

Grundlagen

Lineare Gleichungssysteme: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & & b_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * & * & \dots & * & & * \\ 0 & * & \dots & * & & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a \neq 0 & \rightarrow 1 \text{ Lsg.} \\ a = 0, b \neq 0 \rightarrow 0 \text{ Lsg.} \\ a = 0, b = 0 \rightarrow u.v. \text{ Lsg.} \end{cases}$	
Nullvektor: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Punkt A(a ₁ a ₂ a ₃), Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$	Ortsvektor: $\vec{a} = \vec{OA}$ Länge, Betrag: $ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \frac{1}{ \vec{a} } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$	Differenzvektor: $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ Linearkombination: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix},$ $r \vec{a} = r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix},$ Gegenvektor: $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix},$ Mitte: $\vec{OM} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{a_1 + b_1}{2} \\ \frac{a_2 + b_2}{2} \\ \frac{a_3 + b_3}{2} \end{pmatrix}$ Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ Kreuzprodukt, Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ Spatprodukt: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{a} \times \vec{b} \end{pmatrix} \cdot \vec{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3$

Konstruktionen

Voraussetzung	Konstruktion
Punkt A, Richtungsvektor \vec{u}	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor \vec{u} , Parameter t -> Gerade: g: $x = a + t u$ (PF)
Punkte A, B	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$, Parameter t -> Gerade: g: $x = \vec{OA} + t \vec{AB} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF)
Gerade g ₁ : $x = \vec{a}_1 + s \vec{u}_1$ (PF) Punkt A \notin g ₁	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{u}_1$, Parameter t -> Gerade: g: $x = \vec{OA} + t \vec{u} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF) als zu g ₁ parallele Gerade durch den Punkt A (g \parallel g ₁)
Gerade g ₁ : $x = \vec{a}_1 + s \vec{u}_1$ (PF) Punkt A \notin g ₁	Lotfußpunkt F \in g ₁ mit: $\vec{AF} \cdot \vec{u} = 0$, Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AF}$, Parameter t -> Gerade: g: $x = \vec{OA} + t \vec{AF} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF) als zu g ₁ senkrechte Gerade durch den Punkt A (g \perp g ₁)
Geraden g: $x = \vec{a} + t \vec{u}$ \parallel h: $x = \vec{b} + t \vec{u}$ (PF)	Mitte $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ -> Mittelparallele k: $x = \vec{OM} + t \vec{u}$ (PF) (k \parallel g \parallel h)
Ebene E: $x = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF) bzw. E: $n(x - \vec{b}) = 0$ ($n = v \times w$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($n = (a \ b \ c)^T$) (KF), Punkt A	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{n}$, Parameter t -> Gerade: g: $x = \vec{OA} + t \vec{n} = \vec{a} + t \vec{n}$ (PF) als zu E senkrechte Gerade durch den Punkt A (g \perp E)

Geradenkonstruktionen

Voraussetzung	Konstruktion
Punkt A, Richtungsvektoren \vec{v}, \vec{w}	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektoren \vec{u}, \vec{v} , Parameter r, s -> Ebene: E: $x = \vec{OA} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF)
Punkte A(a ₁ a ₂ a ₃), B(b ₁ b ₂ b ₃), C(c ₁ c ₂ c ₃)	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AB}$, $\vec{w} = \vec{AC}$, Parameter r, s -> Ebene: E: $x = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF); Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 1 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 1 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit O(0 0 0) \notin E)
Gerade g: $x = \vec{a} + s \vec{u}$ (PF) Punkt P \notin g	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AP}$, Parameter t -> Ebene: E: $x = \vec{a} + s \vec{u} + t \vec{v}$ (PF)
Gerade g: $x = \vec{a} + s \vec{u}$ (PF) Punkt P	Ebene: E: $\vec{u}(x - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Gerade g senkrechte Ebene durch den Punkt P (E \perp g)
Gerade g ₁ : $x = \vec{a}_1 + s \vec{u}_1$ (PF), Gerade g ₂ : $x = \vec{a}_2 + t \vec{u}_2$ (PF), Schnittpunkt S (g ₁ \cap g ₂ = {S}), Punkte P(p ₁ p ₂ p ₃), Q(q ₁ q ₂ q ₃) \in g ₁ , R(r ₁ r ₂ r ₃) \in g ₂	Stützvektor $\vec{b} = \vec{OS}$, Richtungs-/Spannvektoren \vec{u}_1, \vec{u}_2 , Parameter s, t -> Ebene: E: $x = \vec{b} + s \vec{u}_1 + t \vec{u}_2$ (PF); LGS: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit O(0 0 0) \notin E)

<p>Gerade $g_1: \vec{x} = a_1 + s \vec{u}_1$ (PF), Gerade $g_2: \vec{x} = a_2 + t \vec{u}_2$ (PF), $g_1 \parallel g_2, g_1 \cap g_2 = \{\}$, Punkte $P(p_1 p_2 p_3), Q(q_1 q_2 q_3) \in g_1$, $R(r_1 r_2 r_3) \in g_2$</p>	<p>Stützvektor $\vec{b} = \vec{a}_1$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}, \vec{v} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$, Parameter $s, t \rightarrow$ Ebene: $E: \vec{x} = \vec{b} + s \vec{u} + t \vec{v}$</p> <p>LGS: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix} \rightarrow$</p> <p>Ebene: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0 0 0) \notin E$)</p>
<p>E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Punkt P, Normalenvektor $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$</p>	<p>Ebene: $F: \vec{n}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Ebene E parallele Ebene durch den Punkt P ($F \parallel E$)</p>
<p>E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Abstand D, Normalenvektor $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$</p>	<p>$F_1: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d - \left \vec{n} \right D, F_2: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d + \left \vec{n} \right D$ als zur Ebene E parallele Ebenen im Abstand D ($F_1 \parallel F_2 \parallel E$)</p>
<p>Ebene: $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF), bzw. $E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF), Punkte A, B</p>	<p>Normalenvektor \vec{n}, Parameter t, u \rightarrow Ebene: $F: \vec{x} = \vec{OA} + t \vec{AB} + u \vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Punkte A, B ($F \perp E$)</p>
<p>Ebene: $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF), bzw. $E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF), Gerade: $g: \vec{x} = a + t \vec{u}$ (PF)</p>	<p>Normalenvektor \vec{n}, Parameter t, u \rightarrow Ebene: $F: \vec{x} = a + t \vec{u} + u \vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Gerade g ($F \perp E$)</p>

