**Michael Buhlmann**

# Erläuterungen

## Wirtschaftswissenschaften
### > Elastizitäten

---

In den Wirtschaftwissenschaften sind Elastizitäten als (Berechnungs-) Maßstab (Messziffern) für wirtschaftliche Veränderungen unverzichtbar. Das Nachstehende beschäftigt sich – beginnend mit der mathematischen Definition von Elastizität – insbesondere mit der ökonomischen Bedeutung von Elastizitäten als Preis-Nachfrage-Elastizitäten u.a. im Angebotsmonopol. Elastizitäten erscheinen somit als allgemeine Messgrößen, um Abhängigkeiten bei wirtschaftlichen Prozessen darzustellen.

# Elastizitäten

# I. Mathematische Definition

**I.1** Die Differentialrechnung innerhalb der mathematischen Analysis kreist um den Grenzwertbegriff der Ableitung einer differenzierbaren reellwertigen Funktion f: $D_f$ -> **R** der Form y = f(x) ($D_f$ als Definitionsbereich, **R** als Menge der reellen Zahlen). Die Ableitung als Steigung und momentane Änderungsrate der Funktion(skurve) an einer beliebigen Stelle $x \varepsilon D_f$ wird mit f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ bezeichnet. Die Ableitung als Differentialquotient lässt sich als Grenzwert von Differenzenquotienten, von durchschnittlichen Änderungsraten verstehen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x -> 0} \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

**I.2** Unter Elastizität wird der mit der Ableitung verbundene Ausdruck der Form

$$\boxed{\varepsilon_{y,x} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} = \frac{\frac{df(x)}{dx}}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} x}$$

verstanden. Elastizität als Punktelastizität gibt damit das (momentane) Verhältnis von relativen Änderungen der Variablen x und y = f(x) an, besonders wenn – ähnlich wie bei der eben erfolgten Einführung des Ableitungsbegriffs – die Elastizität durch Bogenelastizitäten vom Typ:

$$\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} \xrightarrow{\Delta x -> 0} \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} = \frac{\frac{df(x)}{dx}}{\frac{f(x)}{x}} = \varepsilon_{y,x}$$

angenähert wird.

**II.3** Der Elastizitätskoeffizient $\varepsilon_{y,x}$ genügt dann noch folgenden Eigenschaften:

- $\varepsilon_{y,x} = \frac{d\ln(y)}{d\ln(x)} = \frac{d\ln(f(x))}{d\ln(x)}$

  (wegen: $\varepsilon_{y,x} = \frac{d\ln(y)}{d\ln(x)} = \frac{\frac{d\ln(y)}{dx}}{\frac{d\ln(x)}{dx}} = \frac{\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}}$ unter Benutzung der Kettenregel für Ableitungen)

- $\varepsilon_{y,x} = \frac{1}{\varepsilon_{x,y}}$

(unter der Voraussetzung, dass zu f(x) auch die Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ existiert und wegen: $\varepsilon_{y,x} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{\frac{\frac{dx}{dy}}{\frac{x}{y}}} = \frac{1}{\varepsilon_{x,y}}$)

- $\varepsilon_{y+z,x} = \frac{y\varepsilon_{y,x} + z\varepsilon_{z,x}}{y+z}$

  (mit den Funktionen y = f(x), z = g(x) und auf Grund von: $\varepsilon_{y+z,x} = \frac{\frac{d(y+z)}{dx}}{\frac{y+z}{x}} = \frac{\frac{dy+dz}{dx}}{\frac{y+z}{x}} = \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}}{\frac{y+z}{x}} = \left(\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}\right) \cdot \frac{x}{y+z} = \left(y\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} + z\frac{dz}{dx} \cdot \frac{x}{z}\right) \cdot \frac{1}{y+z} = \frac{y\varepsilon_{y,x} + z\varepsilon_{z,x}}{y+z}$ unter Anwendung der Summenregel für Ableitungen)

- $\varepsilon_{yz,x} = \varepsilon_{y,x} + \varepsilon_{z,x}$

  (mit den Funktionen y = f(x), z = g(x) und auf Grund von: $\varepsilon_{yz,x} = \frac{\frac{d(yz)}{dx}}{\frac{yz}{x}} = \frac{\frac{dy}{dx}z + y\frac{dz}{dx}}{\frac{yz}{x}} = \left(\frac{dy}{dx}z + y\frac{dz}{dx}\right) \cdot \frac{x}{yz} = \frac{dy}{dx}z \cdot \frac{x}{yz} + y\frac{dz}{dx} \cdot \frac{x}{yz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \varepsilon_{y,x} + \varepsilon_{z,x}$ unter Anwendung der Produktregel für Ableitungen)

