Michael Buhlmann

Mathematik-Formelsammlung
> Vektorrechnung
> Punkte, Geraden, Ebenen
> Spiegelungen

Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ lassen sich im dreidimensionalen reellen Vektorraum $\mathbf{R}^3$ identifizieren mit Ortsvektoren $\vec{OP}$ (mit: O(0|0|0) als Koordinatenursprung), Linearkombinationen von Vektoren sind Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$, g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$, g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ und Ebenen E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (mit Stützvektoren, Richtungs- und Spannvektoren sowie den reellen Parametern). Geraden liegen nur in Parameterform vor, bei den Ebenen ergeben sich die Formen:

- E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (Parameterform)
- E: $\vec{n}\left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0$ (Normalenform)
- E: $\vec{n}^{\,0}\left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0$ (Hesse'sche Normalenform)
- E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (Koordinatenform)

(unter Beachtung des Skalar- und Kreuzprodukts zwischen den Vektoren).

Es gilt dann für die Spiegelungen von Punkten, Geraden und Ebenen an Punkten, Geraden und Ebenen:

- Punkt -> Spiegelpunkt/-gerade/-ebene -> Bildpunkt
- Gerade -> 2 Punkte auf der Geraden) -> Spiegelpunkt/-gerade/-ebene -> Bildpunkte -> gespiegelte Gerade
- Ebene -> 3 Punkte auf der Ebene -> Spiegelpunkt/-gerade/-ebene -> Bildpunkte -> gespiegelte Ebene

Gespiegelt wird nach immer der gleichen Vorgehensweise: Ist A ein zu spiegelnder Punkt und F der Punkt, um den gespiegelt wird, bzw. der Lotpunkt zu A auf Spiegelgeraden bzw. Spiegelebene, so ergibt sich der Bildpunkt A‘ als:

$$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$$

Punkt, Gerade, Ebene -> Spiegelpunkt -> Bildpunkt, Bildgerade, Bildebene (Punktspiegelung)

<u>Punkt</u> A

Spiegelpunkt F

<u>Bildpunkt</u> A‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$

<u>Gerade</u>: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$,

B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{u}$

Spiegelpunkt F

Bildpunkte A‘, B‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$, $\vec{OB'} = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}$

<u>Gespiegelte Gerade</u>: g‘: $\vec{x} = \vec{OA'} + t\,\vec{A'B'}$

<u>Ebene</u>: E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{v} + s\,\vec{w}$

Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{v}$,

C mit $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{w}$

Spiegelpunkt F

Bildpunkte A‘, B‘, C‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$, $\vec{OB'} = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}$,

$\vec{OC'} = \vec{OC} + 2 \cdot \vec{CF}$

<u>Gespiegelte Ebene</u>: E‘: $\vec{x} = \vec{OA'} + r\,\vec{A'B'} + s\,\vec{A'C'}$

oder:

<u>Gerade</u>: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

Punkt: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$

Spiegelpunkt F

Bildpunkte A‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$

<u>Gespiegelte Gerade</u>: g‘: $\vec{x} = \vec{OA'} + t\,\vec{u}$

<u>Ebene</u>: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Punkt: AεE (etwa als Spurpunkt)

Normalenvektor: $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$

Spiegelpunkt F

Bildpunkt A‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$

<u>Gespiegelte Ebene</u>: E‘: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{OA'}$

Punkt, Gerade, Ebene -> Spiegelpunkt -> Bildpunkt, Bildgerade, Bildebene (Punktspiegelung)

Punkt, Gerade, Ebene -> Spiegelgerade -> Bildpunkt, Bildgerade, Bildebene (Achsenspiegelung)

<u>Punkt</u> A

Spiegelgerade

g_S: $\vec{x} = \vec{a}_S + t\,\vec{u}_S$

Fußpunkt Fεk mit

$\vec{AF} \cdot \vec{u}_S = 0$

<u>Bildpunkt</u> A‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$

<u>Gerade</u>: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$,

B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{u}$

Spiegelgerade g_S: $\vec{x} = \vec{a}_S + t\,\vec{u}_S$

Fußpunkte: $F_A\varepsilon k$ mit $\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_S = 0$,

$F_B\varepsilon k$ mit $\vec{AF}_B \cdot \vec{u}_S = 0$

Bildpunkte A‘, B‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A$, $\vec{OB'} = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}_B$

<u>Gespiegelte Gerade</u>: g‘: $\vec{x} = \vec{OA'} + t\,\vec{A'B'}$

<u>Ebene</u>: E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{v} + s\,\vec{w}$

Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{v}$,

C mit $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{w}$

Spiegelgerade g_S: $\vec{x} = \vec{a}_S + t\,\vec{u}_S$

Fußpunkte: $F_A\varepsilon k$ mit $\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_S = 0$, $F_B\varepsilon k$ mit

$\vec{AF}_B \cdot \vec{u}_S = 0$, $F_C\varepsilon k$ mit $\vec{AF}_C \cdot \vec{u}_S = 0$

Bildpunkte A‘, B‘, C‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$, $\vec{OB'} = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}$,

$\vec{OC'} = \vec{OC} + 2 \cdot \vec{CF}$

<u>Gespiegelte Ebene</u>: E‘: $\vec{x} = \vec{OA'} + r\,\vec{A'B'} + s\,\vec{A'C'}$

oder:

<u>Gerade</u>: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

Punkt: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$

g || g_S

Spiegelgerade g_S: $\vec{x} = \vec{a}_S + t\,\vec{u}$

Fußpunkt: Fεk mit $\vec{AF} \cdot \vec{u} = 0$

Bildpunkt A‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$

<u>Gespiegelte Gerade</u>: g‘: $\vec{x} = \vec{OA'} + t\,\vec{u}$

<u>Ebene</u>: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Punkt: AεE (etwa als Spurpunkt)

Normalenvektor: $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$

E || g_S

Spiegelgerade g_S: $\vec{x} = \vec{a}_S + t\,\vec{u}_S$

Fußpunkt: Fεk mit $\vec{AF} \cdot \vec{u}_S = 0$

Bildpunkt A‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$

<u>Gespiegelte Ebene</u>: E‘: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{OA'}$

Punkt, Gerade, Ebene -> Spiegelgerade -> Bildpunkt, Bildgerade, Bildebene (Achsenspiegelung)

Punkt, Gerade, Ebene -> Spiegelebene -> Bildpunkt, Bildgerade, Bildebene (Ebenenspiegelung)

<u>Punkt</u> A

Spiegelebene

E_S: $\vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$

Fußpunkt $F \varepsilon E_S$ mit $\vec{AF} \parallel \vec{n}_S$

<u>Bildpunkt</u> A‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$

<u>Gerade</u>: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$,

B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{u}$

Spiegelebene E_S: $\vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$

Fußpunkte: $F_A \varepsilon E_S$ mit $\vec{AF}_A \parallel \vec{n}_S$,

$F_B \varepsilon E_S$ mit $\vec{AF}_B \parallel \vec{n}_S$

Bildpunkte A‘, B‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A$, $\vec{OB'} = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}_B$

<u>Gespiegelte Gerade</u>: g‘: $\vec{x} = \vec{OA'} + t\,\vec{A'B'}$

<u>Ebene</u>: E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{v} + s\,\vec{w}$

Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{v}$,

C mit $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{w}$

Spiegelebene E_S: $\vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$

Fußpunkte: $F_A \varepsilon E_S$ mit $\vec{AF}_A \parallel \vec{n}_S$, $F_B \varepsilon E_S$ mit

$\vec{AF}_B \parallel \vec{n}_S$, $F_C \varepsilon k$ mit $\vec{AF}_C \parallel \vec{n}_S$

Bildpunkte A‘, B‘, C‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$, $\vec{OB'} = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}$,

$\vec{OC'} = \vec{OC} + 2 \cdot \vec{CF}$

<u>Gespiegelte Ebene</u>: E‘: $\vec{x} = \vec{OA'} + r\,\vec{A'B'} + s\,\vec{A'C'}$

oder:

<u>Gerade</u>: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

Punkt: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$

g || E_S

Spiegelebene E_S: $\vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$

Fußpunkt: $F \varepsilon E_S$ mit $\vec{AF} \parallel \vec{n}_S$

Bildpunkt A‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$

<u>Gespiegelte Gerade</u>: g‘: $\vec{x} = \vec{OA'} + t\,\vec{u}$

<u>Ebene</u>: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Punkt: AεE (etwa als Spurpunkt)

Normalenvektor: $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$

E || E_S

Spiegelebene E_S: $\vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$

Fußpunkt: $F \varepsilon E_S$ mit $\vec{AF} \parallel \vec{n}_S$

Bildpunkt A‘:

$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$

<u>Gespiegelte Ebene</u>: E‘: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{OA'}$

Punkt, Gerade, Ebene -> Spiegelebene -> Bildpunkt, Bildgerade, Bildebene (Ebenenspiegelung)