Ebenenkonstruktionen

<p>$E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{u} + s \vec{v}$ (PF) $\rightarrow \vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} \rightarrow E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (NF) $\rightarrow E: \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{b} \rightarrow E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)</p>
<p>$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) \rightarrow LGS: $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ x_2 = r \\ x_3 = s \end{pmatrix} \rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (PF)</p>
<p>$E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (NF) $\rightarrow E: \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{b} \rightarrow E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)</p>
<p>$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF) $\rightarrow E: \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$ (HNF)</p>

Ebene in Parameter-, Normalen-, Koordinatenform

Lagebeziehungen

Voraussetzung	Abstand
Punkte $P(p_1 p_2 p_3), Q(q_1 q_2 q_3)$	$\overline{PQ} = d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$

Abstand zwischen zwei Punkten

Voraussetzung	Abstand
	Lotfußpunktverfahren, Hilfsebenenverfahren ->
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$, Punkt P(p ₁ p ₂ p ₃)	$d(P,g) = d(P,F) = \left \overrightarrow{PF} \right $ bzw. $d(P,g) = \frac{\left \vec{u} \times (\vec{OP} - \vec{a}) \right }{\left \vec{u} \right }$ mit Feg als Lotfußpunkt und $\vec{OF} = \vec{a} + \frac{\left(\vec{OP} - \vec{a} \right) \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}$
Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$, h: $\vec{x} = \vec{b} + t \vec{u}$ g h	$d(g,h) = d(P,g) = d(P,F)$ mit Peh und $\vec{OP} = \vec{b}$ und Feg als Lotfußpunkt

Abstand zwischen Punkt und Gerade, zwischen parallelen Geraden

Voraussetzung	Abstand
	Hessesche Normalform ->
Ebene E: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$ (KF), Punkt P(p ₁ p ₂ p ₃)	$d(P,E) = \frac{\left \vec{n} \cdot \vec{OP} - d \right }{\left \vec{n} \right } = \frac{\left n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 - d \right }{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$
Ebene E: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$ (KF), Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$, g E	$d(g,E) = d(P,E)$ mit Peg und $\vec{OP} = \vec{a}$
Ebenen E: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$ (KF), F: $m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = e$ (KF), E F	$d(F,E) = d(P,E)$ bzw. $d(F,E) = \frac{\left \frac{d}{\left \vec{n} \right } - \frac{e}{\left \vec{m} \right } \right }{1}$ mit PeF
Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}_1$, h: $\vec{x} = \vec{b} + t \vec{u}_2$ g, h windschief	$d(h,g) = d(h,E_H) = d(P,E_H)$ bzw. $d(g,h) = \frac{\left (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \right }{\left \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \right }$ mit Hilfsebene E _H : $(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \begin{bmatrix} \vec{x} - \vec{a} \\ x - a \end{bmatrix} = 0$, g auf E _H , Peh

Abstand zwischen Punkt und Ebene, zwischen Gerade und Ebene, zwischen parallelen Ebenen, zwischen windschiefen Geraden

Voraussetzung	Winkel
	Kosinus-Formel ->
Winkel φ zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b}	$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left \vec{a} \right \cdot \left \vec{b} \right }$ (spitzer, stumpfer Winkel)
Schnittwinkel φ zwischen zwei sich schneidenden Geraden g ₁ : $\vec{x} = \vec{a}_1 + s \vec{u}_1$ und g ₂ : $\vec{x} = \vec{a}_2 + t \vec{u}_2$	$\cos \varphi = \frac{\left \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \right }{\left \vec{u}_1 \right \cdot \left \vec{u}_2 \right }$ (spitzer Winkel)

Schnittwinkel φ zwischen zwei sich $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$ schneidenden Ebenen $E_1: \vec{n}_1 \cdot \vec{x} = d_1$ (NF) und $E_2: \vec{n}_2 \cdot \vec{x} = d_2$ (NF)	$\cos \varphi = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }$ (spitzer Winkel)
---	---

Winkel zwischen je zwei Vektoren, Geraden, Ebenen

Voraussetzung	Winkel
	Sinus-Formel ->
Schnittwinkel φ zwischen einer Geraden $\vec{u} \cdot \vec{n}$ $g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$ und einer Ebene $E: \vec{n} \cdot \vec{x} = d$ (NF)	$\sin \varphi = \frac{ \vec{u} \cdot \vec{n} }{ \vec{u} \cdot \vec{n} }$ (spitzer Winkel)

Winkel zwischen Gerade und Ebene

Voraussetzung	Spurpunkte, Lage der Geraden
Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$	$x_1 = 0 \rightarrow a_1 + t u_1 = 0 \rightarrow t = t_1 = -a_1/u_1 \rightarrow S_1(0 a_2+t_1 u_2 a_3+t_1 u_3)$ (Spurpunkt mit x_2 - x_3 -Ebene, falls $u_1 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_1 = 0$) $x_2 = 0 \rightarrow a_2 + t u_2 = 0 \rightarrow t = t_2 = -a_2/u_2 \rightarrow S_2(a_1+t_2 u_1 0 a_3+t_2 u_3)$ (Spurpunkt mit x_1 - x_3 -Ebene, falls $u_2 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_2 = 0$) $x_3 = 0 \rightarrow a_3 + t u_3 = 0 \rightarrow t = t_3 = -a_3/u_3 \rightarrow S_3(a_1+t_3 u_1 a_2+t_3 u_2 0)$ (Spurpunkt mit x_1 - x_2 -Ebene, falls $u_3 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_3 = 0$) $u_1 = 0 \rightarrow g \parallel x_2$ - x_3 -Ebene $u_2 = 0 \rightarrow g \parallel x_1$ - x_3 -Ebene $u_3 = 0 \rightarrow g \parallel x_1$ - x_2 -Ebene $u_2 = 0, u_3 = 0 \rightarrow g \parallel x_1$ -Achse $u_1 = 0, u_3 = 0 \rightarrow g \parallel x_2$ -Achse $u_1 = 0, u_2 = 0 \rightarrow g \parallel x_3$ -Achse