- $\varepsilon_{\frac{y}{z},x} = \varepsilon_{y,x} - \varepsilon_{z,x}$

  (mit den Funktionen y = f(x), z = g(x) und auf Grund von: $\varepsilon_{\frac{y}{z},x} = \frac{\frac{d(\frac{y}{z})}{dx}}{\frac{\frac{y}{z}}{x}} = \frac{\frac{dy}{dx}z - y\frac{dz}{dx}}{z^2 \cdot \frac{\frac{y}{z}}{x}} = \frac{\frac{dy}{dx}z - y\frac{dz}{dx}}{\frac{yz}{x}} = \left(\frac{dy}{dx}z - y\frac{dz}{dx}\right) \cdot \frac{x}{yz} = \frac{dy}{dx}z \cdot \frac{x}{yz} - y\frac{dz}{dx} \cdot \frac{x}{yz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \varepsilon_{y,x} - \varepsilon_{z,x}$ unter Anwendung der Quotientenregel für Ableitungen)

**I.4** Ist zudem mit $y = f(x_1, \ldots x_n)$ eine reellwertige Funktion mit den voneinander unabhängigen Variablen $x_1, \ldots x_n$, so lassen sich auf der Grundlage der partiellen Ableitungen

$f_{x_i}(x_1,...,x_n) = \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}$, i=1, …n, auch die partiellen Elastizitäten definieren als:

$$\varepsilon_{y,x_i} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x_i}}{\frac{y}{x_i}} = \frac{\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}}{\frac{f(x_1,...,x_n)}{x_i}} = \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(x_1,...,x_n)} = f_{x_i}(x_1,...,x_n) \cdot \frac{x_i}{f(x_1,...,x_n)},$$

i=1, …n

**I.5** Beispiele: a) Die Funktion y = f(x) = $x^2$ besitzt als Normalparabel für jedes reelle x wegen f'(x) = 2x dieselbe Elastizität: $\varepsilon_{y,x}$ = $2x \cdot \frac{x}{x^2}$ = 2. Ebenso isoelastisch ist die Hyperbelfunktion y = f(x) = $\frac{4}{x}$ mit Ableitung: f'(x) = $-\frac{4}{x^2}$ und Elastizität: $\varepsilon_{y,x}$ = $-\frac{4}{x^2} \cdot \frac{x}{\frac{4}{x}}$ = -1.

b) Die Exponenentialfunktion y = f(x) = $e^x$ ist mit Ableitung: f'(x) = $e^x$ nicht isoelastisch, da sich die Elastizität $\varepsilon_{y,x}$ errechnet als: $\varepsilon_{y,x}$ = $e^x \cdot \frac{x}{e^x}$ = x für jedes reelle x.

c) Eine Gerade y = mx + c mit reellen Konstanten m und c hat als Ableitung und Steigung: y' = m, so dass für die Elastizität $\varepsilon_{y,x}$ gilt: $\varepsilon_{y,x}$ = $m \cdot \frac{x}{mx+c} = \frac{mx}{mx+c}$. Für x = 0 ist die Elastizität: $\varepsilon_{y,x} = \varepsilon_{y,x}(0) = 0$ (bei c≠0), für x = -c/m: $\varepsilon_{y,x} = \varepsilon_{y,x}(-c/m) = \pm\infty$ (bei m≠0). Konstante Geraden y = c haben wegen y' = 0 auch die Elastizität $\varepsilon_{y,x}$ = 0. Ist c = 0, so liegt mit y = mx eine Ursprungsgerade vor, die die Elastizität $\varepsilon_{y,x}$ = 1 besitzt.

# II. Elastizitäten als Messgrößen in den Wirtschaftswissenschaften

**II.1** Im ökonomischen Zusammenhang sind Elastizitäten (dimensionslose) Messgrößen, die das Verhältnis einer relativen Änderung einer (abhängigen, beeinflussten) Größe zur relativen Änderung einer (unabhängigen, beeinflussenden) Ursachengröße beschreiben. Unterschieden werden die folgenden Typen von (betriebs-, volkswirtschaftlichen) Elastizitäten:

- Angebotselastizität als relative Änderung des Angebots einer Ware oder Dienstleistung auf Grund einer relativen Preisänderung
- Absatzelastizität als relative Änderung des Absatzes einer Ware oder Dienstleistung auf Grund einer relativen Preisänderung
- Nachfrageelastizität als relative Änderung der Nachfrage nach einem Gut auf Grund einer relativen Preisänderung (Preiselastizität), einer relativen Änderung eines Einkommens (Einkommenselastizität), einer relativen Preisänderung bei einem anderen Gut (Kreuzpreiselastizität)
- Außenhandelselastizität auf Grund von Währungsschwankungen
- Elastizität von Erwartungen bei zukünftigen wirtschaftlichen Entwicklungen auf Grund gegenwärtiger Preisänderungen betreffend u.a. Geldnachfrage, Investitionen, Beschäftigung
- Kostenelastizität in Produktionsprozessen auf Grund von Preisänderungen bei

Faktoreinsatzmengen u.a.
- Substitutionselastizität als relative Änderung des Kapitaleinsatzes in einem Produktionsprozess, wenn sich das Lohn-Anlagezinsverhältnis ändert.

Elastizitäten kommen also in der Volks- und Betriebswirtschaftslehre zum Einsatz, insbesondere aber um das Geschehen am Markt zwischen Anbietern und Nachfragen eines Gutes zu charakterisieren.

