

Physikaufgaben

> Mechanik

> Waagerechter Wurf

Aufgabe: Ein Kraftfahrzeug der Masse 1200 kg inklusive Fahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von 144 km/h geradlinig und horizontal auf eine Brücke zu, die gerade einstürzt.

a) 50 m vor der einstürzenden Brücke leitet der Fahrer ein Bremsmanöver ein; der Gleitreibungskoeffizient der trockenen Straße beträgt $f_R = 0,9$. Bestimme die Geschwindigkeit des Kraftfahrzeugs, wenn dieses den Ort des Brückenanfangs erreicht.

b) Durch den Brückeneinsturz fallen Kraftfahrzeug und Fahrer in ein 80 m tiefes Tal. Berechne die Dauer des Absturzes, die Fahrzeuggeschwindigkeit beim Aufprall auf die Talsohle, die Entfernung zwischen Brückenanfang und Aufprallort und den Winkel, mit dem das Fahrzeug auf dem Erdboden aufschlägt.

c) Der Aufprall von Kraftfahrzeug und Insasse geschieht in einem Zeitraum von 0,2 s. Bestimme den Impuls und die Bremsbeschleunigung beim Aufprall.

(Physikalische Einheiten: h = Stunde, J = Joule, kg = Kilogramm, m = Meter, N = Newton, s = Sekunde)

Lösung: I. Mechanik ist die physikalische Lehre von den Bewegungen eines Körpers in Raum und Zeit. Geradlinige Bewegungen eines Körpers werden bestimmt von: s [m] als Weg, t [s] als Zeit, v

$[\frac{m}{s}]$ als Geschwindigkeit und a $[\frac{m}{s^2}]$ als Beschleunigung. Es gilt:

a) Gleichförmige Bewegung

$$\text{Beschleunigung: } a = 0 \frac{m}{s^2}$$

$$\text{Konstante Geschwindigkeit: } v = \frac{s}{t}, s = vt, t = \frac{s}{v}$$

b) Gleichförmig beschleunigte Bewegung:

$$\text{Konstante Beschleunigung: } a = \frac{v}{t}, v = at, t = \frac{v}{a}$$

$$\text{(Durchschnitts-) Geschwindigkeit: } \bar{v} = \frac{s}{t}, s = \bar{v}t, t = \frac{s}{\bar{v}}$$

$$\text{Weg: } s = \frac{1}{2}at^2, a = \frac{2s}{t^2}, t = \sqrt{\frac{2s}{a}}, s = \frac{1}{2}vt, v = \sqrt{2as}$$

II. Innerhalb der Mechanik definieren sich Impuls p [Hy = Ns = $\frac{kg \cdot m}{s}$], Kraft F [N = $\frac{kg \cdot m}{s^2}$], Arbeit

als Energie E [J = Nm = $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$] und Leistung P [W = $\frac{J}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$] als:

$$\text{Impuls: } p = m \cdot v, v = \frac{p}{m}$$

$$\text{Kraft: } F = m \cdot a = m \cdot \frac{v}{t} = \frac{p}{t}, a = \frac{F}{m}, p = F \cdot t$$

$$\text{Gewichtskraft: } F_G = m \cdot g, \quad g = 9,81 \frac{m}{s^2} \text{ (Erdbeschleunigung)}$$

$$\text{Gleitreibungskraft: } F_R = f_R \cdot F_G \text{ (} f_R \text{ als Gleitreibungskoeffizient)}$$

$$\text{Arbeit: } W = F \cdot s, \quad F = \frac{W}{s}$$

$$\text{Potentielle Energie: } E = W = m \cdot g \cdot h, \quad h = \frac{E}{mg} = \frac{W}{mg} \text{ (} h \text{ [m] als Höhe)}$$

$$\text{Kinetische Energie: } E = W = \frac{1}{2} m \cdot v^2, \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

$$\text{Leistung: } P = \frac{W}{t} = F \cdot v, \quad W = P \cdot t, \quad v = \frac{P}{F} = \frac{W}{F \cdot t}$$