Spurpunkte, Lage von Geraden

Voraussetzung	Spurpunkte, Lage der Ebene
Ebene $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$	$S_1(d/a 0 0)$ (Schnittpunkt mit der x_1 -Achse) $S_2(0 d/b 0)$ (Schnittpunkt mit der x_2 -Achse) $S_3(0 0 d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3 -Achse)
Ebene $E: bx_2 + cx_3 = d$ $b \neq 0, c \neq 0$	$S_2(0 d/b 0)$ (Schnittpunkt mit der x_2 -Achse) $S_3(0 0 d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3 -Achse) -> Ebene parallel zur x_1 -Achse
Ebene $E: ax_1 + cx_3 = d$ $a \neq 0, c \neq 0$	$S_1(d/a 0 0)$ (Schnittpunkt mit der x_1 -Achse) $S_3(0 0 d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3 -Achse) -> Ebene parallel zur x_2 -Achse
Ebene $E: ax_1 + bx_2 = d$ $a \neq 0, b \neq 0$	$S_1(d/a 0 0)$ (Schnittpunkt mit der x_1 -Achse) $S_2(0 d/b 0)$ (Schnittpunkt mit der x_2 -Achse) -> Ebene parallel zur x_3 -Achse
Ebene $E: ax_1 = d$ $a \neq 0$	$S_1(d/a 0 0)$ (Schnittpunkt mit der x_1 -Achse) -> Ebene parallel zur x_2 - und x_3 -Achse -> Ebene parallel zur x_2 - x_3 -Ebene
Ebene $E: bx_2 = d$ $b \neq 0$	$S_2(0 d/b 0)$ (Schnittpunkt mit der x_2 -Achse) -> Ebene parallel zur x_1 - und x_3 -Achse -> Ebene parallel zur x_1 - x_3 -Ebene
Ebene $E: cx_3 = d$ $c \neq 0$	$S_3(0 0 d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3 -Achse) -> Ebene parallel zur x_1 - und x_2 -Achse -> Ebene parallel zur x_1 - x_2 -Ebene

Spurpunkte, Lage von Ebenen

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt P Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF)	a) Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{a} + t \vec{u} \rightarrow 1$ Lösung: $P \in g$; keine Lösung: $P \notin g$ b) Abstand (Lotfußpunktverfahren): $F \in g$ mit: $\vec{PF} \cdot \vec{u} = 0$, $d(P, g) = \left \vec{PF} \right $ c) Abstand (Hilfsebenenverfahren): Hilfsebene $E_H: \vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ mit $\vec{p} = \vec{OP}$, Schnittpunkt F von Hilfsebene E_H und Gerade g als Lot- fußpunkt (Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene $\rightarrow t^*$) für errechnetes t^* mit $\vec{OF} = \vec{a} + t^* \vec{u}$, $d(P, g) = \left \vec{PF} \right $ d) Abstand (Kreuzproduktformel): $d(P, g) = \frac{\left \vec{u} \times (\vec{OP} - \vec{a}) \right }{\left \vec{u} \right }$ e) Abstand (Abstandsfunktion): $F_t(a_1 + tu_1 a_2 + tu_2 a_3 + tu_3) \in g$ als „lau- fenden“ Punkt \rightarrow Abstandsfunktion $d(t) = \left \vec{PF}_t \right \rightarrow$ Minimum der Abstandsfunktion ($d'(t)=0$) bei $t^* \rightarrow$ Lotfußpunkt $\vec{OF} = \vec{a} + t^* \vec{u}$, $d(P, g) = d(t^*) = \left \vec{PF} \right $

Lage Punkt – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
Gerade $g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + s \vec{u}_1$ (PF) Gerade $g_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + t \vec{u}_2$ (PF)	a) Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\vec{a}_1 + s \vec{u}_1 = \vec{a}_2 + t \vec{u}_2 \rightarrow$ unendlich viele Lösungen: $g_1 = g_2$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g_1 \cap g_2 = \{S\}$; keine Lösung: Geraden parallel oder windschief b) Überprüfung auf Parallelität: $\vec{u}_1 = k \vec{u}_2 \rightarrow 1$ Lösung: $g_1 \parallel g_2$, keine Lösung: g_1, g_2 windschief c) Abstand (bei parallelen Geraden): $d(g_1, g_2) = d(A_2, g_1)$ mit Punkt $A_2 \in g_2$, z.B. mit $\vec{a}_2 = \vec{OA}_2$ d) Abstand (bei windschiefen Geraden, Lotfußpunktverfahren): $P_L \in g_1, Q_L \in g_2$ mit: $\vec{P}_L \vec{Q}_L \cdot \vec{u}_1 = 0, \vec{P}_L \vec{Q}_L \cdot \vec{u}_2 = 0, d(g_1, g_2) = \left \vec{P}_L \vec{Q}_L \right $; e) Abstand (bei windschiefen Geraden, Hilfsebenenverfahren): Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$, Hilfsebene $E_H: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}_1) = 0$ (NF) mit $E_H \parallel g_2, d(g_1, g_2) = d(A_2, E_H)$ mit $A_2 \in g_2$, z.B. mit $\vec{a}_2 = \vec{OA}_2$ (Hes- sesche Normalform); Formel: $d(g_1, g_2) = \frac{\left \vec{n} \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \right }{\left \vec{n} \right }$ f) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Geraden): $\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{\left \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \right }{\left \vec{u}_1 \right \cdot \left \vec{u}_2 \right } \right)$

Lage Gerade – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt P($p_1 p_2 p_3$) Ebene: E: $x = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)	a) Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{b} + r \vec{u} + s \vec{v} \rightarrow$ 1 Lösung: $P \in g$; keine Lösung: $P \notin g$ b) Punktprobe: $ap_1 + bp_2 + cp_3 = d \rightarrow$ wahre Aussage: $P \in g$; falsche Aussage: $P \notin g$ c) Abstand (Hessesche Normalform): $d(P,E) = \left \frac{\vec{n} \cdot \vec{OP} - d}{ \vec{n} } \right = \frac{ ap_1 + bp_2 + cp_3 - d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Lage Punkt – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
Ebene E: $x = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF) bzw. E: $n(x - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF) Gerade: g: $x = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF)	a) Gleichsetzen von Ebenen- und Geradengleichung: $\vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF) bzw. Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene (KF, NF) \rightarrow unendlich viele Lösungen: $g \subset E$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g \cap E = \{S\}$; keine Lösung: $g \parallel E$ b) Abstand (bei Parallelität von Gerade und Ebene): $d(g,E) = d(A,E)$ mit Punkt $A \in g$, z.B. mit $\vec{a} = \vec{OA}$ (Hessesche Normalform) c) Schnittwinkel (bei sich schneidender Gerade und Ebene): $\varphi = \sin^{-1} \left(\frac{ \vec{n} \cdot \vec{u} }{ \vec{n} \cdot \vec{u} } \right)$

