**Michael Buhlmann**

# Mathematatik > Mengenlehre > Cantorsches Diagonalverfahren

## Georg Cantor

Der deutsch-russische Mathematiker Georg Cantor (*1845-†1918) gilt als der Begründer der Mengenlehre, beschäftigte sich nach Schule und Mathematikstudium u.a. in Zürich, Berlin, Göttingen (Promotion 1867) und Halle (Habilitation 1869) aber zunächst mit Zahlentheorie und Fourierreihen. Cantor arbeitete und lehrte als Privatdozent und Professor (1872/77) an der Universität Halle bis zu seiner Emeritierung (1913). Mit dem 1873 veröffentlichten Diagonalisierungsverfahren der rationalen Zahlen bewies Cantor, dass sich die rationalen Zahlen entlang der natürlichen Zahlen in einer Folge „aufreihen“ lassen. Die Analyse der Mächtigkeit von Mengen war dann auch ein Hauptmerkmal von Cantors Mengenlehre, etwa als sich die Mächtigkeit eines Quadrats und die von dessen Seite als gleichmächtig herausstellte. So folgten zwischen 1874 und 1897 eine Anzahl wichtiger Beiträge zur Mengenlehre. U.a. vertrat Cantor die Kontinuumshypothese, wonach zwischen der abzählbaren Mächtigkeit der natürlichen Zahlen **N** und der überabzählbaren der reellen Zahlen **R** es keine Menge gibt, die eine größere Mächtigkeit als die der natürlichen Zahlen und eine kleinere als die der reellen besitzt ($\aleph_0$ als Mächtigkeit der natürlichen Zahlen, $\aleph_1$ als Mächtigkeit der reellen Zahlen mit: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$). Cantor entdeckte die (Zermelo-Fraenkel-) Mengenaxiome (1889/99) und auch die Widersprüche der naiven Mengenlehre (Cantorsche Antinomien 1897/99: Mengen und Klassen). Im Streit zwischen „Intuitionisten“ und „Formalisten“ um das „aktual Unendliche“ fand die von Cantor begründete Mengenlehre ihre Kritiker (Leopold Kronecker) und Befürworter (David Hilbert: „Cantors Paradies“). Die Cantormenge (Wischmenge) als Punktmenge nimmt die Mathematik der Fraktale vorweg.

## Cantorsches Diagonalverfahren

Eine Menge M ist eine „Zusammenfassung wohlunterschiedener Elemente“, die Mächtigkeit |M| einer Menge M gibt die (endliche, abzählbar-unendliche, überabzählbar-unendliche) „Anzahl“ der Elemente in der Menge M an. Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung f: M -> N gibt, die jedem Element der Menge M genau ein Element der Menge N zuordnet (und umgekehrt). Die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen **N** = {1, 2, 3, …} bzw. $\mathbf{N_0}$ = {0, 1, 2, 3, …} ist abzählbar-unendlich. Alle Mengen, die gleichmächtig zu **N** sind, sind ebenfalls abzählbar-unendlich. Die Menge der rationalen Zahlen **Q**, also der mit Vorzeichen +, - versehenen Brüche mit natürlichen Zahlen als Zähler und Nenner sowie der Null, ist dann auch abzählbar-unendlich. Es gibt nämlich eine bijektive Abbildung als eineindeutige Zuordnung zwischen **N** bzw. $\mathbf{N_0}$ und **Q**. Diese bijektive Abbildung wird hier durch das Cantorsche Diagonalverfahren charakterisiert. Dazu genügt die Anordnung der positiven rationalen Zahlen $\mathbf{Q}^+$ in eine Zahlenfolge $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$, wobei jede positive rationale Zahl $q_n = i/j$ in einem **N** x **N** = $\mathbf{N}^2$-Raster tabellarisch in die i. Zeile und j. Spalte platziert werden kann. Die Folge $q_n$ durchwandert $\mathbf{N}^2$ vollständig gemäß dem nachstehenden, das Diagonalverfahren beschreibenden Pseudo-Algorithmus:

Algorithmus Cantorsches Diagonalverfahren:

A Es ist: $q_1 = 1/1$ (1. Zeile, 1. Spalte). Der Merker m zeigt im Folgenden den Richtungswechsel des Verfahrens an, also ob das Verfahren eine positive rationale Zahl in einer Zeile mit höherer Zeilennummer (m = +1) oder mit niedriger Zeilennummer (m = -1) erreicht wird.

