangliste kann dann wie folgt ausgewertet werden:

Datenanzahl: n
Minimum: a_1
Maximum: a_n
Spannweite: $s = a_n - a_1$

Unteres Quartil: k = n:4 ganzzahlig: $q_u = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$, n:4 aufgerundet ergibt Rang k: $q_u = a_k$

Median/Zentralwert: n ungerade, k = n/2 + 0,5: $z = a_k$, n gerade, k = n/2: $z = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$

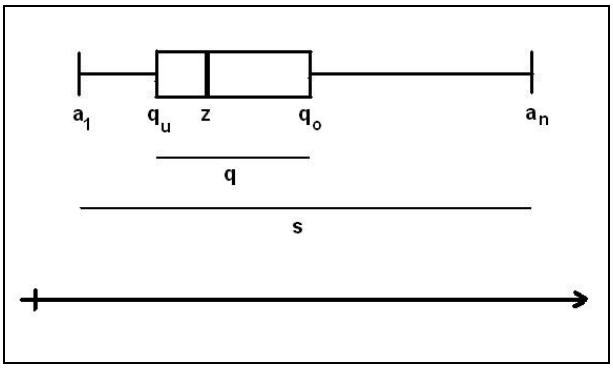
Oberes Quartil: k = n:4·3 ganzzahlig: $q_o = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$, n:4·3 aufgerundet ergibt Rang k: $q_o = a_k$

Quartilsabstand: $q = q_o - q_u$

Mittelwert: $\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$

Modalwert/Modus (als häufigster auftretender Wert beim k-ten Ranglistenelement): $m = a_k$

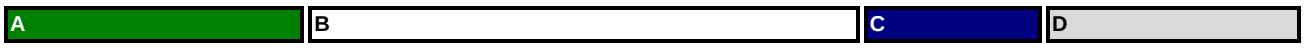
Aus den ermittelten Kennziffern der Rangliste ergibt sich eine grafische Darstellung als Boxplot-Diagramm (mit Minimum, Maximum, Quartilen, Zentralwert, Skala):



Beispiele:

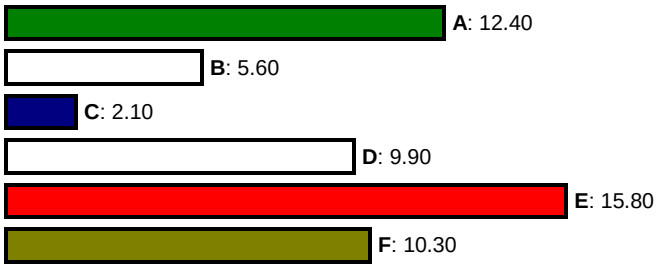
a) Datentabelle und Streifendiagramm:

Merkmal:	Wert:	Prozentsatz:
A	4.50	23.32%
B	8.40	43.52%
C	2.60	13.47%
D	3.80	19.69%



b) Datentabelle und Balkendiagramm:

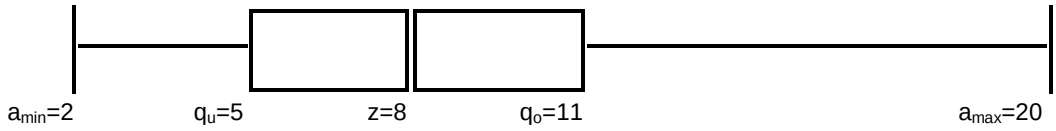
Merkmal:	Wert:	Prozentsatz:
A	12.40	22.10%
B	5.60	9.98%
C	2.10	3.74%
D	9.90	17.65%
E	15.80	28.16%
F	10.30	18.36%



c) Boxplot-Diagramm:

Anzahl der Daten: n = 22
Urliste: x_1, ... = 4; 12; 2; 5; 5; 8; 14; 3; 2; 8; 19; 6; 7; 11; 10; 9; 11; 8; 5; 20; 8; 13
Geordnete Liste: a_1, ... = 2; 2; 3; 4; 5; 5; 5; 6; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 10; 11; 11; 12; 13; 14; 19; 20
Minimum: a_{min} = 2
Maximum: a_{max} = 20
Spannweite: s = 18
Modalwert: m = 8
Unteres Quartil: q_u = 5
Median/Zentralwert: z = 8
Oberes Quartil: q_o = 11
Quartilsabstand: d = 6
Mittelwert: $\bar{x}$ = 8.64

Boxplot-Diagramm:

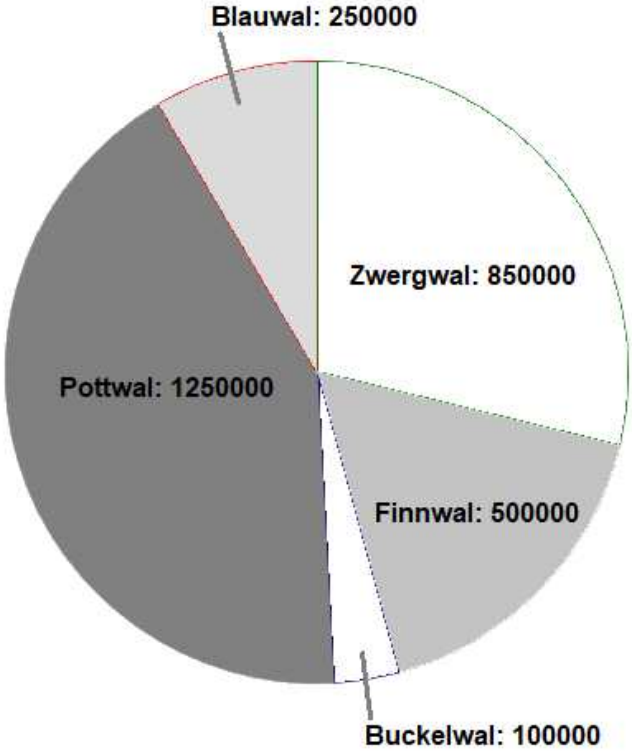


1. Die Typen A bis E einer Bakterienart wurden unter einem Mikroskop wie folgt ausgezählt: A 135; B 212; C 57; D 24; E 182. Stelle die Beobachtungen in einem Säulendiagramm dar! Bestimme die Prozentwerte!

