Michael Buhlmann

Physikaufgaben
> Mechanik
> Schiefe Ebene

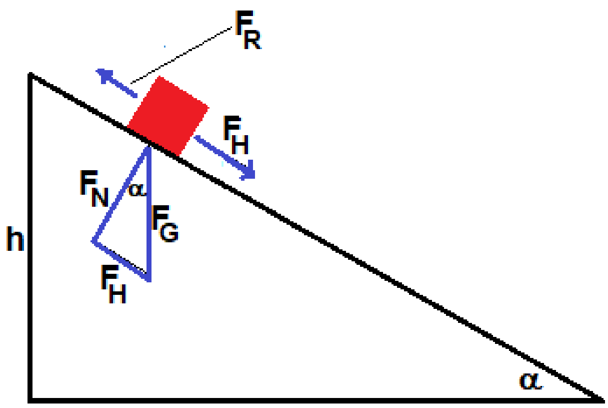
Aufgabe: Eine Rampe (schiefe Ebene) ist 12 m [m: Meter] hoch und mit einem Winkel von 15° gegen die Erdoberfläche geneigt. Eine Masse von 25 kg befindet sich am oberen Ende der Rampe.

a) Die Masse liege reibungsfrei auf der schiefen Ebene. Berechne die Hangabtriebskraft und die Normalkraft sowie die Beschleunigung, die die Masse auf der schiefen Ebene erfährt. Nach welcher Zeit hat die Masse das Ende der Rampe erreicht? Welche Geschwindigkeit hat sie dann? Stelle eine Energiebilanz des Systems der Rampe auf.

b) Unter der Bedingung der Reibungsfreiheit sind Zeitpunkt, Geschwindigkeit und zurückgelegte Strecke, wenn die Masse auf der Rampe die Höhe von 8 m erreicht hat, zu bestimmen.

c) Die Masse unterliege einer Gleitreibung mit Gleitreibungskoeffizient $\mu = 0{,}2$. Berechne Zeit und Geschwindigkeit, wenn die Masse das Ende der Rampe erreicht. Stelle eine Energiebilanz des Systems der Rampe auf.

d) Die Masse unterliege einer Gleitreibung mit unbekanntem Haftreibungskoeffizient μ. Wie hoch muss der Haftreibungskoeffizient mindestens sein, damit sich die Masse auf der Rampe nicht bewegt?



Lösung: I. Auf einer schiefen Ebene, die mit einem Winkel zur Erdoberfläche geneigt ist, liegt eine Masse, die reibungsfrei und ohne Luftwiderstand/mit Reibung und Luftwiderstand auf der schiefen Ebene herunterrutscht. Dann gilt mit m [kg: Kilogramm] als Masse, s [m: Meter] als Weg, t [s: Sekunde] als Zeit, v [$\frac{m}{s}$] als Geschwindigkeit, a [$\frac{m}{s^2}$] als Beschleunigung, g = 9,81 $\frac{m}{s^2}$ als Erdbeschleunigung, F [N = $\frac{kg \cdot m}{s^2}$: Newton] als Kraft, E [J = Nm: Joule] als Energie, μ als (Gleit-) Reibungskoeffizient, c_W als Luftwiderstandsbeiwert, ρ [$\frac{kg}{m^3}$] als Dichte des Mediums, in dem sich die Masse bewegt, A [m^2: Quadratmeter] als Querschnitt der Masse:

Fall 1: Reibungsfrei und ohne Luftwiderstand: Es gilt:

Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ [N]

Hangabtriebskraft $F_H = F_G \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha$ [N] (parallel zur schiefen Ebene)

Normalkraft $F_N = F_G \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha$ [N] (senkrecht zur schiefen Ebene)

Hangabtriebsbeschleunigung $a_H = \frac{F_H}{m} = g \cdot \sin\alpha$ [$\frac{m}{s^2}$]

Geschwindigkeit der Masse $v = a_H t$ [$\frac{m}{s}$], $t = \frac{v}{a_H}$ [s], $v = \sqrt{2a_H s}$ [$\frac{m}{s}$]

Fall 2: Mit Gleitreibung und Luftwiderstand: Es gilt:

Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ [N]

Hangabtriebskraft $F_H = F_G \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha$ [N] (parallel zur schiefen Ebene)

Normalkraft $F_N = F_G \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha$ [N] (senkrecht zur schiefen Ebene)

(Gleit-, Haft-) Reibungskraft $F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot F_G \cdot \cos\alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$ [N]

II. Die Rampe (schiefe Ebene) ist h = 12 m hoch mit einem Winkel α = 15° gegen die Erdoberfläche geneigt. Die Rampenlänge s beträgt (als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck):