**II.2** Unter Bezugnahme auf die genannten ökonomischen Bereiche heißen Elastizitäten ε

- vollkommen unelastisch, wenn ε = 0
- unelastisch, wenn 0 < |ε| < 1
- proportional (einheits-) elastisch, wenn |ε| = 1
- elastisch, wenn |ε| > 1
- vollkommen elastisch, wenn |ε| = ∞ gilt.

Unelastisch bedeutet, dass relative Änderungen bei der abhängigen Größe hinter denen bei der verursachenden Größe bleiben, elastisch, dass relative Änderungen bei der abhängigen Größe stärker als bei der verursachenden Größe eintreten.

**II.3** An der Schnittstelle von Betriebs- und Volkwirtschaftslehre spielen Nachfrageelastizitäten eine wichtige Rolle. Zentral hierfür ist die Analyse der Preis-Absatz-Funktion eines Gutes am Markt. Die Preis-Absatz-Funktion ist von der Form p = p(x), wobei x die abzusetzende Menge Gutes, p der dazugehörige Preis ist. Da der Preis p die Ursache für die Absatzmenge des besagten Gutes ist, ist hier die Umkehrfunktion x = x(p) von Interesse. Die Nachfrageelastizität oder (direkte) Preiselastizität $\varepsilon_{x,p}$ im Wirkungsgefüge von Preis und Absatzmenge ist dann:

$$\varepsilon_{x,p} = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = \frac{dx(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} = x'(p) \cdot \frac{p}{x(p)}$$

mit p als unabhängiger und x als abhängiger Größe. Ist die Preis-Absatz-Funktion p = p(x) monoton fallend (und damit auch die Umkehrfunktion), so ist die Nachfrageelastizität $\varepsilon_{x,p}$ immer negativ. Dies ist der ökonomische Normalfall, wenn eine Preiserhöhung (Preisminderung) beim Gut eine Verminderung (Erhöhung) der Absatzmenge bewirkt. Beim umgekehrten Fall liegt ein sog. (inferiores) Giffen-Gut vor, d.h.: eine Preiserhöhung führt zu einer Erhöhung des Absatzes; hier ist Nachfrageelastizität $\varepsilon_{x,p}$ also positiv (Giffen-Effekt, Giffen-Paradoxon).
Es sei nun $\varepsilon_{x,p} < 0$. Eine (etwa lineare) Preis-Absatz-Funktion p(x) verfügt dann über einen elastischen und unelastischen Teil der Nachfrage nach einem Gut; die beiden Teile werden auf der Nachfragekurve durch einen Punkt mit proportional elastischer Elastizität getrennt. Im Einzelnen gilt (unter den Voraussetzungen des vollkommenen Marktes) für den Anbieter des Gutes:

| Elastizität<br>Preisänderung | $\varepsilon_{x,p} = -\infty$ | $-\infty < \varepsilon_{x,p} < -1$ | $\varepsilon_{x,p} = -1$ | $-1 < \varepsilon_{x,p} < 0$ | $\varepsilon_{x,p} = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | vollkommen elastisch: massive Änderung der Nachfrage bei kleinster Preisänderung | elastisch: überproportionale Änderung der Nachfrage bei Preisänderung | proportional elastisch: proportionale Änderung der Nachfrage bei Preisänderung | unelastisch: unterproportionale Änderung der Nachfrage bei Preisänderung | vollkommen unelastisch: keine Änderung der Nachfrage bei Preisänderung |
| Preiserhöhung | sinkender Erlös | | konstanter Erlös | steigender Erlös | |
| Preissenkung | steigender Erlös | | konstanter Erlös | sinkender Erlös | |

Erlös (Umsatz) ist dabei das Produkt von Menge und Preis: E(x) = xp(x). Die Änderung des Erlöses hat dann bei gleicher Kostenstruktur (Kostenkurve K(x)) auch Auswirkungen auf den Gewinn (Gewinnkurve G(x) = E(x) – K(x)).

**II.4** Beispiele: a) Bei der Senkung des Preises eines Gutes von 10,- auf 8,- GE (Geldeinheiten) wächst die abgesetzte Menge für das Gut von 200 auf 280 ME (Mengeneinheiten). Die Bogenelastizität $\varepsilon_{x,p}$ berechnet sich als:

$$\varepsilon_{x,p} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{p}{\Delta p} = \frac{280-200}{200} \cdot \frac{10}{8-10} = \frac{2}{5} \cdot (-5) = -2 \,.$$

Die Nachfrage reagiert also elastisch, was für das das Gut produzierende Unternehmen eine Steigerung des Umsatzes bedeutet. In der Tat steigt der Umsatzerlös von $E_1$ = 200·10 = 2000 GE auf $E_2$ = 280·8 = 2240 GE.

b) Gegeben ist die lineare Preis-Absatz-Funktion p = p(x) = 20–4x. Die Umkehrfunktion x(p) lautet:

p = 20–4x ⇔ p–20 = -4x ⇔ x(p) = 5–0,25p = x.