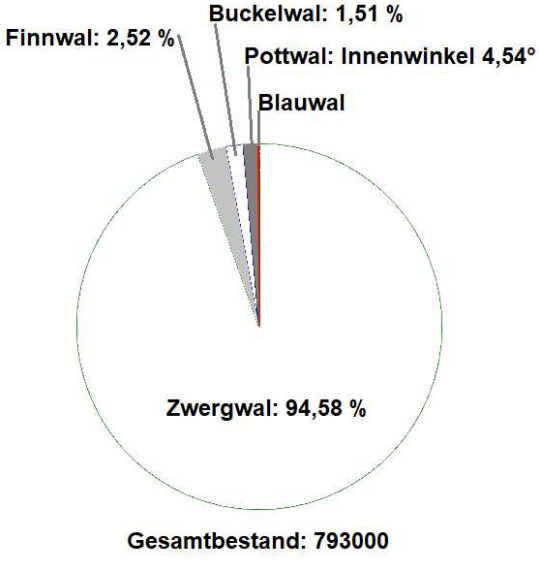
2. Der Anteil der Energiearten in einem Land beträgt: Kohle/Öl 47,4%, Atomkraft 20,8%, Wasserkraft 14,4%, Windkraft 8,5%, Solarenergie 3,5%, übrige Energiearten. Stelle die Energiearten in einem Kreisdiagramm dar! Wie groß sind die absoluten Werte, wenn insgesamt in dem Land 80 GWh Energie verbraucht wird?

3. Eine politische Umfrage zur nächsten Wahl brachte unter den 1200 Befragten folgende Ergebnisse: CDU/CSU: 412; SPD: 340; Grüne: 248; Linke: 84; FDP: 66. Bestimme die entsprechenden Prozentsätze auch für den Teil der Befragten, der keine Angaben gemacht hat. Erstelle ein Kreisdiagramm sowie ein Streifendiagramm!

4. Die Bestände von Walen in den Gewässern der Antarktis betrugen:



Walbestand im Jahr 1920



Walbestand im Jahr 1990

Wie groß war der Gesamtbestand der Wale im Jahr 1920, wie viel Blauwale gab es noch im Jahr 1990? Um wie viel Prozent ist der Bestand der Walarten insgesamt zurückgegangen? Bei welchen Walarten war der Rückgang prozentual am größten? Um wie viel Prozent ist der Bestand an Finnwalen durchschnittlich pro Jahr gesunken?

5. Die nachstehende Urliste gibt die Anzahl der beobachteten Sternschnuppen pro Nacht im Zeitraum vom 6./7. bis 21./22. August 2013 an:

21, 35, 32, 45, 61, 58, 55, 63, 67, 52, 58, 58, 46, 24, 35

a) Stelle Daten und Häufigkeiten in einem Histogramm dar (Klassenbreite 10; Klassen: 20-29, …).
b) Veranschauliche die Daten in einem Boxplot-Diagramm. Wie groß ist die Abweichung von arithmetischem Mittel- und Zentralwert? Welchen Einfluss hat die Streichung des kleinsten und größten Beobachtungswerts auf Mittel- und Zentralwert.

6. Gegeben sind die beiden Beobachtungsreihen A und B:

A: 5.4; 7.8; 7.9; 8.3; 8.9; 9.2; 10.1; 10.8; 10.9; 11; 12.3; 13.4
B: 4; 4.5; 6; 6.2; 6.7; 8; 8.9; 9.5; 11; 12.2; 12.8; 12.9; 13; 13.4; 14; 14.5; 14.8

Vergleiche die Beobachtungsreihen mit Hilfe zweier Boxplot-Diagramme. Vergleiche insbesondere die Mittel- und Zentralwerte und deren relative Abweichung voneinander.

7. Die Eintrittspreise für Heimat- und Geschichtsmuseen in verschiedenen Orten ergaben:

Eintritt	kostenlos	€ 2,-	€ 3,-	€ 4,-	€ 5,-	€ 6,-	€ 8,-	€ 10,-	€ 12,-
Anzahl	4	9	6	6	5	2	3	1	1

Erstelle das dazugehörige Boxplot-Diagramm.

Lösungen: 4. Bestände 1920

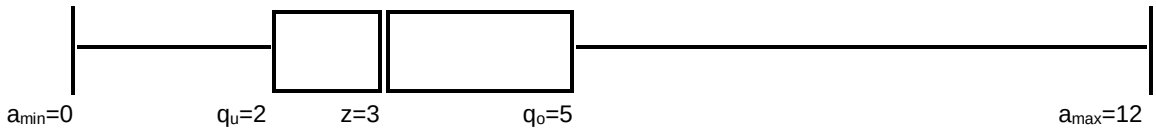
Merkmal:	Wert:	Prozent-satz:
Zwergwal	850000.00	28.81%
Finnwal	500000.00	16.95%
Buckelwal	100000.00	3.39%
Pottwal	1250000.00	42.37%
Blauwal	250000.00	8.47%
Summen:	2950000.00	100.00%

Bestände 1990

Merkmal:	Wert:	Prozent-satz:
Zwergwal	750000.00	94.58%
Finnwal	20000.00	2.52%
Buckelwal	12000.00	1.51%
Pottwal	10000.00	1.26%
Blauwal	1000.00	0.13%
Summen:	793000.00	100.00%

Insgesamt: -73,1 %; Pottwal: -99,2 %, Blauwal: -99,6 %; Finnwal: -3,54 % pro Jahr.