$\sin\alpha = \frac{h}{s} \Leftrightarrow s = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{12m}{\sin 15°}$ = 46,36 m.

a) Die Masse m = 25 kg befindet sich am oberen Ende der Rampe. Die Gewichtskraft der Masse ist: $F_G = 25 \cdot 9{,}81$ N = 245,25 N, die Hangabtriebskraft errechnet sich als: $F_H = 245{,}25 \cdot \sin 15°$ N = 63,48 N, die Normalkraft als: $F_N = 245{,}25 \cdot \cos 15°$ N = 236,89 N. Als Hangabtriebsbeschleunigung ergibt sich: $a_H = 9{,}81 \cdot \sin 15° \frac{m}{s^2}$ = 2,54 $\frac{m}{s^2}$.

Die Masse bewegt sich reibungsfrei auf der Rampe abwärts. Sie erreicht wegen der Rampenlänge von s = 46,36 m nach der Zeit $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 46{,}36}{2{,}54}}$ s = 6,04 s das untere Ende der Rampe. Die (End-) Geschwindigkeit der Masse ist dann: $v = 2{,}54 \cdot 6{,}04$ $\frac{m}{s}$ = 15,35 $\frac{m}{s}$.

Die kinetische Energie beträgt: $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 15{,}35^2$ J = 2944 J und stellt damit die Gesamtenergie des physikalischen Systems dar. Zum Vergleich am oberen Punkt der Rampe beträgt die potentielle Energie ebenfalls: $E_{pot} = 25 \cdot 9{,}81 \cdot 12$ J = 2944 J.

b) Befindet sich die Masse auf der Rampe in einer Höhe von h = 8 m, so ist die kinetische Energie die Differenz der potentiellen Energien bei h = 12 m und h = 8 m, also: E_{kin} = 2944 J – 1963 J = 981 J. Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit bei h = 8 m als: $v = \sqrt{\frac{2 \cdot 981}{25}}\ \frac{m}{s}$ = 8,86 $\frac{m}{s}$. Der Zeitpunkt, wann die Masse die Höhe von 8 m erreicht, errechnet sich als: $t = \frac{8{,}86}{2{,}54}$ s = 3,49 s, die bis zu diesem Zeitpunkt zurückgelegte Strecke auf der Rampe als: $s = \frac{1}{2} \cdot 2{,}54 \cdot 3{,}49^2$ m = 15,45 m. Diese Strecke lässt sich auch errechnen mit Höhenunterschied von 4 m zwischen 8 m und 12 m gemäß:

$s = \frac{4}{\sin 15°}$ m = 15,45 m.

c) Es sei jetzt zusätzlich die Gleitreibungskraft der Masse bei der Abwärtsbewegung auf der Rampe berücksichtigt. Dazu sei μ = 0,2. Die Reibungskraft ergibt sich aus der Normalkraft als: $F_R = 0{,}2 \cdot 236{,}89$ N = 47,38 N. Die resultierende Kraft ist: $F_{res} = F_H - F_R$ = 16,1 N, so dass für die Beschleunigung der Masse entlang der Rampe nun gilt: $a_H = \frac{16{,}1}{25} \frac{m}{s^2}$ = 0,64 $\frac{m}{s^2}$. Die Masse braucht nun $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 46{,}36}{0{,}64}}$ s = 12,04 s, um das untere Ende der Rampe zu erreichen. Die Geschwindigkeit beträgt am unteren Ende nunmehr: $v = 0{,}64 \cdot 12{,}04\ \frac{m}{s}$ = 7,7 $\frac{m}{s}$, die kinetische Energie ist: $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 7{,}7^2$ J = 741,8 J und damit nur ein Bruchteil der durch die potentielle Energie bei h = 12 m bestimmten Gesamtenergie des physikalischen Systems E = 2944 J. Die Energiedifferenz entspricht der Energie, die durch die Reibung verloren ging.

d) Zu bestimmen ist jetzt noch die (Haft-) Reibungszahl μ, bei der sich Hangabtriebskraft F_H und Reibungskraft F_R die Waage halten. Mithin gilt in dieser Situation: F_{res} = 0 N, woraus folgt:

$$F_{res} = F_H - F_R = 0 \Leftrightarrow F_H = F_R \Leftrightarrow F_H = \mu \cdot F_N \Leftrightarrow \mu = \frac{F_H}{F_N} = \frac{63{,}48N}{236{,}89N} = 0{,}27$$

Mindestens bei diesem (Haft-) Reibungskoeffizienten bewegt sich die Masse auf der Rampe also nicht.

www.michael-buhlmann.de / 01.2023 / Aufgabe 8