Michael Buhlmann

Mathematik-Formelsammlung

- > Vektorrechnung
- > Punkte, Geraden, Ebenen
- > Konstruktionen

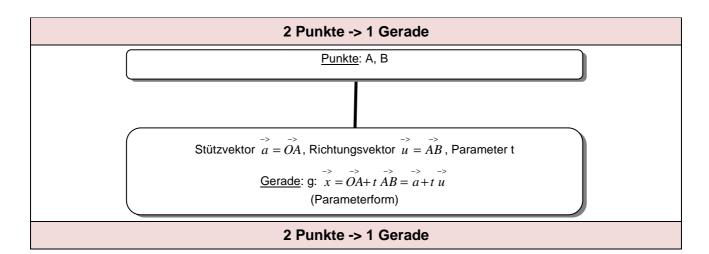
Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ lassen sich im dreidimensionalen reellen Vektorraum \mathbb{R}^3 identifizieren mit Ortsvektoren $\stackrel{->}{OP}$ (mit: O(0|0|0) als Koordinatenursprung), Linearkombinationen von Vektoren sind $\stackrel{->}{Geraden}$ g: $\stackrel{->}{x}=\stackrel{->}{a}+t$ $\stackrel{->}{u}$, g_1 : $\stackrel{->}{x}=\stackrel{->}{a_1}+s$ $\stackrel{->}{u_1}$, g_2 : $\stackrel{->}{x}=\stackrel{->}{a_2}+t$ $\stackrel{->}{u_2}$ und $\stackrel{->}{Ebenen}$ E: $\stackrel{->}{x}=\stackrel{->}{b}+r$ $\stackrel{->}{v}+s$ $\stackrel{->}{w}$ (mit Stützvektoren, Richtungs- und Spannvektoren sowie den reellen Parametern). Geraden liegen nur in Parameterform vor, bei den Ebenen ergeben sich die Formen:

- E: x = b + r v + s w (Parameterform)
- E: $n \left(\begin{array}{c} -> & -> \\ x p \end{array} \right) = 0$ (Normalenform)
- E: $n = (x p)^{->0}$ (Hesse'sche Normalenform)
- E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (Koordinatenform)

(unter Beachtung des Skalar- und Kreuzprodukts zwischen den Vektoren).

Es gilt dann für die Genese (Konstruktion) von Geraden und Ebenen:

- 2 Punkte -> 1 Gerade
- 1 Gerade, 1 Punkt (außerhalb der Geraden) -> 1 zur Gerade senkrechte Gerade
- 3 Punkte -> 1 Ebene
- 1 Gerade, 1 Punkt (außerhalb der Geraden) -> 1 Ebene
- 2 (sich schneidende, parallele) Geraden -> 1 Ebene
- 1 Punkt, 1 Ebene -> 1 zur Ebene senkrechte Gerade
- 1 Gerade, 1 Ebene -> 1 zur Ebene senkrechte Ebene
- Ebene in Parameter-, Normalen-, Hesse'scher Normalen-, Koordinatenform



1 Gerade, 1 Punkt -> 1 zur Gerade senkrechte Gerade

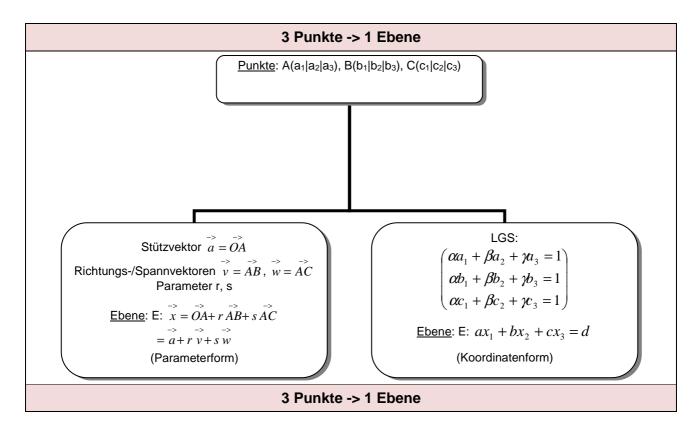
Gerade: g:
$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + t \overrightarrow{u}$$
, Punkt: P\(\vec{g}\) mit: $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}$

Lotpunkt P_L mit: $\overrightarrow{P_LP} \cdot \overrightarrow{u} = 0$

St\(\vec{u}\) zur Geraden g senkrechte Gerade: h: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP_L} + sP_LP = \overrightarrow{b} + s\overrightarrow{v}$