5. Anzahl der Daten: n = 15; Urliste: 21; 35; 32; 45; 61; 58; 55; 63; 67; 52; 58; 58; 46; 24; 35; Geordnete Liste: 21; 24; 32; 35; 35; 45; 46; 52; 55; 58; 58; 58; 61; 63; 67; Minimum: a_{min} = 21, Maximum: a_{max} = 67, Spannweite: s = 46; Modalwert: m = 58; unteres Quartil: q_u = 35, Median/Zentralwert: z = 52, oberes Quartil: q_o = 58, Quartilsabstand: d = 23, Mittelwert: $\bar{x}$ = 47.33. / 6. A: Anzahl der Daten: n = 12; Liste: 5.4; 7.8; 7.9; 8.3; 8.9; 9.2; 10.1; 10.8; 10.9; 11; 12.3; 13.4; Minimum: a_{min} = 5.4, Maximum: a_{max} = 13.4, Spannweite: s = 8, unteres Quartil: q_u = 7.9, Median/Zentralwert: z = 9.65, oberes Quartil: q_o = 11, Quartilsabstand: d = 3.1, Mittelwert: $\bar{x}$ = 9.67; B: Anzahl der Daten: n = 17; Liste: 4; 4.5; 6; 6.2; 6.7; 8; 8.9; 9.5; 11; 12.2; 12.8; 12.9; 13; 13.4; 14; 14.5; 14.8; Minimum: a_{min} = 4, Maximum: a_{max} = 14.8, Spannweite: s = 10.8, unteres Quartil: q_u = 6.7, Median/Zentralwert: z = 11, oberes Quartil: q_o = 13.4, Quartilsabstand: d = 6.7, Mittelwert: $\bar{x}$ = 10.14 / 7. Datenliste: $^{1:}$ 0; $^{2:}$ 0; $^{3:}$ 0; $^{4:}$ 0; $^{5:}$ 2; $^{6:}$ 2; $^{7:}$ 2; $^{8:}$ 2; $^{9:}$ 2; $^{10:}$ 2; $^{11:}$ 2; $^{12:}$ 2; $^{13:}$ 2; $^{14:}$ 3; $^{15:}$ 3; $^{16:}$ 3; $^{17:}$ 3; $^{18:}$ 3; $^{19:}$ 3; $^{20:}$ 4; $^{21:}$ 4; $^{22:}$ 4; $^{23:}$ 4; $^{24:}$ 4; $^{25:}$ 4; $^{26:}$ 5; $^{27:}$ 5; $^{28:}$ 5; $^{29:}$ 5; $^{30:}$ 5; $^{31:}$ 6; $^{32:}$ 6; $^{33:}$ 8; $^{34:}$ 8; $^{35:}$ 8; $^{36:}$ 10; $^{37:}$ 12; Boxplot-Diagramm:



Datenblatt: Wahrscheinlichkeitsrechnung

In Zufallsexperimenten (Zufallsversuchen mit nicht vorher bestimmten Ergebnissen) werden Ereignissen A Wahrscheinlichkeiten p = p(A) zugeordnet (relative Häufigkeit als die einem Ereignis A zugeordnete Zahl -> $p(A) = p = \frac{g}{n}$ mit: g = Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse, n = Anzahl der möglichen Versuchsergebnisse).

Ein Wahrscheinlichkeitsbaum mit seinen Ästen (Pfaden) und Wahrscheinlichkeiten ist die Visualisierung ein- oder mehrstufiger Zufallsexperimente. Dabei entspricht einem Elementarereignis ein Pfad, die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades werden multipliziert. Bleiben die Wahrscheinlichkeiten bei mehrmaligem Durchführung eines Experimentes gleich, so spricht man von einem Zufallsversuch „mit Zurücklegen", ändern sich die Wahrscheinlichkeiten, so von „ohne Zurücklegen". Ein beliebiges Ereignis lässt sich als Menge von Pfaden darstellen, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist die Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten, die Anzahl der Pfade, die zu einem Ereignis gehören. Der eindeutigen Zuordnung von Pfad und Elementarereignis entspricht es, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten von Elementarereignissen 1 (= 100% Wahrscheinlichkeit) ergibt. Ebenso gilt:

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1,\ p(\overline{A}) = 1 - p(A),\ p(A) = 1 - p(\overline{A})$$

für ein Ereignis A und dessen Gegenereignis.

Ein Zufallsexperiment ist ein Spiel, wenn im Experiment auftretende Ereignisse A, B, … mit positiven (Gewinn) oder negativen (Verlust) Geldeinheiten (GE) g_A, g_B, … bewertet werden oder wenn Gewinnpositionen ein Spieleinsatz e (GE) gegenübersteht. Die Ereignisse haben die Wahrscheinlichkeiten p(A), p(B), … (zwischen 0 und 1), die Wahrscheinlichkeiten der sich gegenseitig ausschließenden Ereignisse entsprechen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit p(A) + p(B) + … + p(sonst) = 1. Der Erwartungswert E gibt den durchschnittlichen Gewinn oder Verlust pro Spiel an (GE), d.h. es gilt:

$$E = g_A p(A) + g_B p(B) + \ldots \text{ bzw. } E = g_A p(A) + g_B p(B) + \ldots - e$$

D.h.: Der Erwartungswert ist die Summe aller Produkte, die sich aus dem Gewinn oder Verlust und der Wahrscheinlichkeit jeweils eines Ereignisses ergeben, eventuell abzüglich des Spieleinsatzes.