B Es sei $q_n = i/j$. Dann gilt genau eine der folgenden vier Vorgehensweisen:
1) Ist i = 1 (1. Zeile) und j ungerade mit $q_n = 1/j$, so ist: $q_{n+1} = 1/(j+1)$, m = +1.
2) Ist j = 1 (1. Spalte) und i gerade mit $q_n = i/1$, so ist: $q_{n+1} = (i+1)/1$, m = -1.
3) Ist sonst $q_n = i/j$ (Zeilennummer i, Spaltennummer j mit: i = 1 bei geradem j oder i > 1 oder j =1 bei ungeradem i oder j > 1), so ergibt sich:
    a) Bei m = +1 ist $q_{n+1} = (i+1)/(j-1)$ (Erhöhung der Zeilennummer um 1, Verkleinerung der Spaltennummer um 1),
    b) Bei m = -1 ist $q_{n+1} = (i-1)/(j+1)$ (Verkleinerung der Zeilennummer um 1, Erhöhung der Spaltennummer um 1).

C Unter Speicherung von $q_{n+1}$ erfolgt die Zuordnung $q_n$ <- $q_{n+1}$ (mit Zeilennummer i, Spaltennummer j). Es geht weiter mit B.

Die Anwendung des Algorithmus führt also auf die Zahlenfolge $q_n$, n = 1, 2, …, der positiven rationalen Zahlen, angeordnet zu:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **n =** | **$q_n$ =** | 13 | 3/3 | 26 | 3/5 | 39 | 7/3 | 52 | 7/4 | 65 | 2/10 | 78 | 12/1 | 91 | 1/13 | 104 | 13/2 | 117 | 4/12 | 130 | 10/7 | 143 | 11/7 | 156 | 3/16 | 169 | 16/3 | 182 | 9/11 | 195 | 5/16 |
| 1 | 1/1 | 14 | 2/4 | 27 | 2/6 | 40 | 6/4 | 53 | 8/3 | 66 | 1/11 | 79 | 13/1 | 92 | 1/14 | 105 | 14/1 | 118 | 3/13 | 131 | 11/6 | 144 | 10/8 | 157 | 4/15 | 170 | 17/2 | 183 | 8/12 | 196 | 6/15 |
| 2 | 1/2 | 15 | 1/5 | 28 | 1/7 | 41 | 5/5 | 54 | 9/2 | 67 | 1/12 | 80 | 12/2 | 93 | 2/13 | 106 | 15/1 | 119 | 2/14 | 132 | 12/5 | 145 | 9/9 | 158 | 5/14 | 171 | 18/1 | 184 | 7/13 | 197 | 7/14 |
| 3 | 2/1 | 16 | 1/6 | 29 | 1/8 | 42 | 4/6 | 55 | 10/1 | 68 | 2/11 | 81 | 11/3 | 94 | 3/12 | 107 | 14/2 | 120 | 1/15 | 133 | 13/4 | 146 | 8/10 | 159 | 6/13 | 172 | 19/1 | 185 | 6/14 | 198 | 8/13 |
| 4 | 3/1 | 17 | 2/5 | 30 | 2/7 | 43 | 3/7 | 56 | 11/1 | 69 | 3/10 | 82 | 10/4 | 95 | 4/11 | 108 | 13/3 | 121 | 1/16 | 134 | 14/3 | 147 | 7/11 | 160 | 7/12 | 173 | 18/2 | 186 | 5/15 | 199 | 9/12 |
| 5 | 2/2 | 18 | 3/4 | 31 | 3/6 | 44 | 2/8 | 57 | 10/2 | 70 | 4/9 | 83 | 9/5 | 96 | 5/10 | 109 | 12/4 | 122 | 2/15 | 135 | 15/2 | 148 | 6/12 | 161 | 8/11 | 174 | 17/3 | 187 | 4/16 | 200 | 10/11 |
| 6 | 1/3 | 19 | 4/3 | 32 | 4/5 | 45 | 1/9 | 58 | 9/3 | 71 | 5/8 | 84 | 8/6 | 97 | 6/9 | 110 | 11/5 | 123 | 3/14 | 136 | 16/1 | 149 | 5/13 | 162 | 9/10 | 175 | 16/4 | 188 | 3/17 | … | |
| 7 | 1/4 | 20 | 5/2 | 33 | 5/4 | 46 | 1/10 | 59 | 8/4 | 72 | 6/7 | 85 | 7/7 | 98 | 7/8 | 111 | 10/6 | 124 | 4/13 | 137 | 17/1 | 150 | 4/14 | 163 | 10/9 | 176 | 15/5 | 189 | 2/18 | | |
| 8 | 2/3 | 21 | 6/1 | 34 | 6/3 | 47 | 2/9 | 60 | 7/5 | 73 | 7/6 | 86 | 6/8 | 99 | 8/7 | 112 | 9/7 | 125 | 5/12 | 138 | 16/2 | 151 | 3/15 | 164 | 11/8 | 177 | 14/6 | 190 | 1/19 | | |
| 9 | 3/2 | 22 | 7/1 | 35 | 7/2 | 48 | 3/8 | 61 | 6/6 | 74 | 8/5 | 87 | 5/9 | 100 | 9/6 | 113 | 8/8 | 126 | 6/11 | 139 | 15/3 | 152 | 2/16 | 165 | 12/7 | 178 | 13/7 | 191 | 1/20 | | |
| 10 | 4/1 | 23 | 6/2 | 36 | 8/1 | 49 | 4/7 | 62 | 5/7 | 75 | 9/4 | 88 | 4/10 | 101 | 10/5 | 114 | 7/9 | 127 | 7/10 | 140 | 14/4 | 153 | 1/17 | 166 | 13/6 | 179 | 12/8 | 192 | 2/19 | | |
| 11 | 5/1 | 24 | 5/3 | 37 | 9/1 | 50 | 5/6 | 63 | 4/8 | 76 | 10/3 | 89 | 3/11 | 102 | 11/4 | 115 | 6/10 | 128 | 8/9 | 141 | 13/5 | 154 | 1/18 | 167 | 14/5 | 180 | 11/9 | 193 | 3/18 | | |
| 12 | 4/2 | 25 | 4/4 | 38 | 8/2 | 51 | 6/5 | 64 | 3/9 | 77 | 11/2 | 90 | 2/12 | 103 | 12/3 | 116 | 5/11 | 129 | 9/8 | 142 | 12/6 | 155 | 2/17 | 168 | 15/4 | 181 | 10/10 | 194 | 4/17 | | |