III. Für einen waagerechten Wurf von einer Anfangshöhe y_0 gilt:

$$\text{Konstante Geschwindigkeit in horizontaler Richtung: } v_x = v_0$$

$$\text{Konstant wachsende Geschwindigkeit in vertikaler Richtung: } v_y = -gt$$

$$\text{Horizontale Richtung: } x = v_0 t, \text{ vertikale Richtung: } y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{Wurfparabel: } y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + y_0$$

$$\text{Wurfweite: } x_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2y_0}{g}}, \quad v_0 = x_W \cdot \sqrt{\frac{g}{2y_0}}, \quad \text{Wurfdauer: } t_W = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

$$\text{Geschwindigkeit bei Erreichen des Bodens: } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \text{ (mit: } v_x = v_0, v_y = g t_W \text{)}$$

$$\text{(Eintauch-) Winkel } \psi: \tan \psi = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \psi = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right)$$

IV. a) Die Masse von Kraftfahrzeug und Insasse beträgt $m = 1200 \text{ kg}$, die Geschwindigkeit des Kraftfahrzeugs $v = 144 \text{ km/h} = 40 \text{ m/s}$. Die kinetische Energie des Fahrzeugs vor dem Bremsmanöver errechnet sich als:

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1200 \text{ kg} \cdot \left(40 \frac{m}{s}\right)^2 = 960000 \text{ J.}$$

Durch das Bremsmanöver verringert sich die kinetische Energie auf Grund der Gewichtskraft

(Normalkraft) von Kraftfahrzeug und Insasse $F_G = m \cdot g = 1200 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} = 11772 \text{ N}$ und der

Gleitreibungskraft $F_R = f_R \cdot F_G = 0,9 \cdot 11772 \text{ N} = 10594,8 \text{ N}$ sowie bei einer Strecke $s = 50 \text{ m}$ um:

$$E_R = F_R \cdot s = 10594,8 \text{ N} \cdot 50 \text{ m} = 529740 \text{ J,}$$

so dass sich die restliche kinetische Energie als:

$$E = E_{\text{ges}} - E_R = 960000 \text{ J} - 529740 \text{ J} = 430260 \text{ J}$$

ergibt. Aus: $E = 430260 \text{ J} = \frac{1}{2} \cdot 1200 \text{ kg} \cdot v_0^2$ folgt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 430260 \text{ J}}{1200 \text{ kg}}} = 26,78 \frac{m}{s}$$

als Restgeschwindigkeit des Fahrzeugs am Brückenanfang. Der Fahrer bringt damit sein Fahrzeug nicht rechtzeitig vor der Brücke zum Stehen.

b) Es liegt ein waagerechter Wurf mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 26,78 \frac{m}{s}$ vor. Wegen der Tiefe des Tals von $y_0 = 80 \text{ m}$ stürzt das Kraftfahrzeug

$$t_w = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \text{ m}}{9,81 \frac{m}{s^2}}} = 4,04 \text{ s}$$

(Wurfdauer) lang zu Boden. Die Fahrzeuggeschwindigkeit entspricht horizontal der Anfangsgeschwindigkeit $v_x = v_0 = 26,78 \frac{m}{s}$, vertikal berechnet sie sich als:

$$v_y = gt = 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 4,04 \text{ s} = 39,62 \frac{m}{s}.$$

Als Gesamtgeschwindigkeit beim Aufprall ergibt sich:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(26,78 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(39,62 \frac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{2286,91} \frac{m}{s} = 47,82 \frac{m}{s}.$$

Vom Brückenanfang hat sich das Fahrzeug $x = v_0 t = v_x t = 26,78 \frac{m}{s} \cdot 4,04 \text{ s} = 107,66 \text{ m}$ in horizontaler und $y = 80 \text{ m}$ in vertikaler Richtung entfernt. Die Gesamtstrecke des Absturzes beläuft sich auf:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(107,66 \text{ m})^2 + (80 \text{ m})^2} = \sqrt{17989,73 \text{ m}^2} = 134,13 \text{ m}.$$

c) Als Impuls beim Aufprall ergibt sich mit der Masse $m = 1200 \text{ kg}$ und der Endgeschwindigkeit

$$v = 47,82 \frac{m}{s} :$$

$$p = m \cdot v = 1200 \text{ kg} \cdot 47,82 \frac{m}{s} = 57384 \text{ Hy}.$$

Mit der Aufprallzeit von $t = 0,2 \text{ s}$ und der Endgeschwindigkeit $v = 47,82 \frac{m}{s}$ folgt für die Bremsbeschleunigung:

$$a = \frac{v}{t} = \frac{47,82 \frac{m}{s}}{0,2 \text{ s}} = 239,1 \frac{m}{s^2},$$

was dem 24,37-Fachen der Erdbeschleunigung entspricht.