Mit x(p) = 5–0,25p ergeben sich als Elastizitäten $\varepsilon_{x,p}$ wegen x'(p) = -0,25:

$$\varepsilon_{x,p} = x'(p) \cdot \frac{p}{x(p)} = -0{,}25 \cdot \frac{p}{5-0{,}25p} = \frac{-0{,}25p}{5-0{,}25p} = \frac{0{,}25p}{0{,}25p-5} = \frac{p}{p-20} \,.$$

Der Term $\varepsilon_{x,p} = \frac{p}{p-20}$, 0≤p≤20, kann nun hinsichtlich der Grenzfälle der Elastizität der Preis-Absatz-Funktion ausgewertet werden. Es gilt:

p=0 => $\varepsilon_{x,p}$ = 0 => Nachfrage ist vollkommen unelastisch

p=20 => $\varepsilon_{x,p}$ = -∞ => Nachfrage ist vollkommen elastisch

$\varepsilon_{x,p}$ = -1: $\frac{p}{p-20} = -1$ ⇔ p = -(p–20) ⇔ p = -p+20 ⇔ 2p = 20 ⇔ p = 10, was eine proportional elastische Nachfrage bedeutet.

**II.5** Die Betrachtung von Erlös E(x) = xp(x) und Elastizität bei der Preis-Absatz-Funktion p(x) führt schließlich noch auf die Robinson-Amoroso-Formel. Wird E(x) nämlich nach der Produktregel abgeleitet, so gilt:

E'(x) = 1·p(x) + x·p'(x)

mit:

$$E'(x) = p + x \cdot \frac{dp}{dx} = p + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{xp}{p} = p\left(1 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{x}{p}\right) = p\left(1 + \frac{dp}{p} \cdot \frac{x}{dx}\right) = p\left(1 + \frac{1}{\frac{p}{dp} \cdot \frac{dx}{x}}\right) = p\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{x,p}}\right).$$

Es ergibt sich damit die Robinson-Amoroso-Formel:

$$E'(x) = p\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{x,p}}\right)$$

mit ihrem Zusammenhang zwischen dem Erlös (Umsatz) eines ein Gut produzierenden Unternehmens und der Nachfrageelastizität des Gutes. Insbesondere ist im Erlösmaximum mit: $E'(x_e) = 0$ die Nachfrageelastizität $\varepsilon_{x,p} = -1$, die Nachfrage also proportional elastisch. Besitzt die Nachfragefunktion x(p) elastische (unelastische) Bereiche, so stehen sich dort Preis- und Umsatzänderung entgegengesetzt (gleichgerichtet) gegenüber.

**II.6** Zu betrachten ist noch die Kreuzpreiselastizität, d.h. die Fragestellung, in welchem Ausmaß die Preisänderung bei einem Gut A Auswirkungen auf die Nachfrage nach einem anderen Gut B hat. Die Kreuzpreiselastizität $\varepsilon_{xB,pA}$ hat das Aussehen:

$$\varepsilon_{xB,pA} = \frac{\frac{dx_B}{dp_A}}{\frac{x_B}{p_A}} = \frac{dx_B(p_A)}{dp_A} \cdot \frac{p_A}{x_B(p_A)} = x_B'(p_A) \cdot \frac{p_A}{x_B(p_A)}$$

mit $x_B$ als Absatzmenge des Gutes B und $p_A$ als Preis des Gutes A. Führt eine Erhöhung (Senkung) des Preises für Gut A zu einer Erhöhung (Verminderung) der Nachfrage nach Gut B, so ist: $\varepsilon_{xB,pA} > 0$; in dem Fall sind A und B Substitutionsgüter, d.h. Gut B ersetzt Gut A (und umgekehrt). Führt eine Erhöhung (Senkung) des Preises für Gut A zu einer Verminderung (Erhöhung) der Nachfrage nach Gut B, so ist: $\varepsilon_{xB,pA} < 0$; in dem Fall sind A und B Komplementärgüter, d.h. die Güter A und B ergänzen sich.

**II.7** Die Kreuzpreiselastizität gibt Anlass zur Betrachtung der Triffinschen (Elastizitäts-) Koeffizienten T, die ein Maß für die Konkurrenzbeziehung zwischen zwei Gütern A und B darstellen. Es gilt (wie bei der Kreuzpreiselastizität):

$$T = \frac{\frac{dx_B}{dp_A}}{\frac{x_B}{p_A}} = \frac{dx_B(p_A)}{dp_A} \cdot \frac{p_A}{x_B(p_A)} = x_B'(p_A) \cdot \frac{p_A}{x_B(p_A)}$$

mit den Konkurrenzbeziehungen:

- $T \leq 0$: keine gegenseitige Konkurrenzbeziehung
- $0 < T < \infty$: heterogene Konkurrenz
- $T = \infty$: homogene Konkurrenz.

