Michael Buhlmann

Mathematik > Vektorrechnung > Konstruktion von Geraden und Ebenen

---

<u>Einleitung</u>

<u>Punkte</u> $P(p_1|p_2|p_3)$ lassen sich im dreidimensionalen reellen Vektorraum $\mathbf{R}^3$ identifizieren mit Ortsvektoren $\vec{OP}$ (mit: $O(0|0|0)$ als Koordinatenursprung), Linearkombinationen von Vektoren sind <u>Geraden</u> g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$, g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$, g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ und <u>Ebenen</u> E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$, E_1: $\vec{x} = \vec{b}_1 + r\,\vec{v}_1 + s\,\vec{w}_1$, E_2: $\vec{x} = \vec{b}_2 + t\,\vec{v}_2 + u\,\vec{w}_2$ (mit Stützvektoren, Richtungs- und Spannvektoren sowie den reellen Parametern). Geraden liegen nur in Parameterform vor, bei den Ebenen ergeben sich die Formen: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (Parameterform), E: $\vec{n}\left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0$ (Normalenform), E: $\vec{n}^{\,0}\left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0$ (Hesse'sche Normalenform), E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (Koordinatenform) (unter Beachtung des Skalar- und Kreuzprodukts zwischen den Vektoren).

Es gilt dann für die <u>Konstruktion</u> von Geraden und Ebenen: 2 Punkte -> 1 Gerade; 1 Gerade; 1 Punkt (außerhalb der Geraden) -> 1 zur Gerade parallele Gerade; 1 Punkt (außerhalb der Geraden) -> 1 zur Gerade senkrechte Gerade; 3 Punkte -> 1 Ebene; 1 Gerade, 1 Punkt (außerhalb der Geraden) -> 1 Ebene; 2 (sich schneidende, parallele) Geraden -> 1 Ebene; 1 Punkt, 1 Ebene -> 1 zur Ebene senkrechte Gerade; 1 Gerade, 1 Ebene -> 1 zur Ebene senkrechte Ebene; Ebene in Parameter-, Normalen-, Hesse'scher Normalen-, Koordinatenform

<u>Geraden</u>

<u>Punkt</u>: A, Richtungsvektor $\vec{u}$

Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u}$, Parameter t

<u>Gerade</u>: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

(Parameterform)

Ein Punkt, ein Richtungsvektor > eine Gerade

Punkte: A, B

Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$, Parameter t

Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{AB} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

(Parameterform)

Zwei Punkte > eine Gerade

Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$, Punkt: P$\notin$g mit: $\vec{p} = \vec{OP}$

Zur Geraden g parallele Gerade: h: $\vec{x} = \vec{OP} + s\,\vec{u}$

(Parameterform)

Eine Gerade, ein Punkt > eine zur Gerade parallele Gerade

Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$, Punkt: P$\notin$g mit: $\vec{p} = \vec{OP}$

Lotpunkt P_L mit: $\vec{P_L P} \cdot \vec{u} = 0$

Stützvektor $\vec{b} = \vec{OP_L}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{P_L P}$, Parameter s

Zur Geraden g senkrechte Gerade: h: $\vec{x} = \vec{OP_L} + s\,\vec{P_L P} = \vec{b} + s\,\vec{v}$

(Parameterform)

Eine Gerade, ein Punkt > eine zur Gerade senkrechte Gerade

Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$, Punkt: P mit: $\vec{p} = \vec{OP}$

Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$

Parameter t

Gerade: g: $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{n}$ mit g $\perp$ E

(Parameterform)

Ein Punkt, eine Ebene > eine zur Ebene senkrechte Gerade

Ebenen

Punkte: A($a_1|a_2|a_3$), B($b_1|b_2|b_3$), C($c_1|c_2|c_3$)

Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$

Richtungs-/Spannvektoren $\vec{v} = \vec{AB}$, $\vec{w} = \vec{AC}$

Parameter r, s

Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC}$

$= \vec{a} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$

(Parameterform)

LGS:

$$\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 1 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 1 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 1 \end{pmatrix}$$

Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

(Koordinatenform)

Drei Punkte > eine Ebene

Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$, Punkt: $P \notin g$ mit: $\vec{p} = \vec{OP}$

Stützvektor $\vec{a}$

Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}$, $\vec{v} = \vec{p} - \vec{a}$

Parameter t, u

Ebene: E: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u} + u\vec{v}$

(Parameterform)

Eine Gerade, ein Punkt > eine Ebene

Zwei sich schneidende Geraden:

g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$, g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$

Schnittpunkt S: $g_1 \cap g_2 = \{S\}$

mit: $P(p_1|p_2|p_3)$, $Q(q_1|q_2|q_3) \varepsilon g_1$, $R(r_1|r_2|r_3) \varepsilon g_2$

Stützvektor $\vec{b} = \vec{OS}$

Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$

Parameter s, t

Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2$

(Parameterform)

LGS:

$$\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix}$$

Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

(Koordinatenform)

Zwei sich schneidende Geraden > eine Ebene

Zwei parallele Geraden:

g$_1$: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}$, g$_2$: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}$

mit: P(p_1|p_2|p_3), Q(q_1|q_2|q_3)εg$_1$, R(r_1|r_2|r_3)εg$_2$

Stützvektor $\vec{b} = \vec{a}_1$

Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}$, $\vec{v} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$

Parameter s, t

Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$

(Parameterform)

LGS:

$$\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix}$$

Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

(Koordinatenform)

Zwei parallele Geraden > eine Ebene

Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$, Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$

Parameter t, u

Ebene: F: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u} + u\,\vec{n}$ mit: F ⊥ E

(Parameterform)

Eine Gerade, eine Ebene > eine zur Ebene senkrechte Ebene

Nicht parallele Ebenen: E: $\vec{n}_1(\vec{x} - \vec{p}) = 0$, F: $\vec{n}_2(\vec{x} - \vec{q}) = 0$, Punkt: R mit: $\vec{r} = \vec{OR}$

Normalenvektor $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

Ebene: G: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{r}) = 0$ mit: G ⊥ E, G ⊥ F

(Koordinatenform)

Zwei Ebenen, ein Punkt > eine zu den Ebenen senkrechte Ebene

Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$

mit: Stützvektor $\vec{b}$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$, Parametern r, s

(Parameterform)

Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$, Stützvektor $\vec{p} = \vec{b}$

Ebene: E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{p}) = 0$

(Normalenform)

Normalenvektor $\vec{n}$, normiert als $\vec{n}^{\,0} = \vec{n} / |\vec{n}|$

Ebene: E: $\vec{n}^{\,0}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$

(Hesse'sche Normalenform)

Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$ mit: $\vec{n}\,\vec{x} = ax_1 + bx_2 + cx_3$

Punkt PεE mit: $\vec{p} = \vec{OP}$, $d = \vec{n}\,\vec{p}$

Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

(Koordinatenform)

Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$

Ebene: E: $\dfrac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$

(Hesse'sche Normalenform)

LGS:

$$\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ x_2 = r \\ x_3 = s \end{pmatrix}$$

Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$

(Parameterform)

Ebene in Parameter-, Normalen-, Hesse'sche Normalen-, Koordinatenform