Lage Gerade – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
E ₁ : $x = \vec{b}_1 + r \vec{v}_1 + s \vec{w}_1$ (PF) bzw. E ₁ : $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), E ₂ : $x = \vec{b}_2 + t \vec{v}_2 + u \vec{w}_2$ (PF) bzw. E ₂ : $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{w}_1, \vec{n}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{w}_2$	a) Gleichsetzen der Ebenengleichungen E ₁ , E ₂ (PF): $\vec{b}_1 + r \vec{v}_1 + s \vec{w}_1 = \vec{b}_2 + t \vec{v}_2 + u \vec{w}_2$ bzw. Einsetzen der Ebenenkomponenten x_1, x_2, x_3 der Ebene E ₁ (PF) in die Ebene E ₂ (KF) bzw. Lösen des linearen Gleichungssystems der Ebenen E ₁ , E ₂ (KF): $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2 \end{pmatrix} \rightarrow$ unendlich viele Lösungen (mit zwei Parametern): $E_1 = E_2$, unendlich viele Lösungen (mit einem Parameter): Schnittgerade g mit $E_1 \cap E_2 = g$; keine Lösung: $E_1 \parallel E_2$ b) Abstand (bei Parallelität der Ebenen): $d(E_1, E_2) = d(A, E_1)$ mit Punkt $A \in E_2$ (Hessesche Normalform) c) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Ebenen): $\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } \right)$

Lage Ebene – Ebene

Voraussetzung	Lage
Gerade: g: $x = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF) Ebene E: $x = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF) bzw. E: $n(x - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF)	a) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow g \parallel E$ b) $\vec{u} = k \vec{n} \rightarrow g \perp E$

Orthogonalität, Parallelität Gerade – Ebene

Voraussetzung	Lage
$\vec{x} = \vec{b}_1 + r \vec{v}_1 + s \vec{w}_1$ (PF) bzw. $E_1: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), $\vec{x} = \vec{b}_2 + t \vec{v}_2 + u \vec{w}_2$ (PF) bzw. $E_2: ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{w}_1, \vec{n}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{w}_2$	a) $\vec{n}_1 = k \vec{n}_2 \rightarrow E_1 \parallel E_2$ b) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \rightarrow E_1 \perp E_2$

Orthogonalität, Parallelität Ebene – Ebene

Spiegelungen

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, Ursprung $O(0 0 0) \rightarrow$	Bildpunkt $A'(-a_1 -a_2 -a_3)$
Gerade $g: \vec{x} = a + t \vec{u}$ (PF), Ursprung $O(0 0 0) \rightarrow$	Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(-a_1 -a_2 -a_3) \rightarrow$ gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{u}$ (PF) mit $g' \parallel g$
Ebene: $E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF), Ursprung $O(0 0 0) \rightarrow$	Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(-a_1 -a_2 -a_3) \rightarrow$ gespiegelte Ebene: $E': \vec{n}(\vec{x} - \vec{OA}') = 0$ (NF) mit $E' \parallel E$

Spiegelungen am Ursprung

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, x_1 -Achse \rightarrow Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, x_2 -Achse \rightarrow Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, x_3 -Achse \rightarrow	Bildpunkt A' : $A'(a_1 -a_2 -a_3)$ Bildpunkt A' : $A'(-a_1 a_2 -a_3)$ Bildpunkt A' : $A'(-a_1 -a_2 a_3)$
Gerade $g: \vec{x} = a + t \vec{u}$ (PF), $A(a_1 a_2 a_3) \in g, B(b_1 b_2 b_3) \in g \rightarrow$ x_1 -Achse x_2 -Achse x_3 -Achse	Bildpunkte A', B' : $A'(a_1 -a_2 -a_3), B'(b_1 -b_2 -b_3)$ Bildpunkte A', B' : $A'(-a_1 a_2 -a_3), B'(-b_1 b_2 -b_3)$ Bildpunkte A', B' : $A'(-a_1 -a_2 a_3), B'(-b_1 -b_2 b_3)$ \rightarrow Bildgerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{A'B}'$
Ebene: $E: \vec{x} = a + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF), $A(a_1 a_2 a_3) \in E, B(b_1 b_2 b_3) \in E,$ $C(c_1 c_2 c_3) \in E \rightarrow$ x_1 -Achse x_2 -Achse x_3 -Achse	Bildpunkte A', B', C' : $A'(a_1 -a_2 -a_3), B'(b_1 -b_2 -b_3), C'(c_1 -c_2 -c_3)$ Bildpunkte A', B', C' : $A'(-a_1 a_2 -a_3), B'(-b_1 b_2 -b_3), C'(-c_1 c_2 -c_3)$ Bildpunkte A', B', C' : $A'(-a_1 -a_2 a_3), B'(-b_1 -b_2 b_3), C'(-c_1 -c_2 c_3)$ \rightarrow Bildebene: $E': \vec{x} = \vec{OA}' + r \vec{A'B}' + s \vec{A'C}'$

Spiegelungen an Koordinatenachsen

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, x_1 - x_2 -Ebene \rightarrow Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, x_1 - x_3 -Ebene \rightarrow Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, x_2 - x_3 -Ebene \rightarrow	Bildpunkt A' : $A'(a_1 a_2 -a_3)$ Bildpunkt A' : $A'(a_1 -a_2 a_3)$ Bildpunkt A' : $A'(-a_1 a_2 a_3)$
Gerade $g: \vec{x} = a + t \vec{u}$ (PF), $A(a_1 a_2 a_3) \in g, B(b_1 b_2 b_3) \in g \rightarrow$ x_1 - x_2 -Ebene x_1 - x_3 -Ebene x_2 - x_3 -Ebene	Bildpunkte A', B' : $A'(a_1 a_2 -a_3), B'(b_1 b_2 -b_3)$ Bildpunkte A', B' : $A'(a_1 -a_2 a_3), B'(b_1 -b_2 b_3)$ Bildpunkte A', B' : $A'(-a_1 a_2 a_3), B'(-b_1 b_2 b_3)$ \rightarrow Bildgerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{A'B}'$