sowie angeordnet als:

Das oben beschriebene Diagonalverfahren kann noch modifiziert werden dahin, dass, ausgehend von der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbf{N_0}$, die natürliche Zahl 0 der rationalen Zahl 0, die ungeraden natürlichen Zahlen n = 1, 3, … den positiven, die geraden natürlichen Zahlen n = 2, 4, … den negativen rationalen Zahlen gemäß dem Diagonalisierungsverfahren zugeordnet werden. Diese Vorgehensweise erzeugt eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbf{N_0}$ und **Q**, so dass die Menge der rationalen Zahlen **Q** abzählbar-unendlich ist.
Weitere Diagonalverfahren beweisen dann im Übrigen die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen **R** sowie den Sachverhalt, dass die Mächtigkeit einer Menge M immer echt kleiner als die Mächtigkeit der Potenzmenge P(M) ist; die Potenzmenge P(M) ist dabei die Menge aller Teilmengen von M.

## Weitere Folgerungen

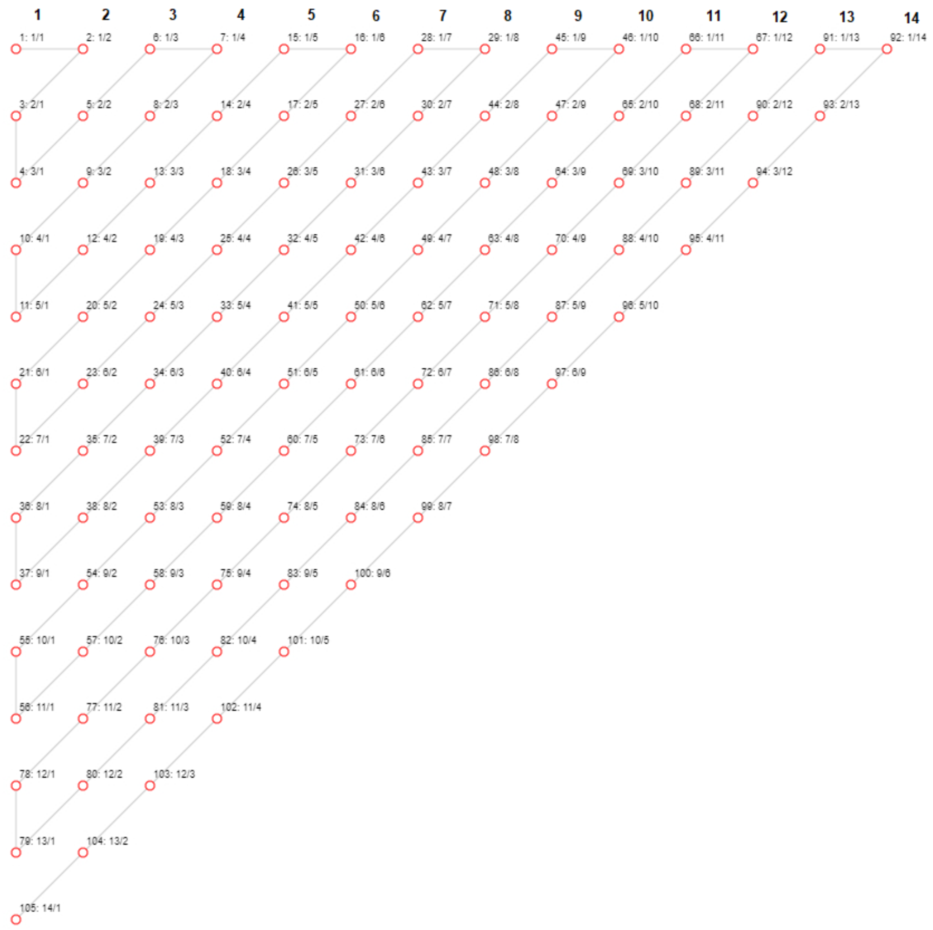
Wir betrachten nochmals die oben besprochene bijektive Abbildung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen **N** und der der positiven rationalen Zahlen $\mathbf{Q}^+$. Gemäß der Konstruktion des Cantorschen Diagonalverfahrens liegt jedes Element $q_n$ = i/j der Folge $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ auf einer Diagonale k, k = 1, 2, …, mit: i + j – 1 = k ⇔ i + j = k + 1. Auf jeder Diagonalen k liegen die k rationalen Zahlen k/1, (k-1)/2, …, 2/(k-1), 1/k mit Summe aus Zähler und Nenner als i+j = k+1. Unter Verwendung der Summenformel $\sum_{\kappa=1}^{k}\kappa = \frac{k(k+1)}{2}$ lässt sich dem Bruch 1/j mit ungeradem j (bei i = 1) die Position n = $\frac{k(k+1)}{2}$ bei folglich ungeradem k in der Folge $q_n$ zuordnen, dem Bruch i/1 mit geradem i (bei j = 1) die Position n = $\frac{k(k+1)}{2}$ bei geradem k. Daher lässt zum Folgenelement $q_n$ = i/j die Position n in der Folge bestimmen mit:

Bestimmung der Position einer positiven rationalen Zahl im Cantorschen Diagonalverfahren:
A Es sei: Folgenelement $q_n$ = i/j im Cantorschen Diagonalverfahren.
B Die Diagonalennummer bestimmt sich als: k = i + j – 1. Dann gilt genau eine der folgenden zwei Vorgehensweisen:

1) Ist k ungerade, so bestimmt sich die Folgenposition n des Folgenelements $q_n$ als: n = $\frac{k(k+1)}{2}$ – i + 1.

2) Ist k gerade, so bestimmt sich die Folgenposition n des Folgenelements $q_n$ als: n = $\frac{k(k+1)}{2}$ – j + 1.

Ist umgekehrt zu einer Folgenposition n das Folgenglied $q_n$ = i/j zu bestimmen, sind also Zähler i und Nenner j der positiven rationalen Zahl $q_n$ zu bestimmen, so gibt es eine Diagonalennummer k als natürliche Zahl, die der Ungleichung: $\frac{k(k+1)}{2} - k + 1 \le n \le \frac{k(k+1)}{2} \Leftrightarrow -0{,}5+\sqrt{2n+0{,}25} \le k \le 0{,}5+\sqrt{2n-1{,}75}$ genügt. Ist k auf diese Weise bestimmt, ergibt sich gemäß der Vorgehensweise bei der Bestimmung der Position in der Folge und mit vorgegebenem n: i = $\frac{k(k+1)}{2}$ – n + 1 => j = k – i + 1 bei ungeradem k, bei geradem k: j = $\frac{k(k+1)}{2}$ – n + 1 => i = k – j + 1.




Literaturhinweise: SCHLIEBNER, D., Cantor'sches Diagonalverfahren. Von Mengen, Unendlichkeiten und Wahnsinn (= Referatsskript Spezialklasse 03/04; Andreas Oberschule Berlin), [Berlin] 2003 (Cantorsches Diagonalverfahren); Wikipedia. Die freie Enzyklopädie: https://de.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor (Georg Cantor), https://de.wikipedia.org/wiki/Cantors_erstes_Diagonalargument (Cantorsches Diagonalverfahren); Rechenprogramme: http://www.michael-buhlmann.de/Mathematik/math_cantdiag01.htm, http://www.michael-buhlmann.de/Mathematik/math_cantdiag02.htm, http://www.michael-buhlmann.de/Mathematik/math_cantdiag03.htm, http://www.michael-buhlmann.de/Mathematik/math_cantdiag03a.htm (Cantorsches Diagonalverfahren).

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 08.2021