Beispiele:

a) Ein Würfel wird einmal geworfen; der Spieler bekommt die einen Gewinn (GE) in Höhe der gewürfelten Zahl, wenn er die „1", „3" oder „6" würfelt, andernfalls erleidet einen Verlust (GE) in Höhe der gewürfelten Zahl. Der Erwartungswert errechnet sich auf Grund der Wahrscheinlichkeitsverteilung p(1) = … p(6) = 1/6 und der Gewinne und Verluste g_1 = +1, g_2 = -2, g_3 = +3, g_4 = -4, g_5 = -5, g_6 = +6 als:

$$E = 1 \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} - 4 \cdot \frac{1}{6} - 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \approx -0{,}17\,,$$

d.h.: der Spieler verliert pro Spiel im Durchschnitt 0,17 GE.

b) Bei einem Einsatz von € 2,50 wird ein Glücksrad mit den drei Farben rot, blau und grün (p(r) = 0,3; p(b) = 0,5; p(g) = 0,2) zweimal gedreht. Der Spieler gewinnt € 10,-, wenn zweimal „rot" erscheint, € 3,-, wenn einmal „rot" erscheint, sonst nichts. Die Wahrscheinlichkeiten sind: p(2xr) = 0,3·0,3 = 0,09, p(1xr) = 0,3·0,7 + 0,7·0,3 = 0,42 (laut Wahrscheinlichkeitsbaum). Der Erwartungswert errechnet sich als:

$$E = 10 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}42 - 2{,}50 = -0{,}34\,,$$

d.h.: der Spieler verliert pro Spiel im Durchschnitt 34 ct.

c) Eine Urne enthält 2 rote und 6 schwarze Kugeln, die dreimal mit Zurücklegen gezogen werden. Es ergibt sich mit den Grundwahrscheinlichkeiten 2/8 = 0,25, 6/8 = 0,75 (1. bis 3. Ziehung) der folgende Wahrscheinlichkeitsbaum (R = rot, S = schwarz):

Wahrscheinlichkeitsbaum und Wahrscheinlichkeiten:

			0.25 **R**	>	p(**RRR**) = 0.015625	**1**
		0.25 **R**				
			0.75 **S**	>	p(**RRS**) = 0.046875	**2**
	0.25 **R**					
			0.25 **R**	>	p(**RSR**) = 0.046875	**3**
		0.75 **S**				
			0.75 **S**	>	p(**RSS**) = 0.140625	**4**
			0.25 **R**	>	p(**SRR**) = 0.046875	**5**
		0.25 **R**				
			0.75 **S**	>	p(**SRS**) = 0.140625	**6**
	0.75 **S**					
			0.25 **R**	>	p(**SSR**) = 0.140625	**7**
		0.75 **S**				
			0.75 **S**	>	p(**SSS**) = 0.421875	**8**

Anzahl „rot“ k =	**Pfad-wahrscheinlichkeit**	**Pfad-anzahl**	**Gesamt-wahrscheinlichkeit** p(kx„rot“) =
3	0.015625	1	0.015625
2	0.046875	3	0.140625
1	0.140625	3	0.421875
0	0.421875	1	0.421875
		Summe	1
		Erwartungswert	0.75

1. Aus einer Urne werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Urne enthält 6 blaue, 4 rote und 2 weiße Kugeln. Ergänze im nachstehenden Wahrscheinlichkeitsbaum die fehlenden Wahrscheinlichkeiten:

1.	2.	Versuchsdurchführung			
	blau	>	p(**blau; blau**) =		**1**
blau	**rot**	>	p(**blau; rot**) =		**2**
	weiß	>	p(**blau; weiß**) =		**3**
	blau	>	p(**rot; blau**) =		**4**
rot	**rot**	>	p(**rot; rot**) =		**5**
	weiß	>	p(**rot; weiß**) =		**6**
	blau	>	p(**weiß; blau**) =		**7**
weiß	**rot**	>	p(**weiß; rot**) =		**8**
	weiß	>	p(**weiß; weiß**) =		**9**

2. Eine Urne enthält 4 rote und 6 schwarze Kugeln. Es wird zweimal gezogen, wobei die gezogenen Kugeln zurückgelegt werden. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: „Alle gezogenen Kugeln sind rot.“; „Alle gezogenen Kugeln sind schwarz.“; „Es wird genau eine rote Kugel gezogen.“; „Es wird mindestens eine schwarze Kugel gezogen.“

3. Ein Glücksrad besteht aus den Feldern „blau“ (120°), „rot“ (180°) und „gelb“ (60°). Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: „Es erscheint zweimal blau.“; „Es erscheinen nur gleiche Farben.“; „Es erscheinen nur verschiedene Farben.“; „Es erscheinen rot und gelb.“
b) Beim „Glücksrad-Spiel“ zahlt ein Spieler für zweimaliges Drehen des Glücksrads einen Einsatz von € 2,-. Er gewinnt, wenn alle Farben gleich sind, € 5,-, wenn alle Farben „gelb“ sind, zusätzlich € 5,-.

4. Unter 16 Spielkarten befinden sich Buben, Damen und Könige. Zwei Karten werden gleichzeitig aufgedeckt. Ergänze im nachstehenden Wahrscheinlichkeitsbaum die fehlenden Wahrscheinlich-

keiten:

1.	2.	Versuchsdurchführung			
	Bube	>	p(**Bube; Bube**) =		**1**
Bube **62,5 %**	**Dame**	>	p(**Bube; Dame**) =		**2**
	König	>	p(**Bube; König**) =		**3**
	Bube	>	p(**Dame; Bube**) =		**4**
Dame	**Dame**	>	p(**Dame; Dame**) =		**5**
	König	>	p(**Dame; König**) =		**6**
	Bube	>	p(**König; Bube**) =		**7**
1/4 **König**	**Dame**	>	p(**König; Dame**) =		**8**
	König	>	p(**König; König**) =		**9**

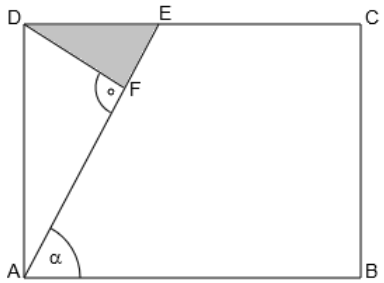
a) Wie viele Buben, Damen und Könige befinden sich unter den Spielkarten?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, Karten vom selben Typ (Bube, Dame, König) zu ziehen?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens einmal „Dame“ zu ziehen?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal „Bube“ zu ziehen?