<p>Ebene: $E: \vec{x} = a + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF), $A(a_1 a_2 a_3) \in E$, $B(b_1 b_2 b_3) \in E$, $C(c_1 c_2 c_3) \in E \rightarrow$ x_1-x_2-Ebene x_1-x_3-Ebene x_2-x_3-Ebene</p>	<p>Bildpunkte A', B', C': $A'(a_1 a_2 -a_3)$, $B'(b_1 b_2 -b_3)$, $C'(c_1 c_2 -c_3)$ Bildpunkte A', B', C': $A'(a_1 -a_2 a_3)$, $B'(b_1 -b_2 b_3)$, $C'(c_1 -c_2 c_3)$ Bildpunkte A', B', C': $A'(-a_1 a_2 a_3)$, $B'(-b_1 b_2 b_3)$, $C'(-c_1 c_2 c_3)$ \rightarrow Bildebene: $E': \vec{x} = \vec{OA}' + r \vec{A'B}' + s \vec{A'C}'$</p>
--	--

Spiegelungen an Koordinatenebenen

Voraussetzung	Spiegelung
<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, Spiegelpunkt $F(f_1 f_2 f_3)$</p>	<p>Bildpunkt $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = \vec{OF} + \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = 2\vec{OF} - \vec{OA}$ \rightarrow Bildpunkt $A'(2f_1-a_1 2f_2-a_2 2f_3-a_3)$</p>
<p>Gerade $g: \vec{x} = a + t \vec{u}$ (PF), Spiegelpunkt $F(f_1 f_2 f_3)$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(2f_1-a_1 2f_2-a_2 2f_3-a_3) \rightarrow$ gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{u}$ (PF) mit $g' \parallel g$</p>
<p>Ebene: $E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF), Spiegelpunkt $F(f_1 f_2 f_3)$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(2f_1-a_1 2f_2-a_2 2f_3-a_3) \rightarrow$ gespiegelte Ebene: $E': \vec{n}(\vec{x} - \vec{OA}') = 0$ (NF) mit $E' \parallel E$</p>

Punktspiegelungen

Voraussetzung	Spiegelung
<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, Spiegelpunkt $F(f_1 f_2 f_3)$</p>	<p>Bildpunkt $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = \vec{OF} + \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = 2\vec{OF} - \vec{OA}$ \rightarrow Bildpunkt $A'(2f_1-a_1 2f_2-a_2 2f_3-a_3)$</p>
<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, Spiegelgerade $g_s: \vec{x} = \vec{a}_s + t \vec{u}_s$ (PF)</p>	<p>Lotfußpunkt $F \in g_s$ mit $\vec{AF} \cdot \vec{u}_s = 0$ (Lotfußpunktverfahren) bzw. Lotfußpunkt $F \in g_s$ mit Hilfeebene: $E_H: \vec{u}_s \cdot \vec{x} = \vec{u}_s \cdot \vec{OA}$ (KF), $E_H \cap g_s = \{F\}$ (Hilfsebenenverfahren) \rightarrow Bildpunkt $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = \vec{OF} + \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = 2\vec{OF} - \vec{OA}$ \rightarrow Bildpunkt $A'(2f_1-a_1 2f_2-a_2 2f_3-a_3)$</p>
<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, Spiegelebene $E_s: \vec{n}_s \cdot \vec{x} = d_s$ (KF)</p>	<p>Lotfußpunkt $F \in E_s$ mit Hilfsgerade: $h: \vec{x} = \vec{OA} + t \vec{n}_s$ (PF), $E_s \cap h = \{F\}$ (Hilfsgeradenverfahren) \rightarrow Bildpunkt $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = \vec{OF} + \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = 2\vec{OF} - \vec{OA}$ \rightarrow Bildpunkt $A'(2f_1-a_1 2f_2-a_2 2f_3-a_3)$</p>

Spiegelung von Punkten

Voraussetzung	Spiegelung
<p>Gerade $g: \vec{x} = a + t \vec{u}$ (PF), Spiegelpunkt $F(f_1 f_2 f_3)$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(2f_1-a_1 2f_2-a_2 2f_3-a_3) \rightarrow$ gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{u}$ (PF) mit $g' \parallel g$</p>
<p>Gerade $g: \vec{x} = a + t \vec{u}$ (PF), Spiegelgerade $g_s: \vec{x} = \vec{a}_s + t \vec{u}_s$ (PF), $g \parallel g_s$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Punkt $F \in g_s \rightarrow$ Bildpunkt $A'(2f_1-a_1 2f_2-a_2 2f_3-a_3) \rightarrow$ gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{u}$ (PF) mit $g' \parallel g$</p>
<p>Gerade $g: \vec{x} = a + t \vec{u}$ (PF), Spiegelgerade $g_s: \vec{x} = \vec{a}_s + t \vec{u}_s$ (PF), $g \cap g_s = \{S\}$</p>	<p>Punkt $P \in g$, $P \neq S$, mit $\vec{PF} \cdot \vec{u}_s = 0$ (Lotfußpunktverfahren) bzw. Lotfußpunkt $F \in g_s$ mit Hilfeebene: $E_H: \vec{u}_s \cdot \vec{x} = \vec{u}_s \cdot \vec{OP}$ (KF), $E_H \cap g_s = \{F\}$ (Hilfsebenenverfahren) \rightarrow Bildpunkt $\vec{OP}' = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PF}$ bzw. $\vec{OP}' = \vec{OF} + \vec{PF}$ bzw. $\vec{OP}' = 2\vec{OF} - \vec{OP} \rightarrow$ gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OS} + t \vec{SP}'$ (PF)</p>

