

Physikaufgaben

> Mechanik

> Auftrieb und Eisberg

Aufgabe: Ein Eisberg (Dichte: $\rho_{\text{Eisberg}} = 0,917 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) schwimmt im Meerwasser (Dichte: $\rho_{\text{Meerwasser}} = 1,024 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).

- a) Wie viel Prozent der Masse des Eisbergs befindet sich unterhalb, wie viel Prozent oberhalb des Meeresspiegels?
- b) Hat sich, wenn der Eisberg schmilzt, das Volumen des Meerwassers vergrößert oder verkleinert?

Lösung: I. Für einen Körper mit der Masse m [g, kg] und dem Volumen V [cm^3 , $\text{dm}^3 = \text{l}$, m^3] ergibt sich als Dichte ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]:

$$\rho = \frac{m}{V}, m = \rho V, V = \frac{m}{\rho} \quad (\text{Umrechnung: } 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1 \frac{\text{t}}{\text{m}^3})$$

II. Allgemein gilt hinsichtlich des Auftriebs von massiven Körpern in Flüssigkeiten: Die Gewichtskraft des Körpers ist: $G = mg$ ($g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ als Erdbeschleunigung). In einer Flüssigkeit mit Dichte ρ_{Fl} erfährt der Körper einen Auftrieb, eine Auftriebskraft vermöge der vom Körper verdrängten Flüssigkeit mit Volumen V und Masse $m_{\text{Fl}} = \rho_{\text{Fl}} V$. Die Auftriebskraft F_A ist also:

$$F_A = m_{\text{Fl}} g = \rho_{\text{Fl}} V g, V = \frac{F_A}{\rho_{\text{Fl}} g}, \rho_{\text{Fl}} = \frac{F_A}{V g}$$

Der Auftriebskraft steht die Gewichtskraft des Körpers gegenüber, so dass der Körper in der Flüssigkeit a) schwebt bei $G = F_A$, b) sinkt bei $G > F_A$, c) steigt bei $G < F_A$. Ein Körper schwebt in einer Flüssigkeit, wenn das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit seinem eigenem Gewicht entspricht, wenn also gilt: $mg = m_{\text{Fl}} g$ und damit: $m_{\text{Fl}} = \rho_{\text{Fl}} V = \rho V = m$. Das scheinbare Gewicht eines Körpers in einer Flüssigkeit ist: $G_{\text{scheinbar}} = G - F_A$.

III. a) Mit V_{Eisberg} sei das Gesamtvolumen des Eisbergs bezeichnet, $V_{\text{Meerwasser}}$ ist das Volumen des vom Eisberg verdrängten Wassers. Auftrieb und Gewichtskraft halten sich beim Eisberg das Gleichgewicht, also:

$$G = F_A,$$

woraus mit m_{Eisberg} als Masse des Eisbergs und $m_{\text{Meerwasser}}$ als Masse des verdrängten Wassers

$$m_{\text{Eis}} = m_{\text{Wasser}}$$

folgt. Wegen $m_{\text{Eisberg}} = \rho_{\text{Eisberg}} V_{\text{Eisberg}}$ und $m_{\text{Meerwasser}} = \rho_{\text{Meerwasser}} V_{\text{Meerwasser}}$ ergibt sich wegen $G = F_A$ die Gleichung:

$$\rho_{\text{Eisberg}} V_{\text{Eisberg}} = \rho_{\text{Meerwasser}} V_{\text{Meerwasser}}$$

und damit:

$$\frac{V_{\text{Meerwasser}}}{V_{\text{Eisberg}}} = \frac{\rho_{\text{Eisberg}}}{\rho_{\text{Meerwasser}}}$$