5. Aus einer Tüte mit 20 grünen, 15 blauen und 10 roten Bonbons werden zwei Bonbons mit einem Griff herausgezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Bonbons zu bekommen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein blaues und ein rotes Bonbon zu ziehen?

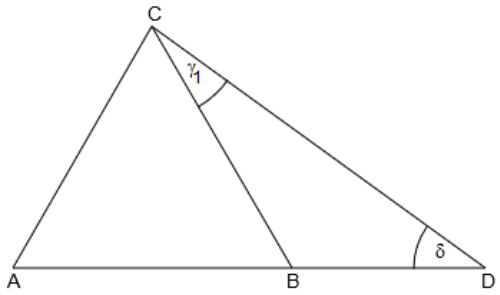
6. Ein Glücksrad mit den Farben rot (50%), grün (40%) und weiß (10%) wird zweimal gedreht.
a) Zeichne ein Baumdiagramm.
b) Bei einem Einsatz von 1,- € gewinnt ein Spieler 5,- € bei zweimal „weiß“, 2,- € bei einmal „weiß“ pro Spiel? Ist das Spiel fair?
c) Wie hoch muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?
d) Wie hoch muss bei einem Einsatz von 1,- € die Auszahlung für zweimal „weiß“ sein, damit das Spiel fair ist?

Lösungen: 2. p = 0,16, p = 0,36, p = 0,48, p = 1 – 0,16 = 0,84. / 3a) p_b = 1/3, p_r = 1/2, p_g = 1/6 -> p = 1/9, p = 7/18, p = 1 – 7/18 = 11/18, p = 1/6, b) E = 1/12. / 4a) 10xB, 2xD, 4xK; 4b) p = 0,43; c) p = 1 – 0,0083 = 0,992; d) p = 0,875. / 5. p = 0,338, p = 0,152. / 6b) E = -0,59, c) e = 0,41; d) x = 64.

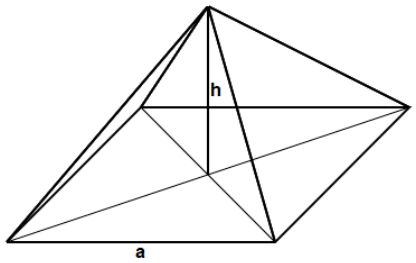
P1. Ein Rechteck ABCD hat die Länge $\overline{AB}$ = 8 cm und den Flächeninhalt A_R = 48 cm^2. Der Winkel beträgt α = 62°. Berechne den Abstand zwischen den Punkten D und F sowie den Flächeninhalt des Dreiecks DEF.



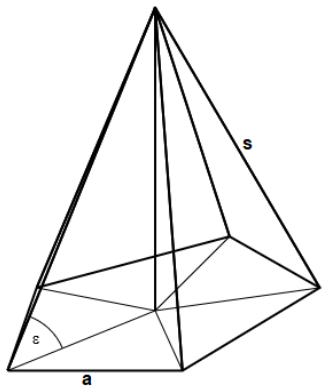
P2. Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit $\overline{AB}$ = 6,5 cm, es gilt γ_1 = 25,3°. Bestimme den Winkel δ und berechne den Umfang des Dreiecks BCD.



P3/1. Von einer quadratischen Pyramide sind gegeben: Mantelflächeninhalt M = 102,4 cm^2, Oberflächeninhalt O = 166,4 cm^2. Berechne das Volumen der Pyramide.



P3/2. Von einer regelmäßigen Fünfeckpyramide sind bekannt: Rauminhalt V = 226,2 cm^3, Grundkante a = 6,1 cm. Wie groß ist die Oberfläche der Pyramide, wie groß der Winkel ε zwischen Seitenkante s und Grundfläche G?



P4. Ein Kegel hat die Oberfläche O = 114,14 cm^2 bei einem Grundkreisdurchmesser d = 6,4 cm. Wie groß ist die Oberfläche einer quadratischen Pyramide, die dasselbe Volumen und dieselbe Höhe wie der Kegel hat?

P5. Löse das lineare Gleichungssystem:

(1) $\frac{5}{8}(x-3)+3(3y+1)=-15$

(2) $\frac{4}{3}x-\frac{2+y}{4}=4$

P6/1. Eine nach oben geöffnete Normalparabel hat den Scheitelpunkt S(4|-3). Eine Gerade mit der Steigung m = 2 geht durch den Punkt P(0|-3). Wie lauten die Schnittpunkte zwischen Gerade und Parabel? Wie weit die Schnittpunkte voneinander entfernt?

P6/2. Eine Parabel hat die Gleichung $y = ax^2 - 4{,}5$ und verläuft durch den Punkt P(-2|-2,5). Berechne den Wert von a. Zeichne die Parabel (Wertetabelle). Wie lauten die Koordinaten des Scheitelpunktes und der Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse?

P7/1. Wie lautet die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung?

$$(x+4)^2 - (x-5)^2 - (x-1)^2 = 14x - 1$$

P7/2. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Bruchgleichung:

$$\frac{3}{x^2 - x} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}$$

P8/1. Bei der drei Stunden dauernden Abschlussprüfungsarbeit im Fach Mathematik an den Realschulen des Landes Baden-Württemberg sind maximal 50 Punkte (Pu) zu vergeben, wobei die zwei nicht ausgewählten Wahlteilaufgaben nochmals 20 Punkte ergeben. Die Punkte verteilen sich wie folgt (P = Pflichtteil-, W = Wahlteilaufgabe) auf die Mathematikbereiche Geometrie (G), Algebra (A), Wahrscheinlichkeitsrechnung (W), Prozentrechnung, Diagramme und Daten (D): P1: Trigonometrie (G) 4 Pu; P2: Trigonometrie (G) 3,5 Pu; P3: Körperberechnung 4,5 Pu; P4: Gleichung (A) 3,5 Pu; P5: Parabeln (A) 4 Pu; P6: Diagramm (D) 3,5 Pu, P7. Boxplot (D) 3,5 Pu; P8: Wahrscheinlichkeitsrechnung (W) 3,5 Pu; W1: Trigonometrie (G) 10 Pu; W2: Körperberechnung (G) 10 Pu; W3: Parabeln (A) 10 Pu, W4a) Wahrscheinlichkeitsrechnung (W) 5 P; Parabelmodellierung 5 Pu.