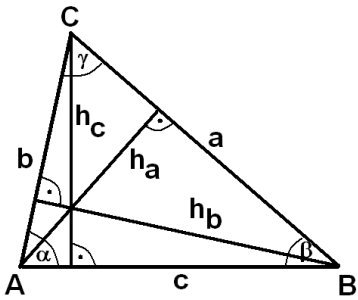
<p>Gerade $g: \vec{x} = a + t\vec{u}$ (PF), Spiegelgerade $g_s: \vec{x} = a_s + t\vec{u}_s$ (PF), $g \cap g_s = \{S\}$ oder: g, g_s windschief</p>	<p>Punkte $P, Q \in g, P, Q \neq S$, mit $\vec{PF}_P \cdot \vec{u}_s = 0, \vec{QF}_Q \cdot \vec{u}_s = 0$ (Lotfußpunktverfahren) bzw. Fußpunkt $F_P \in g_s$ mit Hilfeebene: $E_P: \vec{u}_s \cdot \vec{x} = \vec{u}_s \cdot \vec{OP}$ (KF), $E_P \cap g_s = \{F_P\}$, Fußpunkt $F_Q \in g_s$ mit Hilfeebene: $E_Q: \vec{u}_s \cdot \vec{x} = \vec{u}_s \cdot \vec{OQ}$ (KF), $E_Q \cap g_s = \{F_Q\}$ (Hilfsebenenverfahren) -> Bildpunkte $\vec{OP}' = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PF}_P$ bzw. $\vec{OP}' = \vec{OF}_P + \vec{PF}_P$ bzw. $\vec{OP}' = 2\vec{OF}_P - \vec{OP}$, $\vec{OQ}' = \vec{OQ} + 2 \cdot \vec{QF}_Q$ bzw. $\vec{OQ}' = \vec{OQ} + \vec{QF}_Q$ bzw. $\vec{OQ}' = 2\vec{OF}_Q - \vec{OQ}$ -> gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OP}' + t\vec{P'Q}'$ (PF)</p>
<p>Gerade $g: \vec{x} = a + t\vec{u}$ (PF), Spiegelebene $E_s: \vec{n}_s \cdot \vec{x} = d_s$ (KF), $g \parallel E_s$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Punkt $F \in E_s$ -> Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3)$ -> gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t\vec{u}$ (PF) mit $g' \parallel g$</p>
<p>Gerade $g: \vec{x} = a + t\vec{u}$ (PF), Spiegelebene $E_s: \vec{n}_s \cdot \vec{x} = d_s$ (KF), $g \cap E_s = \{S\}$</p>	<p>Punkt $P \in g, P \neq S$, $h: \vec{x} = \vec{OP} + t\vec{n}_s, h \cap E_s = \{F\}$ (Hilfsgeradenverfahren) -> Bildpunkt $\vec{OP}' = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PF}$ bzw. $\vec{OP}' = \vec{OF} + \vec{PF}$ bzw. $\vec{OP}' = 2\vec{OF} - \vec{OP}$ -> gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OS} + t\vec{SP}'$ (PF)</p>

Spiegelung von Geraden

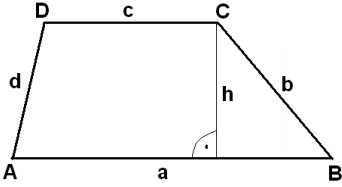
Voraussetzung	Spiegelung
<p>Ebene: $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF), Spiegelpunkt $F(f_1 f_2 f_3)$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3)$ -> gespiegelte Ebene: $E': \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{OA}') = 0$ (NF) mit $E' \parallel E$</p>
<p>Ebene: $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF), Spiegelgerade $g_s: \vec{x} = a_s + t\vec{u}_s$ (PF), $E \parallel g_s$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Punkt $F \in g_s$ -> Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3)$ -> gespiegelte Ebene: $E': \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{OA}') = 0$ (NF) mit $E' \parallel E$</p>
<p>Ebene: $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF), Spiegelgerade $g_s: \vec{x} = a_s + t\vec{u}_s$ (PF), $E \cap g_s = \{S\}$</p>	<p>Punkt $P, Q \in E, P, Q \neq S, \vec{PF}_P \cdot \vec{u}_s = 0, \vec{QF}_Q \cdot \vec{u}_s = 0$ (Lotfußpunktverfahren) bzw. Lotfußpunkt $F_P \in g_s$ mit Hilfeebene: $E_P: \vec{u}_s \cdot \vec{x} = \vec{u}_s \cdot \vec{OP}$ (KF), $E_P \cap g_s = \{F_P\}$ Lotfußpunkt $F_Q \in g_s$ mit Hilfeebene: $E_Q: \vec{u}_s \cdot \vec{x} = \vec{u}_s \cdot \vec{OQ}$ (KF), $E_Q \cap g_s = \{F_Q\}$ (Hilfsebenenverfahren) -> Bildpunkte $\vec{OP}' = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PF}_P$ bzw. $\vec{OP}' = \vec{OF}_P + \vec{PF}_P$ bzw. $\vec{OP}' = 2\vec{OF}_P - \vec{OP}$, $\vec{OQ}' = \vec{OQ} + 2 \cdot \vec{QF}_Q$ bzw. $\vec{OQ}' = \vec{OQ} + \vec{QF}_Q$ bzw. $\vec{OQ}' = 2\vec{OF}_Q - \vec{OQ}$ -> gespiegelte Ebene: $E': \vec{x} = \vec{OS} + r\vec{SP}' + s\vec{SQ}'$ (PF)</p>
<p>Ebene: $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF), Spiegelebene $E_s: \vec{n}_s \cdot \vec{x} = d_s$ (KF), $E \parallel E_s$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Punkt $F \in E_s$ -> Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3)$ -> gespiegelte Ebene: $E': \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{OA}') = 0$ (NF) mit $E' \parallel E$</p>
<p>Ebene: $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF), Spiegelebene $E_s: \vec{n}_s \cdot \vec{x} = d_s$ (KF), $E \cap E_s = g: \vec{x} = \vec{OA}_1 + t\vec{u}$</p>	<p>Punkt $P \in E, P \notin g, h: \vec{x} = \vec{OP} + t\vec{n}_s, h \cap E_s = \{F\}$ (Hilfsgeradenverfahren) -> Bildpunkt $\vec{OP}' = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PF}$ bzw. $\vec{OP}' = \vec{OF} + \vec{PF}$ bzw. $\vec{OP}' = 2\vec{OF} - \vec{OP}$ -> gespiegelte Ebene: $E': \vec{x} = \vec{OA}_1 + t\vec{u} + s\vec{A_1P}'$ (PF)</p>

