

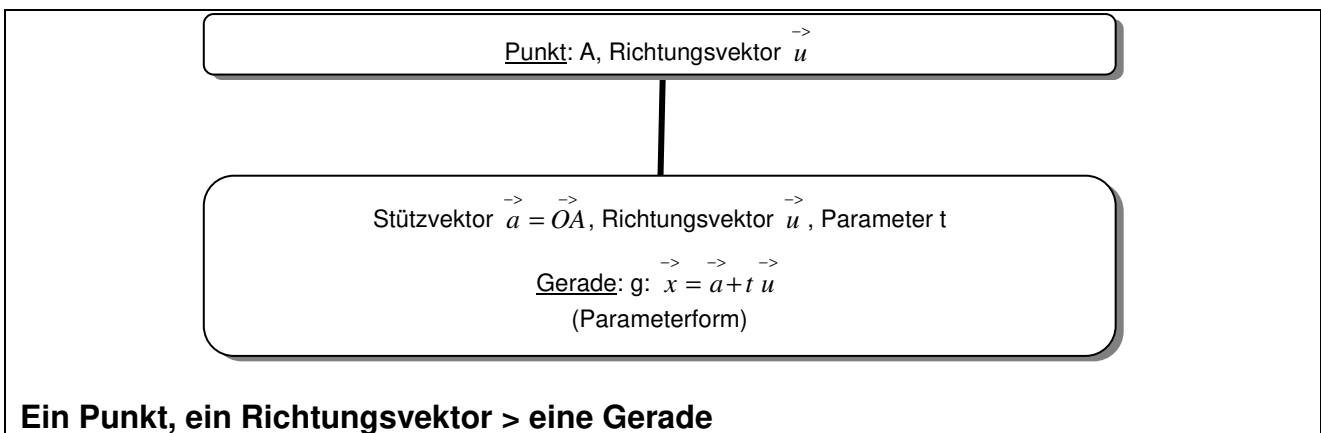
Mathematik > Vektorrechnung > Konstruktion von Geraden und Ebenen

Einleitung

Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ lassen sich im dreidimensionalen reellen Vektorraum \mathbf{R}^3 identifizieren mit Ortsvektoren \vec{OP} (mit: $O(0|0|0)$ als Koordinatenursprung), Linearkombinationen von Vektoren sind Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$, $g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + s \vec{u}_1$, $g_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + t \vec{u}_2$ und Ebenen $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$, $E_1: \vec{x} = \vec{b}_1 + r \vec{v}_1 + s \vec{w}_1$, $E_2: \vec{x} = \vec{b}_2 + t \vec{v}_2 + u \vec{w}_2$ (mit Stützvektoren, Richtungs- und Spannvektoren sowie den reellen Parametern). Geraden liegen nur in Parameterform vor, bei den Ebenen ergeben sich die Formen: $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (Parameterform), $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ (Normalenform), $E: \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} - \vec{p} \\ \end{pmatrix} = 0$ (Hesse'sche Normalenform), $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (Koordinatenform) (unter Beachtung des Skalar- und Kreuzprodukts zwischen den Vektoren).

Es gilt dann für die Konstruktion von Geraden und Ebenen: 2 Punkte -> 1 Gerade; 1 Gerade; 1 Punkt (außerhalb der Geraden) -> 1 zur Gerade parallele Gerade; 1 Punkt (außerhalb der Geraden) -> 1 zur Gerade senkrechte Gerade; 3 Punkte -> 1 Ebene; 1 Gerade, 1 Punkt (außerhalb der Geraden) -> 1 Ebene; 2 (sich schneidende, parallele) Geraden -> 1 Ebene; 1 Punkt, 1 Ebene -> 1 zur Ebene senkrechte Gerade; 1 Gerade, 1 Ebene -> 1 zur Ebene senkrechte Ebene; Ebene in Parameter-, Normalen-, Hesse'scher Normalen-, Koordinatenform

Geraden



Punkte: A, B

Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$, Parameter t

Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t \vec{AB} = \vec{a} + t \vec{u}$
(Parameterform)

Zwei Punkte > eine Gerade

Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$, Punkt: $P \notin g$ mit: $\vec{p} = \vec{OP}$

Zur Geraden g parallele Gerade: h: $\vec{x} = \vec{OP} + s \vec{u}$
(Parameterform)

Eine Gerade, ein Punkt > eine zur Gerade parallele Gerade

Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$, Punkt: $P \notin g$ mit: $\vec{p} = \vec{OP}$

Lotpunkt P_L mit: $\vec{P_L P} \cdot \vec{u} = 0$

Stützvektor $\vec{b} = \vec{OP_L}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{P_L P}$, Parameter s

Zur Geraden g senkrechte Gerade: h: $\vec{x} = \vec{OP_L} + s \vec{P_L P} = \vec{b} + s \vec{v}$
(Parameterform)

Eine Gerade, ein Punkt > eine zur Gerade senkrechte Gerade

Ebene: $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$, Punkt: P mit: $\vec{p} = \vec{OP}$

Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$
Parameter t

Gerade: $g: \vec{x} = \vec{p} + t \vec{n}$ mit $g \perp E$
(Parameterform)

Ein Punkt, eine Ebene > eine zur Ebene senkrechte Gerade

Ebenen

Punkte: $A(a_1|a_2|a_3)$, $B(b_1|b_2|b_3)$, $C(c_1|c_2|c_3)$

Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$

Richtungs-/Spannvektoren $\vec{v} = \vec{AB}$, $\vec{w} = \vec{AC}$
Parameter r, s

Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$
 $= \vec{a} + r \vec{v} + s \vec{w}$
(Parameterform)

LGS:

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 1 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 1 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 1 \end{cases}$$

Ebene: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
(Koordinatenform)

Drei Punkte > eine Ebene

Gerade: $g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$, Punkt: $P \notin g$ mit: $\vec{p} = \vec{OP}$

Stützvektor \vec{a}
 Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}, \vec{v} = \vec{p} - \vec{a}$
 Parameter t, u

Ebene: $E: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u} + u \vec{v}$
 (Parameterform)

Eine Gerade, ein Punkt > eine Ebene

Zwei sich schneidende Geraden:

$g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + s \vec{u}_1, g_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + t \vec{u}_2$

Schnittpunkt S: $g_1 \cap g_2 = \{S\}$

mit: $P(p_1|p_2|p_3), Q(q_1|q_2|q_3) \in g_1, R(r_1|r_2|r_3) \in g_2$

Stützvektor $\vec{b} = \vec{OS}$
 Richtungs-/Spannvektoren \vec{u}_1, \vec{u}_2
 Parameter s, t

Ebene: $E: \vec{x} = \vec{b} + s \vec{u}_1 + t \vec{u}_2$

(Parameterform)

