Michael Buhlmann

Mathematik > Vektorrechnung > Dreieckskonstruktionen

Die analytische Geometrie oder Vektorrechnung stellt im Zweidimensionalen genügend Hilfsmittel bereit, um Konstruktionen beliebiger Dreiecke gemäß den Kongruenzsätzen SSS (drei Seiten), SWS (zwei Seiten, eingeschlossener Winkel), WSW (zwei [drei] Winkel, eingeschlossene Seite), SSW (zwei Seiten, ein daran anschließender Winkel) nachzuvollziehen. O.B.d.A. werde im Folgenden das beliebige Dreieck ΔABC von der Seite c mit den Ecken A und B her konstruiert.

Konstruktions-/Kongruenzsatz SSS: Gegeben sind die Seitenlängen a, b, c des Dreiecks ΔABC. Dabei liege Ecke A(0|0) im Ursprung des zweidimensionalen kartesischen x-y-Koordinatensystems, Ecke B(c|0) auf der x-Achse, c Einheiten von A entfernt. Der noch fehlende Punkt $C(c_1|c_2)$ errechnet sich analytisch aus den Beziehungen (Satz des Pythagoras):

$$b^2 = c_1^2 + c_2^2 \ (1),\ a^2 = (c - c_1)^2 + c_2^2 \ (2)$$

Subtraktion der Gleichungen (2) – (1) ergibt:

$$a^2 - b^2 = (c - c_1)^2 - c_1^2 = c^2 - 2cc_1 + c_1^2 - c_1^2 = c^2 - 2cc_1,$$

woraus durch Auflösen nach c_1 folgt:

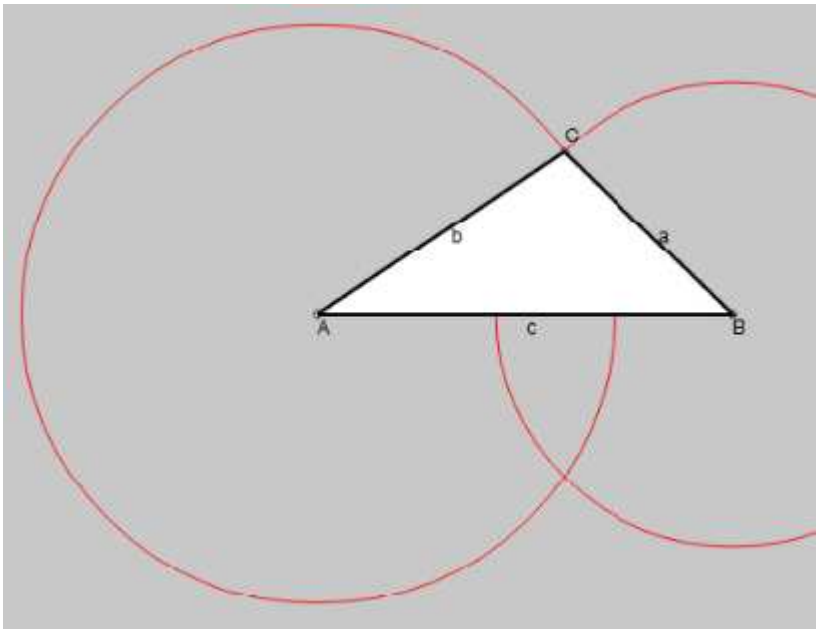
$$a^2 - b^2 = c^2 - 2cc_1 \Leftrightarrow 2cc_1 = c^2 - a^2 + b^2 \Leftrightarrow c_1 = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}$$

und weiter aus (1) für c_2:

$$b^2 = c_1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow c_2 = \sqrt{b^2 - c_1^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}\right)^2}\ .$$

Die kartesischen Koordinaten der Ecke C lauten damit:

$$C\left(\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c} \middle| \sqrt{b^2 - \left(\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}\right)^2}\right).$$