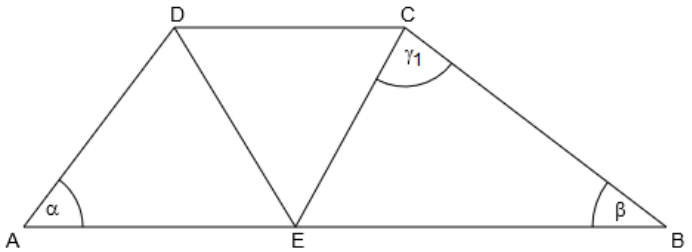
1) Berechne die Anteile der Mathematikbereiche (A, D, G, W) an der Gesamtpunktzahl von 70 Punkten bzw. 50 Punkten (wenn zwei Wahlaufgaben ausgewählt sind).
2) Wie viel Bearbeitungszeit ist für einen Punkt aufzuwenden, wie viel im Durchschnitt für eine Pflichtteilaufgabe, wie viel für eine Wahlteilaufgabe, wie viel für die einzelnen Mathematikbereiche (A, D, G, W) (wenn zwei Wahlaufgaben ausgewählt sind)?

P8/2. Beim Zuwachssparen wird das Anfangskapital in Höhe von € 5000,- im 1. und 2. Jahr mit einem Zinssatz von 1,2 % verzinst. Nach vier Jahren beträgt das Endkapital € 5291,09, die Zinsen im dritten Jahr betragen € 76,81. Wie hoch sind die Zinssätze im dritten und vierten Jahr, wie groß ist durchschnittliche Zinssatz, um wie viel Prozent hat das Anfangskapital während der vier Jahre Anlagezeit zugenommen?

P9. In einer Schublade befinden sich 8 schwarze, 6 rote und 4 gelbe Socken durcheinander. Im Dunkeln werden aus der Schublade zwei Socken zufällig herausgegriffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man Socken mit derselben Sockenfarbe erhalten?

P10. Eine Tankstelle hat die folgenden Daten von getankten Litern Superbenzin von 20 PKWs zusammengetragen (Urliste): 34,5; 32; 56,1; 48,2; 21,8; 25,6, 44,5; 58,2; 62,7, 45; 42,1; 56,8; 24; 45,4; 37; 38,5; 18,4; 60,5; 46; 38,3. Stelle die Daten unter Ermittlung von Zentralwert und Quartilen in einem Boxplot-Diagramm dar. Wie groß ist der Mittelwert der getankten Mengen?

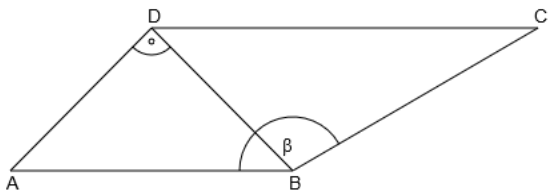
W1.a) Im Trapez ABCD ist: $\overline{AB}$ = 14,5 cm, $\overline{CD}$ = 5,2 cm, γ_1 = 81,5°, β = 37,4°. Das Dreieck CDE hat den Flächeninhalt A_{CDE} = 11,7 cm^2. Berechne die Entfernung zwischen den Punkten A und E und die Große des Winkels α.



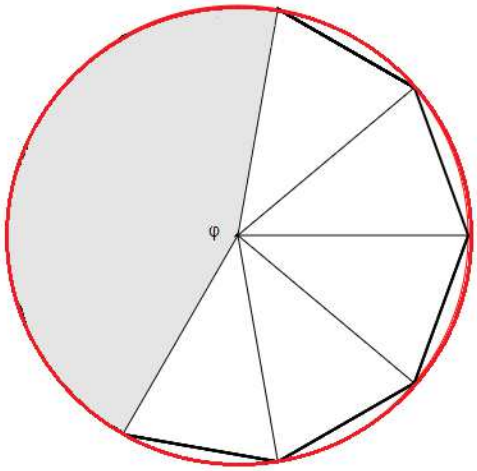
b) Im Trapez ABCD befindet sich das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck ABD. Gegeben sind weiterhin: $\overline{AB}$ = 4e$\sqrt{2}$, β = 150°. Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass der Umfang des Dreiecks BCD

$$u_{BCD} = 2e\left(2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

beträgt.



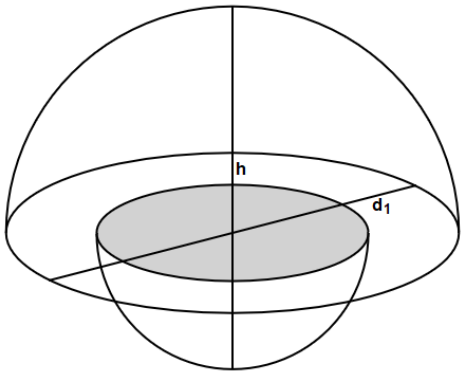
W2/1.a) Eine Kreisfläche mit Radius r = 25 cm ist folgendermaßen aufgeteilt: Der Kreisausschnitt mit Ausschnittswinkel φ = 164° stellt die Mantelfläche eines Kegels dar, die restliche Kreisfläche beinhaltet die Mantelfläche einer regelmäßigen Fünfeckpyramide. Um wie viel unterscheiden sich die Rauminhalte beider Körper?