Die Dichte von Eis beträgt $\rho_{\text{Eisberg}} = 0,917 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, die von Meerwasser $\rho_{\text{Meerwasser}} = 1,024 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Damit ist das Verhältnis des vom Eisberg verdrängten Volumens des Meerwassers zum Volumen des Eisbergs

$$\frac{V_{\text{Meerwasser}}}{V_{\text{Eisberg}}} = \frac{\rho_{\text{Eisberg}}}{\rho_{\text{Meerwasser}}} = \frac{0,917}{1,024} = 0,896.$$

D.h.: 89,6 Prozent der Eisbergmasse befindet sich unter Wasser, rund 10,4% eines Eisbergs also oberhalb des Meeresspiegels.

b) V_{Eisberg} ist wieder das Gesamtvolumen des Eisbergs, $V_{\text{Meerwasser}}$ das Volumen des vom Eisberg verdrängten Wassers. Zudem sei $\rho_{\text{Süßwasser}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ die Dichte von Süßwasser, aus dem ein Eisberg weitgehend besteht. Bei gleicher Eisbergmasse m_{Eisberg} gilt:

$$m_{\text{Eisberg}} = \rho_{\text{Eisberg}} V_{\text{Eisberg}} = \rho_{\text{Süßwasser}} V_{\text{Eisberg, geschmolzen}}$$

woraus:

$$V_{\text{Eisberg, geschmolzen}} = \frac{\rho_{\text{Eisberg}}}{\rho_{\text{Süßwasser}}} V_{\text{Eisberg}}$$

folgt. Das Volumen des geschmolzenen Eisbergs ist also:

$$V_{\text{Eisberg, geschmolzen}} = \frac{0,917}{1} V_{\text{Eisberg}} = 0,917 \cdot V_{\text{Eisberg}}$$

und macht damit 91,7 Prozent des ursprünglichen Volumens des Eisbergs aus. Nun folgt noch aus

der Beziehung: $\frac{V_{\text{Meerwasser}}}{V_{\text{Eisberg}}} = 0,896 \Rightarrow V_{\text{Meerwasser}} = 0,896 V_{\text{Eisberg}}$

die Identität:

$$V_{\text{Eisberg}} = 1,116 V_{\text{Meerwasser}}$$

Weiter befanden sich – wie gesehen – 89,6 Prozent des Eisbergvolumens unter Wasser, 10,4 Prozent des Eisbergs befanden sich oberhalb des Meeresspiegels. Ziehen wir jetzt Bilanz, so reduziert sich das Volumen des im Meerwasser befindlichen Eisbergwassers wegen der höheren Dichte

($\rho_{\text{Süßwasser}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} > \rho_{\text{Eisberg}} = 0,917 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) um $100 - 91,7 = 8,3$ Prozent, d.h. es gilt:

$$V_{-} = 0,083 \cdot 0,896 V_{\text{Eisberg}} = 0,0744 V_{\text{Eisberg}}$$

Andererseits gelangen die 10,4 Prozent des Eisbergvolumens durch das Schmelzen ins Meer, wobei dieses Volumen auch auf 91,7 Prozent des ursprünglichen Volumens abnimmt. Also:

$$V_{+} = 0,917 \cdot 0,104 V_{\text{Eisberg}} = 0,0954 V_{\text{Eisberg}}$$

Mit $V_{\text{Eisberg}} = 1,116 V_{\text{Meerwasser}}$ ergibt sich als Volumen V nach dem Abschmelzen des Eisbergs:

$$V = V_{\text{Meerwasser}} - V_{-} + V_{+} = V_{\text{Meerwasser}} - 0,0744 V_{\text{Eisberg}} + 0,0954 V_{\text{Eisberg}} = V_{\text{Meerwasser}} + 0,021 V_{\text{Eisberg}}$$

$$V_{\text{Meerwasser}} + 0,021 \cdot 1,116 V_{\text{Meerwasser}} = V_{\text{Meerwasser}} + 0,0234 V_{\text{Meerwasser}} = 1,0234 V_{\text{Meerwasser}} > V_{\text{Meerwasser}}$$

und damit eine Zunahme des Meerwasservolumens um rund 2,3 Prozent.