Mathematik > Vektorrechnung > Winkel

Einleitung

Zur Beschreibung von Lagebeziehungen zwischen Vektoren, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Vektorraum werden neben den Abständen (unter Voraussetzung von Parallelität) auch (bei Nichtparallelität) Winkel verwendet. Grundlage der Winkelberechnung (in Grad: °) ist das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ mit

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

vermöge der Umstellung:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (*)$$

als Grundformel zur Winkelberechnung. Ist cosφ negativ, so liegt ein stumpfer Winkel φ mit 90° < φ < 180° vor. Bei cosφ = 0 stehen die Vektoren senkrecht aufeinander (Orthogonalität). Ist cosφ positiv, so ergibt sich für φ ein spitzer Winkel 0° < φ < 90°.

Winkel im Dreieck

Drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen, bilden immer ein Dreieck ΔABC mit den Winkeln α, β, γ zwischen den jeweiligen Differenzvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, die für die Seiten des Dreiecks stehen. Unter Beachtung, dass die Grundformel (*) den zwischen zwei Seitenvektoren liegenden Winkel nur dann korrekt wiedergibt, wenn die Seitenvektoren an der ihnen gemeinsamen Ecke beginnen oder enden, gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} \text{ -> } \alpha, \quad \cos\beta = -\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} \text{ -> } \beta, \quad \cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} \text{ -> } \gamma$$

mit der Winkelsumme im Dreieck: α + β + γ = 180° (α = 180°–β–γ, β = 180°–α–γ, γ = 180°–α–β). Winkel im Dreieck können auch stumpfe Winkel sein.

Schnittwinkel

Wenn sich Geraden, Geraden und Ebenen oder Ebenen schneiden, so folgt aus deren Nichtparallelität zunächst die Existenz eines Schnittpunktes oder einer Schnittgeraden. Als Schnittwinkel wird der spitze Winkel φ mit 0° ≤ φ ≤ 90° zwischen den sich schneidenden geometrischen Objekten Gerade-Gerade, Gerade-Ebene, Ebene-Ebene an den Schnittmengen bezeichnet. Schnittwinkel sind also immer die kleineren Winkel zwischen den Objekten (Winkel, Nebenwinkel). Um dies zu gewährleisten, wird in der Grundformel (*) das Skalarprodukt im Zähler des Bruchs mit dem Betrag versehen. Die Vektoren in der Grundformel sind die Richtungs- und Normalenvektoren der Geraden und Ebenen. Außerdem ist bei der Berechnung des Schnittwinkels zwischen Geraden und Ebenen zu beachten, dass der Normalenvektor der Ebene gegenüber der Ebene um 90° gedreht ist, wodurch die Kosinusfunktion in der Grundformel (*) durch den Sinus zu ersetzen ist. Es ergibt sich die folgende Vorgehensweise bei der Schnittwinkelberechnung:

Voraussetzung	**Winkel**
	Kosinus-Formel ->
Schnittwinkel φ zwischen zwei sich schneidenden Geraden g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$ und g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$	$\cos\varphi = \frac{\left\|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\right\|}{\left\|\vec{u}_1\right\| \cdot \left\|\vec{u}_2\right\|}$
Schnittwinkel φ zwischen zwei sich schneidenden Ebenen E_1: $\vec{n}_1 \vec{x} = d_1$ (NF) und E_2: $\vec{n}_2 \vec{x} = d_2$ (NF)	$\cos\varphi = \frac{\left\|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right\|}{\left\|\vec{n}_1\right\| \cdot \left\|\vec{n}_2\right\|}$
	Sinus-Formel ->
Schnittwinkel φ zwischen einer Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ und einer Ebene E: $\vec{n}\vec{x} = d$ (NF)	$\sin\varphi = \frac{\left\|\vec{u} \cdot \vec{n}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{n}\right\|}$

(NF = Normalform)

Beispiele:

a) Im Dreieck ΔABC mit A(3|1|-1), B(0|2|0), C(0|2|4) sind die Differenzvektoren: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

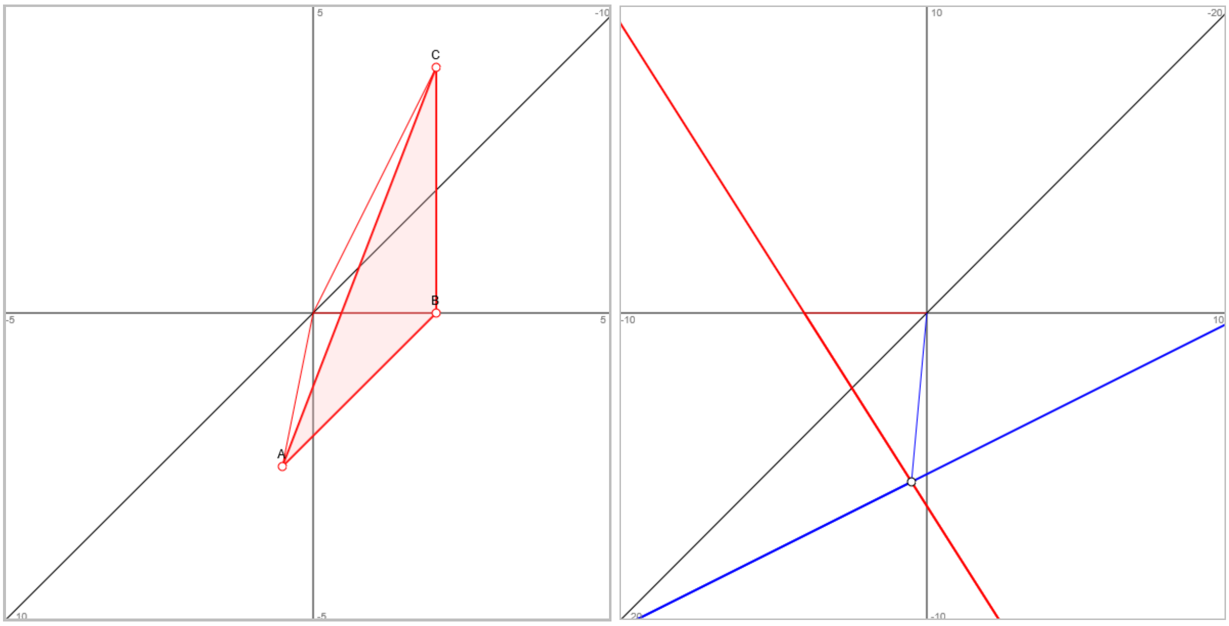
$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und damit die Winkel:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{15}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{35}} = 0{,}7645 \Rightarrow \alpha = 40{,}14°$$