Spiegelungen von Ebenen

Geometrie

<p>Dreieck ABC in der Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF), Seiten als Differenzvektoren: \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}, Winkel an den Ecken A, B, C: α, β, γ.</p>	
<p>$\vec{AB} \neq k \vec{AC}$ für jedes reelle k \Rightarrow Dreieck $\vec{AB} \neq k \vec{BC}$ für jedes reelle k \Rightarrow Dreieck $\vec{BC} \neq k \vec{AC}$ für jedes reelle k \Rightarrow Dreieck</p>	
<p>Seiten: $c = \vec{AB}$, $b = \vec{AC}$, $a = \vec{BC}$, Umfang: $u = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}$</p>	
<p>$\vec{AB} = \vec{AC} \Rightarrow$ Dreieck gleichschenkelig (Spitzenwinkel α) $\vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Dreieck gleichschenkelig (Spitzenwinkel β) $\vec{BC} = \vec{AC} \Rightarrow$ Dreieck gleichschenkelig (Spitzenwinkel γ)</p>	<p>Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$</p>
<p>Winkel: $\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{ \vec{AB} \cdot \vec{AC} }$, $\cos \beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \cdot \vec{BC} }$, $\cos \gamma = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AC} \cdot \vec{BC} }$</p>	
<p>$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow$ Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow$ Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\vec{BC} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow$ Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)</p>	
<p>Höhen: $h_a = d(A, g_{BC})$, $h_b = d(B, g_{AC})$, $h_c = d(C, g_{AB})$ bzw. $h_a = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AC} }{ \vec{BC} }$, $h_b = \frac{ \vec{AB} \times \vec{BC} }{ \vec{AC} }$, $h_c = \frac{ \vec{AC} \times \vec{BC} }{ \vec{AB} }$ usw.</p> <p>Fläche: $A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ bzw. $A = \frac{\vec{BC} \cdot d(A, g_{BC})}{2} = \frac{\vec{AC} \cdot d(B, g_{AC})}{2} = \frac{\vec{AB} \cdot d(C, g_{AB})}{2}$ bzw. $A = \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{AC} = \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{BC} = \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{BC}$</p>	<p>Erläuterung: $g_{PQ}: \vec{x} = \vec{OP} + t \vec{PQ}$ $d(R, g) =$ Abstand Punkt R – Gerade g</p>

Dreieck

<p>Trapez ABCD in der Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF) mit D\inE, Seiten als Differenzvektoren: \vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AD}, Winkel an den Ecken A, B, C, D: α, β, γ, δ.</p>	
<p>$\vec{AB} = k \vec{CD}$ für ein gewisses k \Rightarrow Trapez ($\vec{AB} \parallel \vec{CD}$) $\vec{BC} = k \vec{AD}$ für ein gewisses k \Rightarrow Trapez ($\vec{BC} \parallel \vec{AD}$)</p>	
<p>Seiten: $a = \vec{AB}$, $b = \vec{BC}$, $c = \vec{CD}$, $d = \vec{AD}$, Umfang: $u = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{AD}$</p>	
<p>$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$, $\vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow$ Trapez gleichschenkelig</p>	

$\vec{BC} \parallel \vec{AD}, \vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow$ Trapez gleichschenkelig	
Winkel: $\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{ \vec{AB} \cdot \vec{AD} }, \cos\beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \cdot \vec{BC} }, \cos\gamma = -\frac{\vec{BC} \cdot \vec{CD}}{ \vec{BC} \cdot \vec{CD} }, \cos\delta = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{CD}}{ \vec{AD} \cdot \vec{CD} }$	Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$
Höhe: $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \Rightarrow h = d(C, g_{AB})$ bzw. $h = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AC} }{ \vec{AB} }$ bzw. $\vec{BC} \parallel \vec{AD} \Rightarrow h = d(D, g_{BC})$ bzw. $h = \frac{ \vec{BC} \times \vec{BD} }{ \vec{BC} }$	Erläuterung: $g_{PQ}: \vec{x} = \vec{OP} + t \vec{PQ}$ $d(R, g) =$ Abstand Punkt R – Gerade g
Fläche: $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \Rightarrow A = \frac{a+c}{2} h$ bzw. $A = \left \vec{AB} \times \vec{AC} \right + \left \vec{AC} \times \vec{AD} \right $ bzw.: $\vec{BC} \parallel \vec{AD} \Rightarrow A = \frac{b+d}{2} h$ bzw. $A = \left \vec{AB} \times \vec{AC} \right + \left \vec{AC} \times \vec{AD} \right $	

Trapez

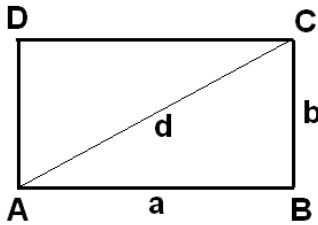
Parallelogramm ABCD in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF) mit $D \in E$, Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.	
$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow$ Parallelogramm $\vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow$ Parallelogramm	
Seiten: $a = \vec{AB} = \vec{CD} , b = \vec{BC} = \vec{AD} $, Umfang: $u = 2 \vec{AB} + 2 \vec{BC} $	
Winkel: $\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{ \vec{AB} \cdot \vec{AD} }, \cos\beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \cdot \vec{BC} }$ usw.	Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ $\alpha + \beta = 180^\circ, \gamma + \delta = 180^\circ$ $\alpha = \gamma, \beta = \delta$
Höhen: $h_a = d(C, g_{AB})$ bzw. $h_a = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AD} }{ \vec{AB} }, h_b = d(C, g_{AD})$ bzw. $h_b = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AD} }{ \vec{AD} }$	Erläuterung: $g_{PQ}: \vec{x} = \vec{OP} + t \vec{PQ}$ $d(R, g) =$ Abstand Punkt R – Gerade g
Fläche: $A = ah_a = bh_b$ bzw. $A = \vec{AB} \cdot d(C, g_{AB}) = \vec{AD} \cdot d(C, g_{AD})$ bzw. $A = \left \vec{AB} \times \vec{AD} \right $	

Parallelogramm

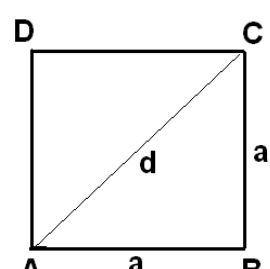
Raute ABCD als Parallelogramm mit gleich langen Seiten in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF) mit $D \in E$, Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.	
$\vec{AB} = \vec{DC}, \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Raute $\vec{BC} = \vec{AD}, \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Raute	
Seiten: $a = \vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \vec{AD} $, Umfang: $u = 4 \vec{AB} $	