**II.8** Beispiele: a) In einer kleinen Volkswirtschaft führt eine Preiserhöhung bei Nudeln (Gut A) um 10 % zu einer um 5 % höheren Nachfrage bei Reis (Gut B). Vor der Preiserhöhung wurden von den Nudeln 10000 ME (Mengeneinheiten), vom Reis 5000 ME abgesetzt. Die (ungefähre) Kreuzpreiselastizität berechnet sich mit $\Delta x_B = 0{,}05 \cdot 5000 = 250$ ME, $\Delta p_A = 0{,}1 p_A$ (mit $p_A$ als Preis vor der Preiserhöhung) als Bogenelastizität:

$$\varepsilon_{xB,pA} = \frac{\Delta x_B}{x_B} \cdot \frac{p_A}{\Delta p_A} = \frac{250}{5000} \cdot \frac{1}{0{,}1} = 0{,}5 .$$

Mit Nudeln und Reis liegen Substitutionsgüter vor.

b) Computerchips und -prozessoren sind wichtige Bestandteile von Elektronik aller Art. Die Preise für Chips und Prozessoren (Gut A) verteuern sich um 20 %, was auch zu einer Verteuerung von Smartphones (Gut B) führt. Der Absatz dieser Geräte in einer Region geht folglich zurück, und zwar von 4000 auf 3600 Stück pro Monat. Hier ist die Kreuzpreiselastizität mit $\Delta p_A = 0{,}2 p_A$ (mit $p_A$ als Preis vor der Preiserhöhung) als Bogenelastizität:

$$\varepsilon_{xB,pA} = \frac{\Delta x_B}{x_B} \cdot \frac{p_A}{\Delta p_A} = \frac{3600-4000}{4000} \cdot \frac{1}{0{,}2} = \frac{-400}{4000} \cdot 5 = -0{,}1 \cdot 5 = -0{,}5 .$$

Gut A (Chips, Prozessoren) und Gut B (Smartphones) sind Komplementärgüter.

c) Keine Konkurrenzbeziehung zwischen zwei Gütern A und B besteht, wenn Kreuzpreiselastizität (Triffinscher Koeffezient T =) $\varepsilon_{xB,pA} = 0$ ist. Preisänderungen beim Gut A verursachen keine Absatzänderungen beim Gut B.

# III. Elastizitäten beim Angebotsmonopol

**III.1** Beim Markt treffen Angebot (der Unternehmungen) und Nachfrage (der Haushalte) aufeinander. Menge und Preis eines Produktes bestimmen die Nachfragefunktion (Absatzkurve), die Anzahl der Anbieter und Nachfrager die Marktform. Als (eher theoretische) Marktform gilt das Angebotsmonopol (als Monopol auf der Anbieter-, Polypol auf der Nachfragerseite). Das Angebotsmonopol ist rechnerisch relativ einfach erschließbar, da der monopolistische Anbieter Preispolitik betreibt.

**III.2** Gesamtkosten: Ein Unternehmen produziert ein Produkt mit einer Ausbringungsmenge x pro Zeiteinheit. Dabei entstehen fixe Gesamtkosten $K_{fix}$ und variable Stückkosten $k_{var}$. Als Gesamtkosten $K = K_{ges}$ ergeben sich für eine Ausbringungsmenge x:

$$K(x) = K_{ges}(x) = K_{fix} + K_{var}(x) = K_{fix} + x \cdot k_{var}(x)$$

Variable Gesamtkosten $K_{var}$ sind dabei: $K_{var}(x) = x \cdot k_{var}(x)$.

**III.3** Als Stückkosten (= Kosten pro produziertes Stück) ergeben sich die fixen Stückkosten $k_{fix}$, die variablen Stückkosten $k_{var}$ und die Gesamtstückkosten $k_{ges}$ als:

$$k_{fix} = \frac{K_{fix}}{x}$$

$$k_{\text{var}} = \frac{K_{\text{var}}}{x}$$

$$k_{ges} = k_{fix} + k_{\text{var}} = \frac{K_{fix}}{x} + \frac{K_{\text{var}}}{x} = \frac{K_{ges}}{x}$$

Bei konstanten variablen Stückkosten $k_{var}$ ist die Gesamtkostenfunktion $K_{ges}(x) = K_{ges}(x) = K_{fix} + x \cdot k_{var}(x)$ eine Gerade mit y-Achsenabschnitt $K_{fix}$ und Steigung $k_{var}$. Die Gesamtstückkostenkurve $k_{ges} = k_{ges}(x) = \frac{K_{fix}}{x} + k_{\text{var}}$ ist eine hyperbelähnliche Funktion, die für wachsende Ausbringungsmengen x sich der Kurve der variablen Stückkosten $k_{var}$ annähert. Die Grenzkosten $K' = K'_{ges}$ sind dann die Ableitung der Gesamtkosten $K = K_{ges}$.

**III.4** Die Kostenelastizität als relative Veränderung der Kosten K bei relativer Veränderung der produzierten Menge x definiert sich wie folgt:

$$\varepsilon_{K,x} = \frac{\frac{dK}{K}}{\frac{dx}{x}} = \frac{dK(x)}{dx} \cdot \frac{x}{K(x)} = K'(x) \cdot \frac{x}{K(x)}$$

und rundet damit die Analyse der (mikroökonomischen) Kostenfunktion in einem Güter produzierenden Unternehmen ab.

