Michael Buhlmann

Physik > Mechanik > Waagerechter Wurf

Innerhalb der Mechanik als Teilgebiet der Physik wird unter bestimmten Voraussetzungen gearbeitet: Die Bewegung eines Körpers im Raums wird zur Bewegung eines Massenpunktes, der Körperbewegung entgegenstehende Kräfte wie z.B. der Luftwiderstand werden vernachlässigt. Unter diesen Bedingungen gelten die Gesetzmäßigkeiten der gleichförmigen und der gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Die Geschwindigkeit v [m/s] ist dabei eine den Raum, die Strecke s [m] und die Zeit t [s] verbindende physikalische Größe (Einheiten: m = Meter, s = Sekunde).

Für die gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gilt:

$$v = \frac{s}{t},\ s = vt,\ t = \frac{s}{v}.$$

Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Beschleunigung a [m/s^2] ergibt sich:

$$a = \frac{v}{t},\ v = at,\ t = \frac{v}{a}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2,\ a = \frac{2s}{t^2},\ t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$s = \frac{1}{2}vt,\ v = \frac{2s}{t},\ t = \frac{2s}{v}$$

$$s = \frac{v^2}{2a},\ a = \frac{v^2}{2s},\ v = \sqrt{2as}\ .$$

Mit a = g = 9,81 m/s^2 folgen für die Erde als einen den Gravitationsgesetzen unterliegenden Himmelskörper die Gesetzmäßigkeiten für den freien Fall aus einer Höhe h [m]:

$$v = gt,\ t = \frac{v}{g}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2,\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$h = \frac{1}{2}vt,\ v = \frac{2h}{t},\ t = \frac{2h}{v}$$

$$h = \frac{v^2}{2g},\ v = \sqrt{2gh}\ .$$

Der Wurf eines Massenpunktes von einer bestimmten (Abwurf-) Höhe y_0 [m], $y_0 \geq 0$, unter einem bestimmten Winkel φ ($-90° \leq φ \leq 90°$) wird als schiefer Wurf mit den Spezialfällen waagerechter (φ=0°) und senkrechter Wurf nach oben (φ=90°) bzw. nach unten (φ=-90°) bezeichnet. Resultat des schiefen Wurfs ist die Bewegung des Massenpunktes entlang einer Wurfparabel, bis der Erdboden (y=0 m) erreicht wird. Dabei ergibt sich die Wurfparabel aus der konstanten (Anfangs-) Geschwindigkeit v_0 [m/s], $v_0 \geq 0$, mit der ein Massenpunkt geworfen wird, und dem freien Fall, dem der Massenpunkt unterliegt. Gleichförmige und gleichmäßig beschleunigte Bewegung überlagern sich (voneinander unbeeinflusst bei geringen Geschwindigkeiten gemäß der Newtonschen Mechanik) zur Wurfparabel. Es gelten daher mit dem Abwurfpunkt $P(0|y_0)$ im x-y-Koordinatensystem, der Zeit t ($0 \leq t \leq t_W$; t_W als Wurfdauer) und mit x = x(t) als Strecke in x-, y = y(t) als Strecke in y-Richtung beim Wurf:

$$x(t) = v_0 \cos\varphi \cdot t \text{ (horizontale Richtung)}$$

$$y(t) = v_0 \sin\varphi \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + y_0 \text{ (vertikale Richtung)}$$

sowie die Gleichung der Wurfparabel y = y(x):

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\varphi} x^2 + \tan\varphi \cdot x + y_0 .$$

Ein waagerechter Wurf (φ=0°) von einer Anfangshöhe y_0 führt auf das folgende Szenario:

$$v_x = v_0 \text{ (konstante Geschwindigkeit in horizontaler Richtung)}$$

$$v_y = -gt \text{ (konstant wachsende Geschwindigkeit in vertikaler Richtung)}$$

$$x = v_0 t \text{ (horizontale Richtung)}$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \text{ (vertikale Richtung)}$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + y_0 \text{ (Wurfparabel)}$$

$$x_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2y_0}{g}} \text{ (Wurfweite), } v_0 = x_W \cdot \sqrt{\frac{g}{2y_0}} \text{ (Anfangsgeschwindigkeit)}$$

$$t_W = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} \text{ (Wurfdauer).}$$

Liegt der Abwurfpunkt P(0|0) im Ursprung eines x-y-Koordinatensystems mit nach unten gerichteter y-Achse und Abwurfhöhe y_0, so wird im Fall des waagerechten Wurfs die Wurfparabel zu:

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2 \text{ (Wurfparabel)}$$

$$x_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2y_0}{g}} \text{ (Wurfweite), } v_0 = x_W \cdot \sqrt{\frac{g}{2y_0}} \text{ (Anfangsgeschwindigkeit)}$$

$$t_W = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} \text{ (Wurfdauer).}$$

Ist t_W die errechnete Wurfdauer, so gilt zusätzlich:

$$x_W = v_0 t_W \text{ (Wurfweite), } y_0 = \frac{1}{2} g t_W^2 \text{ (Abwurfhöhe).}$$

Für die Geschwindigkeit des Massenpunkts am Ende der Wurfparabel, also bei Erreichen des Erdbodens gilt noch:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

mit: $v_x = v_0$, $v_y = g t_W$. Der (Eintauch-) Winkel ψ, mit dem der Massenpunkt den Erdboden erreicht, berechnet sich mit:

$$\tan\psi = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \psi = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right).$$

Aufgaben: 1. Wie lange braucht ein Gegenstand, der vom Rottweil-Essener Aufzugstestturm (Höhe: 246 m) im freien Fall herunterfällt, wie groß ist seine Geschwindigkeit beim Aufprall auf dem Erdboden? Wie lange braucht der Gegenstand, wenn er mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 12 m/s waagerecht geworfen wird, wie groß ist dann die Wurfweite, mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel trifft er auf dem Erdboden auf?

Lösung: I. Es liegt ein freier Fall aus einer Anfangshöhe von y_0 = 246 m vor. Die Wurfdauer berechnet sich als: $t_W = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ = 7,08 s, die Endgeschwindigkeit als: $v = \sqrt{2gy_0}$ = 69,47 m/s = 250,1 km/h. II. Auch mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 12 m/s braucht der Gegenstand genauso lang wie beim freien Fall, also: t_W = 7,08 s. Für die Wurfweite folgt: $x_W = 12\cdot 7{,}08 = 84{,}96$ m. Die Geschwindigkeit des Gegenstands am Erdboden ist: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{12^2 + 69{,}47^2}$ = 70,5 m/s = 253,8 km/h, der Auftreffwinkel: $\psi = \tan^{-1}\left(\frac{69{,}47}{12}\right)$ = 80,2°.

2. Bei einem waagerechten Wurf beträgt die Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 5 m/s und die Abwurfhöhe y_0 = 8 m. Wann und wo erreicht der geworfene Gegenstand den Erdboden?

Lösung: Es berechnet sich mit: v_0 = 5 m/s, y_0 = 8 m die Wurfdauer: $t_W = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ = 1,28 s, die Wurfweite: $x_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ = 6,39 m.

3. Eine Masse wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 8 m/s waagerecht geworfen und erreicht am Erdboden eine Weite von 12 m. Wie groß ist die Abwurfhöhe?

Lösung: Wir betrachten den Wurf in x-Richtung und haben wegen x_W = 12 m und v_0 = 8 m/s als Wurfdauer: $t_W = x_W/v_0 = 12/8 = 1{,}5$ s. Mit g = 9,81 m/s^2 ergibt sich in y-Richtung des Wurfes als Abwurfhöhe: $y_0 = \frac{1}{2}gt_W^2$ = $0{,}5\cdot 9{,}81\cdot 1{,}5^2$ = 11,04 m.

4. Fahrer und Auto fahren mit einer Geschwindigkeit von 48 km/h über eine steile Klippe und stürzen 80 m tief. Wie weit ist ungefähr der Aufprallpunkt von der Klippe entfernt, wie hoch ist die Geschwindigkeit des Autos zum Zeitpunkt des Aufpralls?

Lösung: Es gilt: v_0 = 48:3,6 = 13,33 m/s. Die Wurfweite beträgt daher: $x_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ = 53,83 m, die Wurfdauer: $t_W = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ = 4,04 s, die Endgeschwindigkeit mit $v_x = v_0$ = 13,33 m/s und $v_y = \sqrt{2gy_0}$ = 39,62 m/s: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{13{,}33^2 + 39{,}62^2}$ = 41,8 m/s = 150,48 km/h.

5. Von einem Tisch mit 80 cm Höhe wird ein Gegenstand gerollt, der 1 m vor dem Tisch landet. Wie groß war die Anfangsgeschwindigkeit?

Lösung: Es ist y_0 = 0,8 m, x_w = 1 m, so dass hinsichtlich der Anfangsgeschwindigkeit gilt: $v_0 = x_W \cdot \sqrt{\frac{g}{2y_0}}$ = 2,48 m/s.

Literaturhinweise: Dorn Physik. Oberstufe Ausgabe A, Berlin-Darmstadt-Dortmund [16]1972, S.29-39; HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., Physik, Weinheim 2003, S.69-76.