(Parameterform)

1 Gerade, 1 Punkt -> 1 zur Gerade senkrechte Gerade



1 Gerade, 1 Punkt -> 1 Ebene

Gerade: g:
$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + t \overrightarrow{u}$$
, Punkt: $P \notin g$ mit: $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}$

Stützvektor \overrightarrow{a}

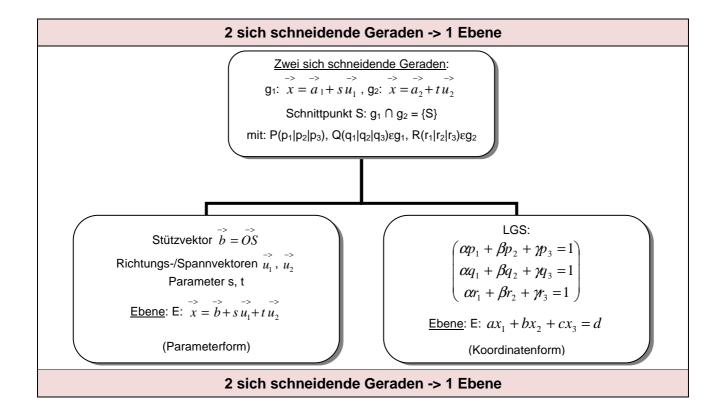
Richtungs-/Spannvektoren \overrightarrow{u} , $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}$

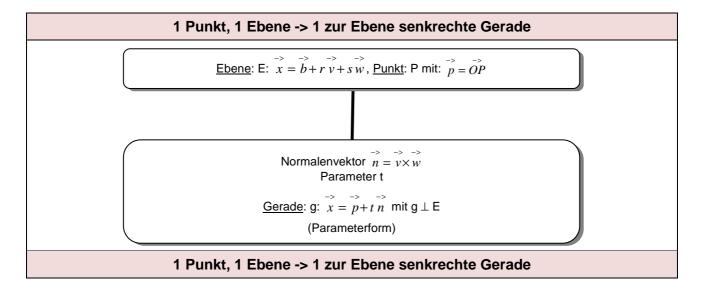
Parameter t, u

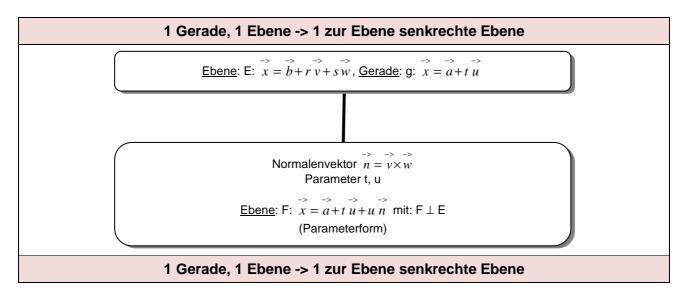
Ebene: E: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + t \overrightarrow{u} + u \overrightarrow{v}$

(Parameterform)

1 Gerade, 1 Punkt -> 1 Ebene







Ebene in Parameter-, Normalen-, Hesse'scher Normalen-, Koordinatenform <u>Ebene</u>: E: x = b + r v + s wmit: Stützvektor \vec{b} , Richtungs-/Spannvektoren \vec{v} , \vec{w} , Parametern r, s (Parameterform) Normalenvektor $\stackrel{->}{n} = \stackrel{->}{v \times w}$, Stützvektor $\stackrel{->}{p} = \stackrel{->}{b}$ <u>Ebene</u>: E: n(x-p) = 0(Normalenform) Normalenvektor $\stackrel{->}{n}$, normiert als $\stackrel{->}{n} = \stackrel{->}{n} / |\stackrel{->}{n}|$ Ebene: E: $n^{->0}(x-b)=0$ (Hesse'sche Normalenform) Normalenvektor $\stackrel{->}{n} = (a \quad b \quad c)^T$ mit: $\stackrel{-> ->}{n} = ax_1 + bx_2 + cx_3$ Punkt PEE mit: $\stackrel{->}{p} = \stackrel{->}{OP}$, $d = \stackrel{->}{n} \stackrel{-}{p}$ Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (Koordinatenform) Normalenvektor $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$ Ebene: E: $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$ (Hesse'sche Normalenform) $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ x_2 = r \end{pmatrix}$ Ebene: E: x = b + r v + s w(Parameterform) Ebene in Parameter-, Normalen-, Hesse'scher Normalen-, Koordinatenform