**III.5** Erlöse: Ein Unternehmen als Monopolist im Angebotsmonopol beeinflusst über den von ihm gesetzten Angebotspreis p den Markt. Dies setzt die Existenz einer (linearen) Preis-Absatz-Funktion p(x) = a–bx (a, b>0) voraus, die für Ausbringungsmengen x des Intervalls [0; a/b] definiert ist (p(0)=a, p(a/b)=0). Erlös (Umsatz) als Preis mal Ausbringungsmenge ergibt die monopolistische Erlösfunktion E(x) = p(x)·x und damit:

$$E(x) = (a-bx)x = ax-bx^2$$

Der Erlös des Monopolisten ist Null, wenn x=0 oder x=a/b ist, er ist positiv für 0 < x < a/b, er ist maximal, wenn der Grenzerlös E'(x) mit:

$$E'(x) = a-2bx$$

Null ist, d.h. wenn gilt: a–2bx = 0 ⇔ $x_e = \frac{a}{2b}$. Stückerlös $e(x) = \frac{E(x)}{x} = \frac{(a-bx)x}{x} = a-bx$ und Grenzerlös E'(x) sind verschieden.

**III.6** Die (lineare, monoton fallende) Preis-Absatz-Funktion p(x) = a–bx (a, b>0; 0≤x≤a/b) besitzt die Umkehrfunktion $x(p) = \frac{a-p}{b} = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}p$, 0≤p≤a. Letztere besitzt mit: $x'(p) = -\frac{1}{b}$ die Nachfrageelastizität $\varepsilon_{x,p}$:

$$\varepsilon_{x,p} = x'(p)\cdot\frac{p}{x(p)} = -\frac{1}{b}\cdot\frac{p}{\frac{a-p}{b}} = -\frac{p}{a-p} = \frac{p}{p-a}$$

Die Nachfrageelastizität ist $\varepsilon_{x,p}$ = -1, wenn nach der Robinson-Amoroso-Formel die Ableitung des Erlöses 0 wird. Dies ist – wie erwähnt – bei $x_e = \frac{a}{2b}$ der Fall, so dass für $x < x_e$ ein Bereich mit elastischer, für $x > x_e$ ein Bereich mit unelastischer Nachfrage vorliegt.

**III.7** Gewinn: Stellt man nun die Kostenfunktion der Gesamtkosten $K_{ges}$ und die Funktion des Erlöses E gegenüber, so ergibt sich für jede Ausbringungsmenge x eine besondere Höhe der Kosten $K(x) = K_{ges}(x)$ und des Erlöses E(x). Der Gewinn G ist dann die Differenz von Erlös und Kosten:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

und als Gewinn für positive Werte, als Verlust für negative interpretierbar.

**III.8** Nutzenschwelle, Nutzengrenze, Gewinnzone: Die Ausbringungsmenge $x_s$ mit $G(x_s)$ = 0, also Gewinn = 0, heißt Nutzenschwelle. Für die Nutzenschwelle $x_s$ gilt:

$$E(x_s) = K(x_s)$$

Bei der Nutzenschwelle (break even point) wird damit die Gewinnzone des Unternehmens erreicht. Eine eventuell existierende zweite Stelle $x_G$ mit $G(x_G)$ = 0 und $x_s < x_g$ heißt Gewinngrenze mit:

$$E(x_g) = K(x_g)$$

Im Koordinatensystem von Ausbringungsmenge x und Erlös bzw. Kosten werden Nutzenschwelle $x_s$ und Nutzengrenze $x_g$ also durch den Schnittpunkt von Erlösgeraden und Kostenfunktion repräsentiert, die Gewinnzone, dargestellt durch die Ausbringungsmengen x mit G(x) > 0, ist damit zu umschreiben mit: $x_s < x < x_g$.

**III.9** Gewinnmaximum: Im Gewinnmaximum liegen Erlöskurve und Kostenkurve parallel zueinander, ihre Steigungen sind gleich, Grenzerlös und Grenzkosten stimmen überein. Indem man die Ableitung G'(x) = 0 setzt, gilt damit für die gewinnmaximale Ausbringungsmenge $x_m$:

$$E'(x_m) = K'(x_m)$$

auch auf Grund von $G''(x_m) < 0$. Da die Kostenfunktion K(x) logischerweise monoton steigend ist, muss das Gewinnmaximum dort liegen, wo auch die Erlöskurve monoton steigend, d.h.: die gewinnmaximale Ausbringungsmenge $x_m$ ist immer kleiner als die erlösmaximale $x_e$, also: $x_m < x_e$.

**III.10** Cournotscher Punkt: Zur gewinnmaximalen Ausbringungsmenge $x_m$ gehört der gewinnmaximale (optimale) Angebotspreis als Marktpreis. Er errechnet sich durch Einsetzen der optimalen Menge in die Preis-Absatz-Funktion p(x) = a–bx als:

$$p_m = a–bx_m$$

Der im entsprechenden Koordinatensystem sich befindende Punkt $C(x_m|p_m)$ heißt Cournotscher Punkt. Er liegt in dem Teil der Preis-Absatz-Funktion, wo die Nachfrage nach dem Gut sich elastisch verhält.