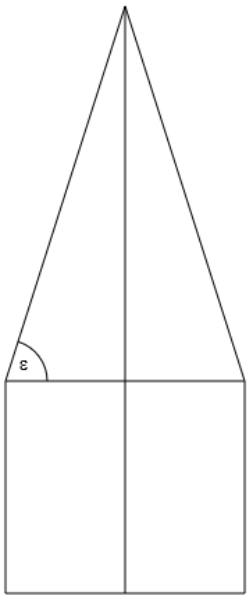
b) Ein Körper besteht aus zwei Halbkugeln. Die größere Halbkugel hat den Durchmesser d_1 = 10e, die Höhe des zusammengesetzten Körpers betragt h = 8e. Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass die Oberfläche des Körpers

$$O = 84\pi e^2$$

beträgt.

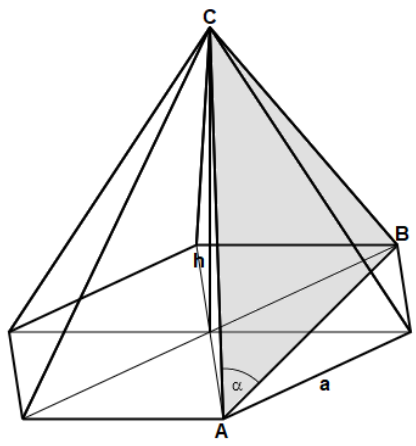


W2/2.a) Der Achsenschnitt eines aus Zylinder und Kegel zusammengesetzten Körpers hat einen Flächeninhalt von A = 108,3 cm^2, der angegebene Winkel ist ε = 72,5° groß, die Mantellinie des Kegels beträgt s = 13,3 cm. Berechne Oberfläche und Volumen des Körpers.



b) Eine regelmäßige Sechseckpyramide hat die Grundkante a = e$\sqrt{11}$ und die Höhe h = 5e. Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass im Dreieck ABC für den Winkel α gilt:

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{111}{33}}\,.$$



W3.a) 1) Durch die Punkte P(-1|8) und Q(2|5) verlaufen die Gerade g und die nach oben geöffnete Normalparabel p. Bestimme die Geraden- und die Parabelgleichung.
2) Wie lautet die Gleichung der Geraden h, die durch den Scheitelpunkt der Parabel p geht und zur Geraden g parallel ist?
3) Die Schnittstellen zwischen Gerade g und Parabel p bilden zusammen mit dem Scheitelpunkt der Parabel ein Dreieck und darüber hinaus mit zwei Punkten auf der Geraden h ein Parallelogramm, von dem zwei Seiten parallel zur y-Achse des Koordinatensystems liegen. Berechne den prozentualen Anteil des Flächeninhalts des Dreiecks an dem Flächeninhalt des Parallelogramms.

b) Löse die quadratische Gleichung:

$$(2x-1)^2 - (3x+1)^2 = (x-4)(2x+8) + 16(3x+2)$$

W3/2.a) Berechne die Schnittpunkte P und Q der zwei allgemeinen Parabeln p_1: $y = -0{,}5x^2 + 5$ und p_2: $y = x^2 - 1$. Zusammen mit den Scheitelpunkten der Parabeln bilden die Schnittpunkte ein Viereck, dessen Flächeninhalt berechnet werden soll.

b) Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Bruchgleichung:

$$\frac{x^2+11}{2x^2-8} = \frac{10x}{3x+6} - \frac{6-2x}{2x-4}$$

W4.a) Ein Glücksrad mit den Farben rot (144°) und grün wird zweimal gedreht.

1) Zeichne ein Baumdiagramm.
2) Bei einem Einsatz von 2,- € gewinnt ein Spieler 4,- € bei zweimal „rot“, 2,- € bei einmal „rot“ pro Spiel? Ist das Spiel fair? Wie viel verliert der Spieler durchschnittlich bei 50 Spielen?
3) Wie groß muss der Gewinn für zweimal „rot“ sein, damit das Spiel fair ist?
4) Wie groß muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?

b) Ein Tunnel mit parabelförmigem Querschnitt ist 6 m hoch und 10 m breit. Bestimme die Zahlen a und c, wenn die Parabel $y = ax^2 + c$ den Tunnelquerschnitt beschreibt. In welchem Punkt P ist der Tunnel 5 m hoch? Wie weit ist der Punkt P von der Mitte eines durch den Tunnel laufenden Weges entfernt?

Lösungen: P1. $\overline{BC}$ = 6 cm, $\overline{DE}$ = 3,19 cm, $\overline{EF}$ = 1,5 cm, $\overline{DF}$ = 2,82 cm -> A_{DEF} = 2,1 cm^2.

P2. δ = 180°–60°-60°–25,3° = 34,7°, h_{ABC} = 5,3 cm, $\overline{BC}$ = 6,5 cm, $\overline{CD}$ = 9,9 cm, $\overline{BD}$ = 4,9 cm -> u_{BCD} = 21,3 cm.

P3/1. a = 8 cm, h = 5 cm -> V = 106,67 cm^3. / P3/2. h = 10,6 cm, s = 11,8 cm, O = 237,9 cm^2, ε = 63,9°.

P4. Kegel: r = 3,2 cm, h = 7,5 cm, V = 80,42 cm^3 -> Pyramide: V = 80,42 cm^3, h = 7,5 cm, a = 5,67 cm, h_s = 8,02 cm, O = 123.12 cm^2.

P5. x = 3, y = -2 -> L = {(3; -2)}.

P6/1. Schnittpunkte P_1(2|1), P_2(8|13) -> $\overline{P_1P_2}$ = 13,42 LE. / P6/2. y = $0{,}5x^2$ – 4,5, S(0|-4,5), N(-3|0), N(3|0).