Winkel: $\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{ \vec{AB} \cdot \vec{AD} }$, $\cos \beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \cdot \vec{BC} }$ usw.	Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ $\alpha + \beta = 180^\circ$, $\gamma + \delta = 180^\circ$ $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$
Höhe: $h = d(C, g_{AB}) = d(C, g_{AD})$ bzw. $h = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AD} }{ \vec{AB} }$	Erläuterung: $g_{PO}: \vec{x} = \vec{OP} + t \vec{PQ}$ $d(R, g) = \text{Abstand Punkt R - Gerade g}$
Fläche: $A = \frac{ \vec{AC} \cdot \vec{BD} }{2}$ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AD} $	

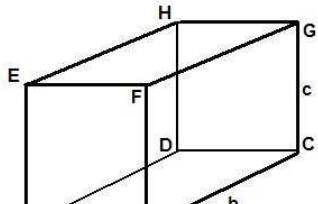
Raute

Rechteck ABCD als rechtwinkliges Parallelogramm in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AD}$ (PF) mit $D \in E$, Seiten als Differenzvektoren: \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} , \vec{AD} , Winkel an den Ecken A, B, C, D: α , β , γ , δ .	
$\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \Rightarrow \text{Rechteck}$ $\vec{BC} = \vec{AD}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow \text{Rechteck}$	
Seiten: $a = \vec{AB} = \vec{CD} $, $b = \vec{BC} = \vec{AD} $, Umfang: $u = 2 \vec{AB} + 2 \vec{BC} $	
Fläche: $A = \vec{AB} \cdot \vec{BC} $ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AD} $	

Rechteck

Quadrat ABCD als rechtwinkliges Parallelogramm mit gleich langen Seiten in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AD}$ (PF) mit $D \in E$, Seiten als Differenzvektoren: \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} , \vec{AD} , Winkel an den Ecken A, B, C, D: α , β , γ , δ .	
$\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$, $ \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow \text{Quadrat}$ $\vec{BC} = \vec{AD}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$, $ \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow \text{Quadrat}$	
Seiten: $a = \vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \vec{AD} $, Umfang: $u = 4 \vec{AB} $	
Fläche: $A = \vec{AB} ^2$ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AD} $	

Quadrat

Quader (Würfel) ABCDEFGH mit Rechteck ABCD als Grund-, Rechteck EFGH als Deckfläche und rechten Winkeln.	
$a = \vec{AB} $, $b = \vec{AD} $, $c = \vec{AE} $ (Kanten); $a=b=c$ (Würfel)	
Grundfläche, Deckfläche: $G = ab$; $G = a^2$ (Würfel) Mantelfläche: $M = (2a+2b)c$; $M = 4a^2$ (Würfel) Oberfläche: $O = 2G + M = 2(ab+ac+bc)$; $O = 6a^2$ (Würfel)	

Volumen: $V = abc$; $V = a^3$ (Würfel)

Quader (Würfel)

Spat ABCDEFGH mit Parallelogramm ABCD als Grund-, Parallelogramm EFGH als Deckfläche.

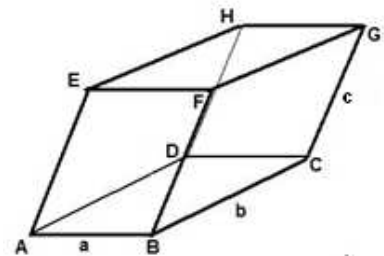
$a = |\vec{AB}|$, $b = |\vec{AD}|$, $c = |\vec{AE}|$ (Kanten)

Grundfläche, Deckfläche: $G = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$

Mantelfläche: $M = 2 \cdot |\vec{AB} \times \vec{AE}| + 2 \cdot |\vec{AD} \times \vec{AE}|$

Oberfläche: $O = 2G + M$

Volumen (Spatprodukt): $V = |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AE}|$



Spat

Dreieckspyramide ABCS mit Grundflächendreieck ABC und Spitze S.

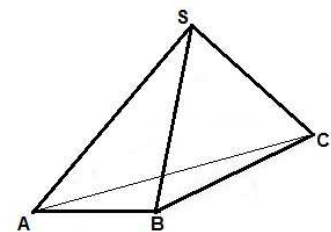
$G = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{BC}| = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{BC}|$ (Grundfläche)

$M = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AS}| + \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{AS}| + \frac{1}{2} |\vec{BC} \times \vec{BS}|$ (Mantelfläche)

$O = G + M$ (Oberfläche)

$h = d(S, E_{ABC})$ (Höhe, E_{ABC} als Grundebene, Hessesche Normalform) ->

Volumen: $V = Gh/3$ (Volumen) bzw. $V = \frac{|(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AS}|}{6}$



Dreieckspyramide

Parallelogrammpyramide ABCDS mit Grundflächenparallelogramm ABCD und Spitze S.

Grundkanten: $a = |\vec{AB}|$, $b = |\vec{AD}|$

Höhe: $h = d(S, E_{ABCD})$ (E_{ABCD} als Grundebene, Hessesche Normalform)

Seitenhöhen: $h_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$, $h_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$

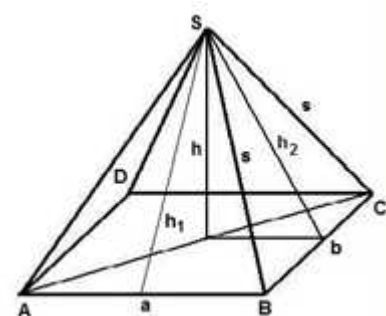
Seitenkante: $s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h_2^2$

Grundfläche: $G = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$

Mantelfläche: $M = |\vec{AB} \times \vec{AS}| + |\vec{AD} \times \vec{AS}|$

Oberfläche: $O = G + M$

Volumen: $V = Gh/3$ bzw. $V = \frac{|(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AS}|}{3}$



Parallelogrammpyramide

HNF = Hessesche Normalform, KF = Koordinatenform, LGS = lineares Gleichungssystem, Lsg. = Lösung(en), NF = Normalenform, PF = Parameterform, u.v.L = unendlich viele Lösungen