**III.11** Die Gewinnelastizität definiert sich:

$$\varepsilon_{G,x} = \frac{\frac{dG}{G}}{\frac{dx}{x}} = \frac{dG(x)}{dx} \cdot \frac{x}{G(x)} = G'(x) \cdot \frac{x}{G(x)}$$

und stellt eine Beziehung zwischen Gewinn G(x) = E(x) – K(x) und ausgebrachter Menge x her. Im Gewinnmaximum $x_m$ gilt ja: $G'(x_m) = 0$, wodurch dort auch $\varepsilon_{G,x} = 0$ ist. Der Gewinn eines Monopolisten verhält sich also im Gewinnmaximum vollkommen unelastisch. Weiter ist an den Enden der Gewinnzone, der Nutzenschwelle $x_s$ und Nutzengrenze $x_g$, die Gewinnelastizität vollkommen elastisch mit: $|\varepsilon_{G,x}| = \infty$, da $G(x_s) = G(x_g) = 0$ gilt.

**III.12** Beispiel: Ein Unternehmen ist ein Monopolist am Markt und unterliegt für sein Produkt der Preis-Absatz-Funktion p(x) = 40–0,5x (Ausbringungsmenge x in ME, Mengeneinheiten; Preis p in GE, Geldeinheiten). Weiter wird die Produktion des Unternehmens bestimmt durch die Gesamtkosten

$$K(x) = 0{,}01x^3–0{,}2x^2+1{,}8x+180 \text{ (GE).}$$

I. Die Erlösfunktion ist vom Typ ist vom Typ

$E(x) = p(x)\cdot x = (40–0{,}5x)x = 40x–0{,}5x^2$

und hat – resultierend aus der Preis-Absatz-Funktion p(x) = 40–0,5x – die Form einer nach unten geöffneten Parabel mit Nullstellen x = 0 und x = 80 (E(x) = 0). Wirtschaftliches Handeln des Monopolisten spielt sich folglich für Ausbringungsmengen x aus dem Intervall [0; 80] ab. Hinsichtlich des Erlösmaximums bestimmen wir den existierenden Hochpunkt der Erlösfunktion vermöge 1. und 2. Ableitung der Funktion:

$E(x) = 40x–0{,}5x^2$
$E'(x) = 40–x$
$E''(x) = -1.$

Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 40–x = 0 \Leftrightarrow 40 = x,$

so dass wegen E''(40) = -1 < 0 bei x = 40 ME in der Tat das Erlösmaximum vorliegt. Der Angebotspreis im Erlösmaximum beträgt vermöge der Preis-Absatz-Funktion
$p(x) = 40–0,5x$:

$p(40) = 40–0,5\cdot 40 = 40–20 = 20$ GE.

Der Erlös im Erlösmaximum beträgt: E(40) = 800 GE, der Gewinn liegt bei: G(40) = E(40)–K(40) = 800 – 572 = 228 GE.

II. Zielführender für ein Unternehmen als Monopolist am Markt ist natürlich die Bestimmung von Gewinnzone, gewinnmaximaler Ausbringungsmenge, maximalem Gewinn und Angebotspreis im Gewinnmaximum. Es ist mithin die Gewinnfunktion

$G(x) = E(x)–K(x) = (40x–0,5x^2) – (0,01x^3–0,2x^2+1,8x+180) = -0,01x^3–0,3x^2+38,2x–180$

zu betrachten. Hinsichtlich der Gewinnzone gilt: G(x) = 0 (⇔ E(x) = K(x)), also:

$G(x) = 0 \Leftrightarrow -0,01x^3–0,3x^2+38,2x–180 = 0 \Leftrightarrow x = 4,95,\ x = 45,45$,

so dass die Gewinnzone des Monopolisten im Intervall [4,95; 45,45] der Ausbringungsmengen x liegt. Die gewinnmaximale Ausbringungsmenge ergibt sich mit der 1. und 2. Ableitung der Gewinnfunktion:

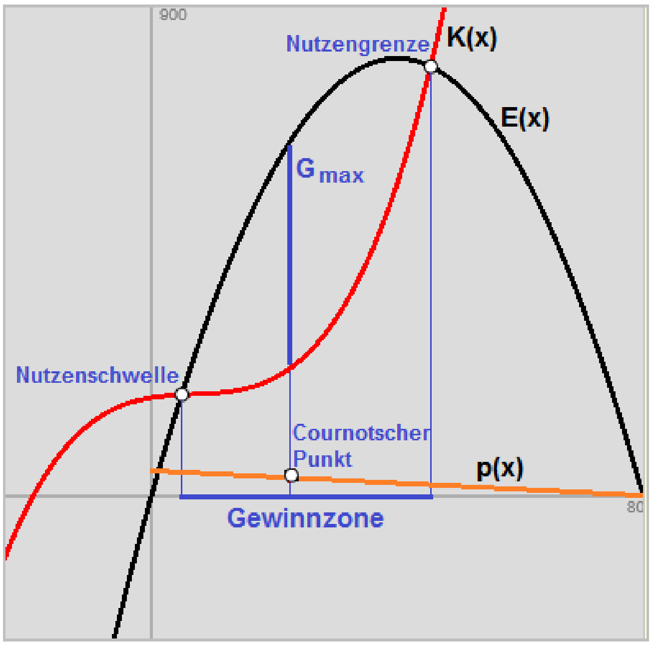
$G(x) = -0,01x^3–0,3x^2+38,2x–180$
$G'(x) = -0,03x^2–0,6x+38,2$
$G''(x) = -0,06x–0,6$

durch Nullsetzen von G'(x):