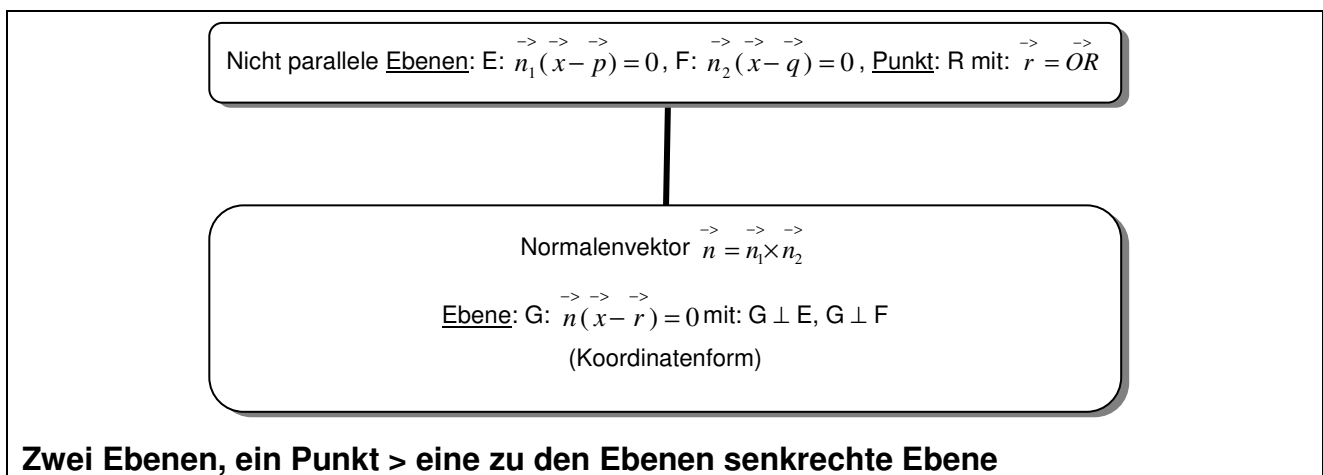
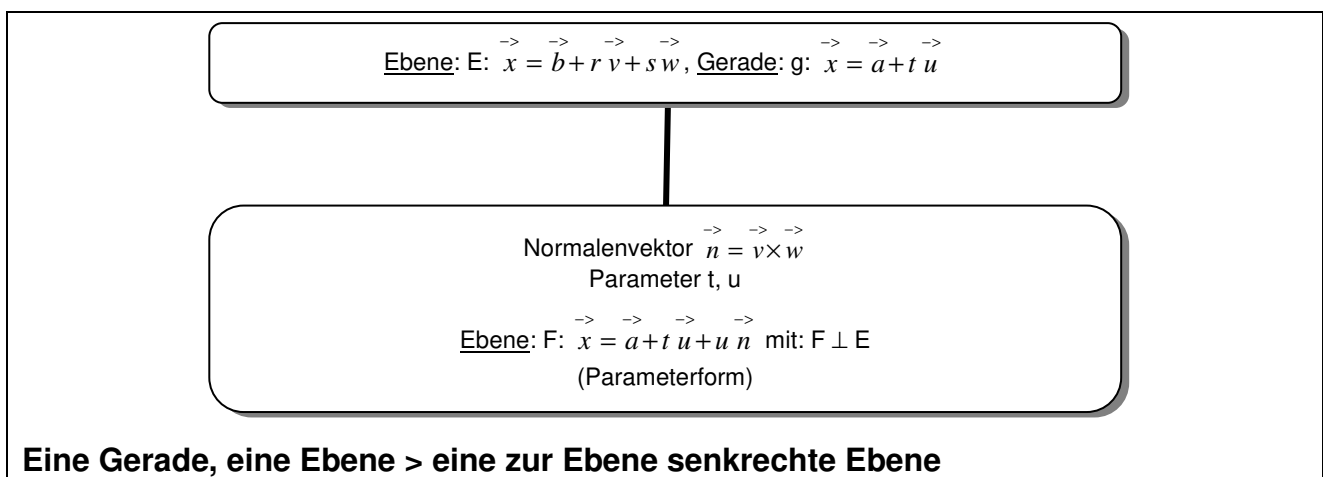
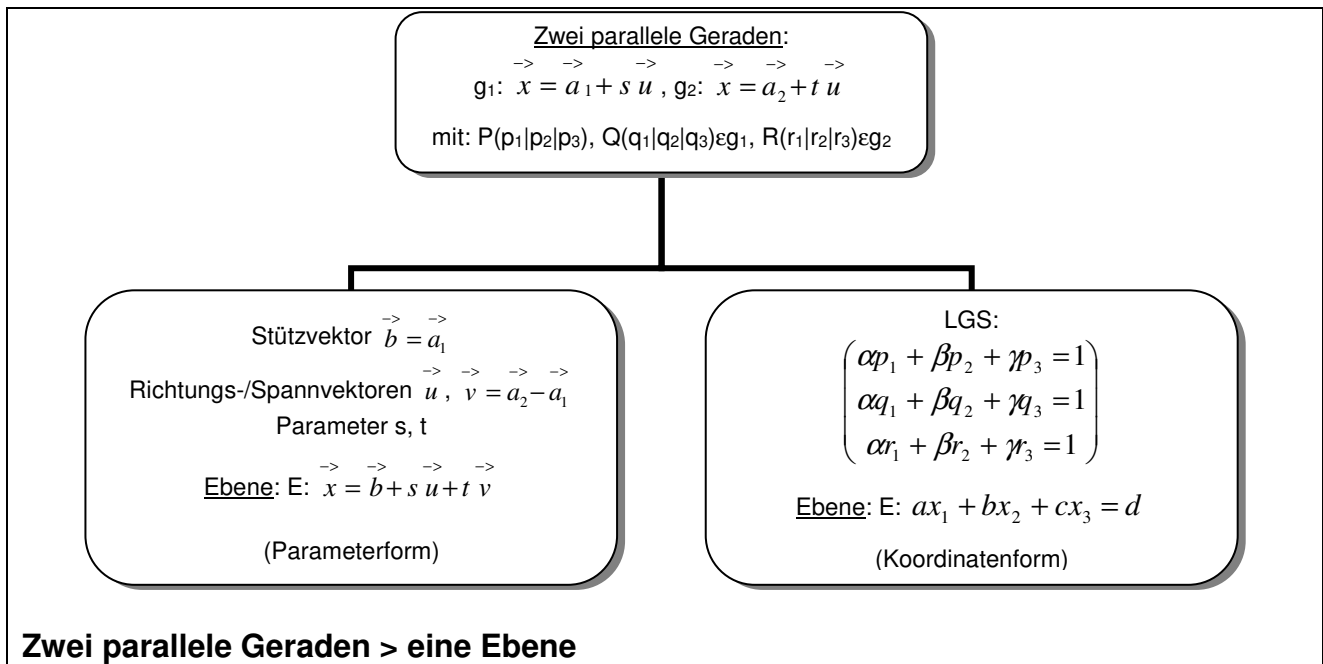
LGS:

$$\begin{cases} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{cases}$$

Ebene: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

(Koordinatenform)

Zwei sich schneidende Geraden > eine Ebene



Ebene: $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$
 mit: Stützvektor \vec{b} , Richtungs-/Spannvektoren \vec{v}, \vec{w} ,
 Parametern r, s
 (Parameterform)

Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$, Stützvektor $\vec{p} = \vec{b}$
Ebene: $E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{p}) = 0$
 (Normalenform)

Normalenvektor \vec{n} , normiert als $\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$
Ebene: $E: \vec{n}^0(\vec{x} - \vec{b}) = 0$
 (Hesse'sche Normalenform)

Normalenvektor $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$ mit: $\vec{n} \cdot \vec{x} = ax_1 + bx_2 + cx_3$
 Punkt $P \in E$ mit: $\vec{p} = \vec{OP}$, $d = \vec{n} \cdot \vec{p}$
Ebene: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
 (Koordinatenform)

Normalenvektor $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$
Ebene: $E: \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$
 (Hesse'sche Normalenform)

LGS:

$$\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ x_2 = r \\ x_3 = s \end{pmatrix}$$
Ebene: $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$
 (Parameterform)

Ebene in Parameter-, Normalen-, Hesse'sche Normalen-, Koordinatenform