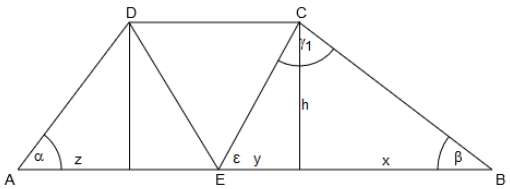
P7/1. L = {3}. / P7/2. Hauptnenner = x(x-1) -> D = **R**\{0; 1}, L = {2}.

P8/1. 1) 70 Punkte: A: 22,5/70 = 0,321 = 32,1%, D: 7/70 = 0,1 = 10%, G: 32/70 = 0,457 = 45,7%, W: 8,5/70 = 0,121 = 12,1%; 50 Punkte (W1, W2 entfallen): A: 22,5/50 = 0,45 = 45%, D: 7/50 = 0,14 = 14%, G: 12/50 = 0,24 = 24%, W: 8,5/50 = 0,17 = 17% u.ä.; 2) 3 Stunden = 180 Minuten, 50 Punkte -> 3,6 Minuten/Punkt; durchschnittliche Punktzahl Pflichtteilaufgabe 30/8 = 3,75 Punkte -> 13,5 Minuten/Pflichtteilaufgabe; Wahlteilaufgabe 10 Punkte -> 36 Minuten/Wahlteilaufgabe; Zeitanteile (W3, W4 entfallen): A: 27 Minuten, D: 25,2 Minuten, G: 115,2 Minuten; W: 12,6 Minuten u.ä. / P8/2. K_0 = 5000, K_1 = 5060, K_2 = 5120,72, K_3 = 5197,33, K_4 = 5191,09 -> p_3 = 1,5%, p_4 = 1,8%, p (durchschnittlich) = 1,42%, p (Zuwachs) = 5,82%.

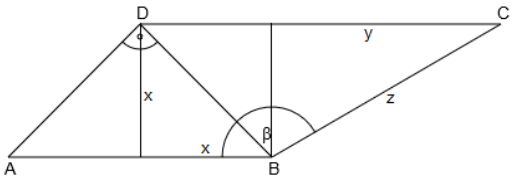
P9. Zweistufiger Wahrscheinlichkeitsbaum, Experiment ohne Zurücklegen -> p = p(ss) + p(rr) + p(gg) = 0,32 = 32%.

P10. Min = 18,4, Max = 62,7, q_u = 32 (Rang 5), z = 43,3 (Rang 10, 11), q_0 = 48,2 (Rang 15), q = 16,2, s = 44,3, Durchschnitt $\bar{x}$ = 41,78.

W1.a) A = 11,7 cm^2 -> h = 4,5 cm; ε = 61,1°, x = 5,89 cm, y = 2,48 cm, z = 3,41 cm; $\overline{AE}$ = 6,13 cm, α = 52,8°.



W1.b) x = 2e√2, y = 2e√6, z = 4e√2 ->
$u_{BCD} = \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{BD} = 4e\sqrt{2} + 2e(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + 4e$ -> u_{BCD}.



W2/1.a) Kegel: M = 894,48 cm^2, u = 71,56 cm –> r_K = 11,39 cm, h_K = 22,25 cm -> V_K = 3023 cm^3; Pyramide: s_P = 25 cm, Mantelflächenspitzenwinkel γ = 39,2° -> a = 16,77 cm, h_P = 20,53 cm -> V_P = 3311,25 cm^3; Volumendifferenz ΔV = 288,25 cm^3. / W2.b) r_1 = 5e, r_2 = 3e -> O = O_1 + O_2 * $A_{Kreisring}$ = $50\pi e^2 + 18\pi e^2 + 16\pi e^2$ -> O.

W2/2.a) Kegel: r = 4 cm, h_K = 12,68 cm, M_K = 167,08 cm^2, V_K = 212,46 cm^3, A_K = 50,72 cm^2 -> A_Z = A–A_K = 108,3–50,72 = 57,58 cm^2 -> Zylinder: d= 8 cm, h_z = 7,2 cm, M_Z = 180,96 cm^2, V_Z = 361,91 cm^3 -> O = M_K + M_Z + A_{Kreis} = 167,08+180,96+50,27 = 398,31 cm^2, V = V_K + V_Z = 574,37 cm^3. / W2/2.b) Pyramidenseitenkante s = 6e, $\overline{AB} = e\sqrt{33}$, Dreieckshöhe h_{ABC} = $\frac{1}{2}e\sqrt{111}$ -> Formel.

W3/1.a) g: y = -x+7, p: y = x^2–2x+5 = $(x-1)^2$ – 4 -> S(1|4) -> h: y = -x–3; A_{PQS} = 3·12–3·3/2–1·9/2–2·12/2 = 15 FE, P'(-1|-4), Q'(2|-5) -> $A_{P'Q'QP}$ = 10·3 = 30 FE -> A_{PQS}/ $A_{P'Q'QP}$ = 15/30 = 0,5 = 50 % / W3/1.b) L = {0; 6}.

W3/2.a) P(-2|3), Q(2|3), S_1(0|5), S_2(0|-1) -> A = 12 FE (Drachenviereck). / W3/2.b) Hauptnenner = 6(x-2)(x+2) -> D = **R**\{-2; 2}, L = {-1; 3}.

W4.a) Zweistufiger Wahrscheinlichkeitsbaum, Experiment ohne Zurücklegen mit: p_{rot} = 0,4, $p_{grün}$ = 0,6; Erwartungswert: E = 5·0,16+2·0,48–2 = -0,24 € -> Verlust bei 50 Spielen: 12,00 €; faires Spiel: Einsatz = 1,76 €, Gewinn für zweimal „rot“ = 6,50 € / W4.b) y = $-0.24x^2$ + 6, y=5 -> P(2,04|5) -> d = 5,4 m.