$$\cos\beta = -\frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = -\frac{4}{\sqrt{11} \cdot 4} = -0{,}3015 \Rightarrow \beta = 107{,}55°$$

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{20}{\sqrt{35}\cdot 4} = 0{,}3015 \Rightarrow \gamma = 32{,}31°.$$

Die Winkelsumme beträgt: 40,14° + 107,55° + 32,31° = 180°, das Dreieck ist stumpfwinklig.



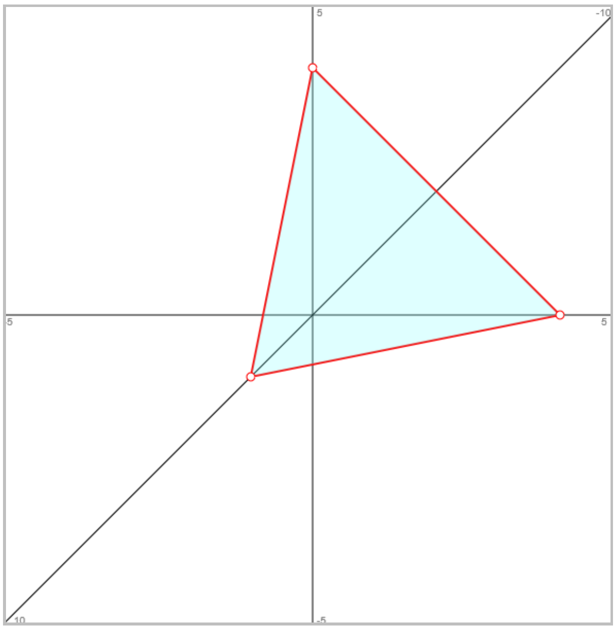
b) Die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\-1\\1\end{pmatrix}$ schneiden sich im Schnittpunkt S(3|1|-4) (r=1, s=0). Der Schnittwinkel φ errechnet sich mit den Richtungsvektoren der Geraden als:

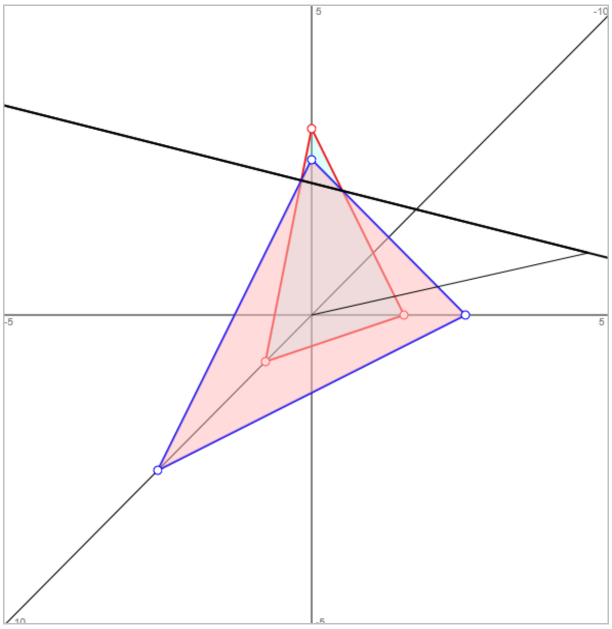
$$\cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}6\\-1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-3|}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{38}} = 0{,}0751 \Rightarrow \varphi = 85{,}69°.$$

c) Die Ebene E: $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$ schneidet die Achsen des Koordinatensystems in den Spurpunkten $S_1(2|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|4)$ unter den Schnittwinkeln φ_1, φ_2, φ_3; die Achsen sind dabei die Geraden g_1: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (x_1-Achse), g_2. $\vec{x} = s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (x_2-Achse), g_3: $\vec{x} = t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (x_3-Achse). Die Schnittwinkel sind die Winkel zwischen Gerade und Ebene und berechnen sich somit mit Richtungs- und Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ und unter Verwendung des Sinus wie folgt:

$$\sin\varphi_1 = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|2|}{1\cdot\sqrt{6}} = 0{,}8165 \Rightarrow \varphi_1 = 54{,}74°$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \sin\varphi_3 = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|1|}{1\cdot\sqrt{6}} = 0{,}4082 \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_3 = 24{,}09°.$$





d) Die zwei Ebenen E: $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$ und F: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$ schneiden sich in der Schnittgeraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\3{,}5\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$. Der Schnittwinkel φ zwischen den Ebenen errechnet sich auf der Grundlage der Normalenvektoren $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{n}_F = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ als:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right|} = \frac{|8|}{3\cdot 3} = 0{,}8889 \Rightarrow \varphi = 27{,}27°.$$