Konstruktions-/Kongruenzsatz SWS: Gegeben sei der Winkel α mit den anliegenden Seiten b und c des Dreiecks ΔABC. Dabei liege Ecke A(0|0) im Ursprung des zweidimensionalen kartesischen x-y-Koordinatensystems, Ecke B(c|0) auf der x-Achse. Zu bestimmen ist die noch fehlende Ecke $C(c_1|c_2)$ mit den Koordinaten c_1 und c_2. Wir legen durch die Ecke A eine Gerade g mit der Steigung tan(α); auf der Geraden liegt offensichtlich die Dreiecksseite b. Richtungsvektor der Geraden ist $\begin{pmatrix} 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix}$, als Einheitsvektor $\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\begin{pmatrix} 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix}$. Die Gerade geht durch A als Ursprung des Koordinatensystems und lautet:

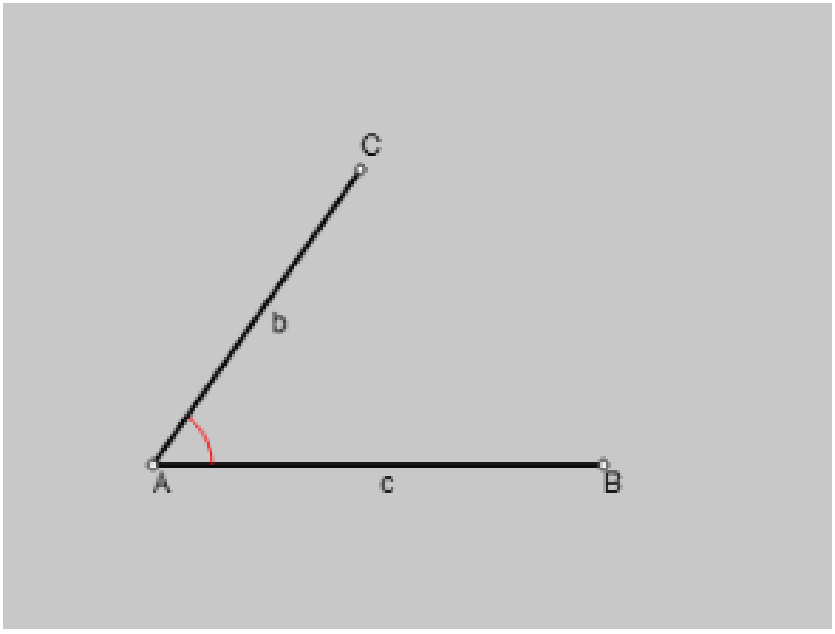
$$g: \vec{x} = \frac{t}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\begin{pmatrix} 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix}.$$

Mit t = b erhalten wir den Ortsvektor des Punktes C als:

$$\vec{OC} = \frac{b}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\begin{pmatrix} 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix},$$

der sich damit darstellen lässt als:

$$C\left(\frac{b}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \,|\, \frac{b\cdot\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\right).$$



Konstruktions-/Kongruenzsatz WSW: Gegeben sei die Seite c mit den daran anschließenden Winkeln α und β im Dreieck ΔABC. Dabei liege Ecke A(0|0) im Ursprung des zweidimensionalen kartesischen x-y-Koordinatensystems, Ecke B(c|0) auf der x-Achse. Wir ermitteln die Ecke $C(c_1|c_2)$ als Schnittpunkt zweier durch A bzw. B. laufender Geraden g und h mit der Steigung tan(α) bzw. tan(β), d.h.:

$$g: \vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix},\ h: \vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -\tan\beta \end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen der zwei Geraden ergibt:

$$r\begin{pmatrix}1\\ \tan\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ 0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\ -\tan\beta\end{pmatrix}$$

und damit das in r und s lineare Gleichungssystem:

$$\text{r = c+s (1), } r\tan\alpha=-s\tan\beta \text{ (2).}$$

Einsetzen von r = c+s (1) in Gleichung (2) führt auf:

$$(c+s)\tan\alpha=-s\tan\beta \Leftrightarrow s\tan\alpha+s\tan\beta=c-c\tan\alpha \Leftrightarrow s(\tan\alpha+\tan\beta)=c(1-\tan\alpha) \Leftrightarrow$$

$$s=\frac{c(1-\tan\alpha)}{\tan\alpha+\tan\beta}.$$

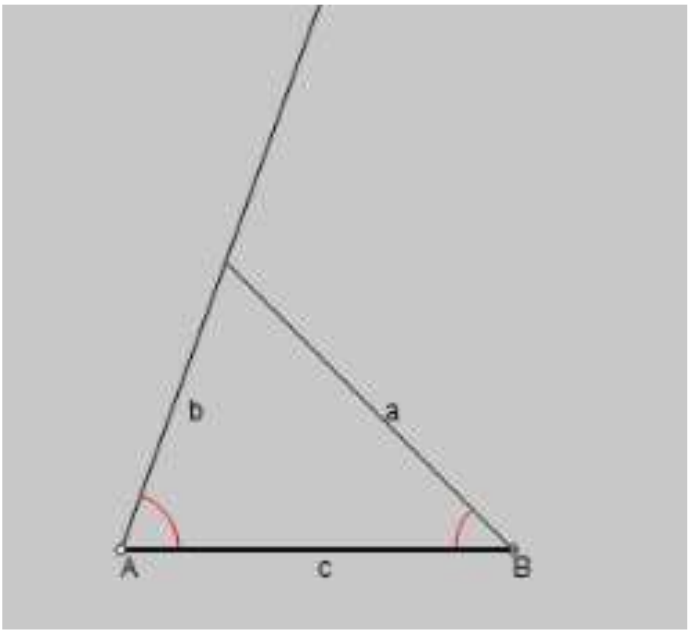
Einsetzen von $s=\frac{c(1-\tan\alpha)}{\tan\alpha+\tan\beta}$ in die Gerade h ergibt dann den gesuchten Punkt C als Ortsvektor:

$$\vec{OC}=\begin{pmatrix}c\\ 0\end{pmatrix}+\frac{c(1-\tan\alpha)}{\tan\alpha+\tan\beta}\begin{pmatrix}1\\ -\tan\beta\end{pmatrix}$$

und damit auf Grund von $c_1=c+\frac{c(1-\tan\alpha)}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{c(\tan\alpha+\tan\beta)+c(1-\tan\alpha)}{\tan\alpha+\tan\beta}=$

$\frac{c(1+\tan\beta)}{\tan\alpha+\tan\beta}$ und $c_2=\frac{c(1-\tan\alpha)}{\tan\alpha+\tan\beta}\cdot(-\tan\beta)=-\frac{c(1-\tan\alpha)\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{c(\tan\alpha-1)\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$:

$$C\left(\frac{c(1+\tan\beta)}{\tan\alpha+\tan\beta}\,|\,\frac{c(\tan\alpha-1)\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\right).$$



Konstruktions-/Kongruenzsatz SSW: Gegeben seien die Seiten b und c sowie der Winkel β im Dreieck ΔABC. Dabei liege Ecke A(0|0) im Ursprung des zweidimensionalen kartesischen x-y-Koordinatensystems, Ecke B(c|0) auf der x-Achse. Wir ermitteln die Ecke $C(c_1|c_2)$ des Dreiecks wie folgt: Die Gerade

$$\text{g: } \vec{x}=\begin{pmatrix}c\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\ -\tan\beta\end{pmatrix}$$

geht durch den Punkt B mit der Steigung tan(β). Jeder Punkt C_t auf dieser Geraden hat die Form $C_t(c+t|-t\cdot\tan(\beta))$. Wir suchen nun den Punkt bzw. (wegen der teilweisen Uneindeutigkeit des Kongruenzsatzes SSW) die Punkte C_t, die den Abstand b vom Punkt A haben. Es gilt also, äquivalent umgeformt:

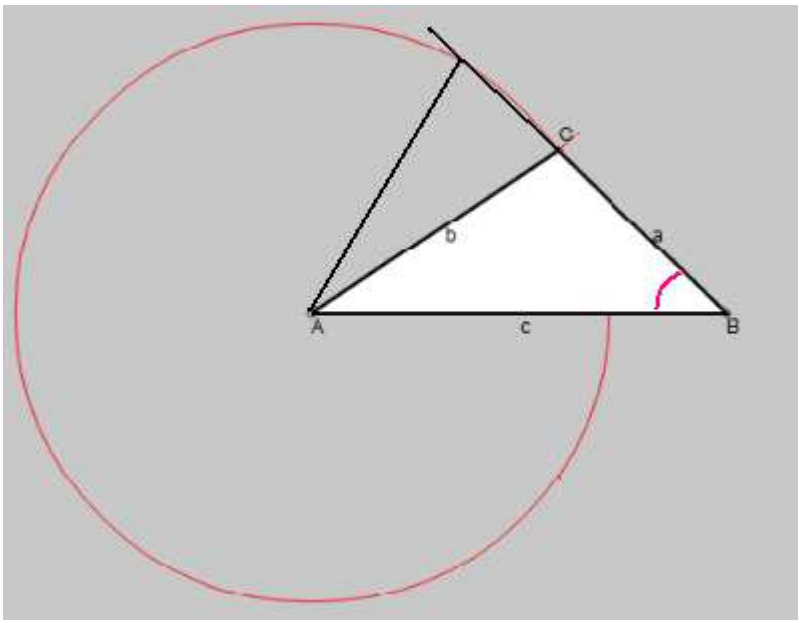
$$\left|\vec{AC}_t\right| = b \Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} c+t \\ -t\tan\beta \end{pmatrix}\right| = b \Leftrightarrow \sqrt{(c+t)^2 + t^2\tan^2\beta} = b \quad (*).$$

Gleichung (*) lösen wir nun nach t auf:

$$\sqrt{(c+t)^2 + t^2\tan^2\beta} = b \Leftrightarrow (c+t)^2 + t^2\tan^2\beta = b^2 \Leftrightarrow$$
$$c^2 + 2ct + t^2 + t^2\tan^2\beta = b^2 \Leftrightarrow c^2 + 2ct + t^2(1+\tan^2\beta) = b^2 \Leftrightarrow$$
$$t^2(1+\tan^2\beta) + 2ct + c^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-2c \pm \sqrt{4c^2 - 4(1+\tan^2\beta)(c^2-b^2)}}{2(1+\tan^2\beta)}$$

mit Parameter: $t = \frac{-2c \pm \sqrt{4c^2 - 4(1+\tan^2\beta)(c^2-b^2)}}{2(1+\tan^2\beta)} = \frac{-2c \pm \sqrt{4b^2 + 4\tan^2\beta(b^2-c^2)}}{2(1+\tan^2\beta)} = \frac{-c \pm \sqrt{b^2 + \tan^2\beta(b^2-c^2)}}{1+\tan^2\beta}$. Je nach Radikand $R = b^2 + \tan^2\beta(b^2-c^2)$ gibt es keine (R<0), eine (R=0) oder zwei Lösungen (R>0) für t. Wir erhalten auf Grund von:

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-c \pm \sqrt{b^2 + \tan^2\beta(b^2-c^2)}}{1+\tan^2\beta}\begin{pmatrix} 1 \\ -\tan\beta \end{pmatrix}$$

für eine (oder zwei) Ecke(n) C die Koordinatendarstellung:

$$C\left(\frac{c\tan^2\beta \pm \sqrt{b^2 + \tan^2\beta(b^2-c^2)}}{1+\tan^2\beta} \,|\, \frac{c\tan\beta \mp \tan\beta\sqrt{b^2 + \tan^2\beta(b^2-c^2)}}{1+\tan^2\beta}\right).$$