$G'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,03x^2–0,6x+38,2 = 0 \Leftrightarrow x=27,06$

bei x = 27,06 ME, wobei G''(27,06) < 0 gilt. Das Gewinnmaximum ist G(27,06) = 435,87 GE groß. Im Gewinnmaximum fallen Erlöse in Höhe von E(27,06) = 716,28 GE, Kosten in Höhe von K(27,06) = 280,41 GE an.

III. Es bleibt noch, den Angebotspreis des Monopolisten zu bestimmen. Einsetzen der gewinnmaximalen Ausbringungsmenge x = 27,06 ME in die Preis-Absatz-Funktion p(x) ergibt: p(27,06) = 26,47 GE als Angebots- und Marktpreis. Im entsprechenden x-p(x)-Koordinatensystem heißt der somit erhaltene Punkt C(27,06|26,47) auf der Preis-Absatz-Funktion auch Cournotscher Punkt.




**Monopol: Kosten-, Erlösfunktion, Gewinnzone, Gewinnmaximum, Cournotscher Punkt**

IV. Wir werten noch die Preis-Absatz-Funktion p(x) = 40–0,5x aus und erhalten deren Umkehrfunktion x(p) = 80–2p aus:

p = 40–0,5x ⇔ p–40 = -0,5x ⇔ -2p+80 = x ⇔ x(p) = x = 80–2p.

Die <u>Preiselastizität</u> ist dann mit x'(p) = -2:

$$\varepsilon_{x,p} = x'(p) \cdot \frac{p}{x(p)} = -2 \cdot \frac{p}{80-2p} = \frac{-2p}{80-2p} = \frac{2p}{2p-80} = \frac{p}{p-40}.$$

Im Erlösmaximum, also bei $x_e$ = 40, ist – wie schon oben errechnet – der Angebotspreis des Monopolisten p(40) = 20 GE. Die Preiselastizität ist damit: $\varepsilon_{x,p} = \frac{20}{20-40} = \frac{20}{-20}$ = -1.

Der Cournotsche Punkt der gewinnmaximalen Menge $x_m$ = 27,06 liegt im elastischen Teil der Preis-Absatz-Funktion; hier gilt mit $p_m$ = 26,47 GE: $\varepsilon_{x,p} = \frac{26{,}47}{26{,}47-40}$ = -1.96 < -1. Bei p = 0 ist darüber hinaus: $\varepsilon_{x,p}$ = 0 (vollkommene Unelastizität), bei p = 40: $\varepsilon_{x,p}$ = -∞ (vollkommene Elastizität).

V. Die <u>Gewinnelastizität</u> stellt sich mit der Gewinnfunktion G(x) = -0,01$x^3$–0,3$x^2$+38,2x–180 und deren Ableitung G'(x) = -0,03$x^2$–0,6x+38,2:

$$\varepsilon_{G,x} = G'(x) \cdot \frac{x}{G(x)} = \frac{(-0{,}03x^2 - 0{,}6x + 38{,}2)x}{-0{,}01x^3 - 0{,}3x^2 + 38{,}2x - 180} = \frac{-0{,}03x^3 - 0{,}6x^2 + 38{,}2x}{-0{,}01x^3 - 0{,}3x^2 + 38{,}2x - 180}.$$

Im Gewinnmaximum, also bei $x_m$ = 27,06, ist G'($x_m$) = 0 und damit $\varepsilon_{G,x}$ = 0. Bei Nutzenschwelle $x_s$ = 4,95 und Nutzengrenze $x_g$ = 45,45 ist: $|\varepsilon_{G,x}| = \infty$. Bei x = 20, also „vor" der gewinnmaximalen Menge, gilt:

$$\varepsilon_{G,x} = \frac{-0{,}03 \cdot 20^3 - 0{,}6 \cdot 20^2 + 38{,}2 \cdot 20}{-0{,}01 \cdot 20^3 - 0{,}3 \cdot 20^2 + 38{,}2 \cdot 20 - 180} = 0{,}74,$$

bei x = 30 „nach" der gewinnmaximalen Menge:

$$\varepsilon_{G,x} = \frac{-0{,}03 \cdot 30^3 - 0{,}6 \cdot 30^2 + 38{,}2 \cdot 30}{-0{,}01 \cdot 30^3 - 0{,}3 \cdot 30^2 + 38{,}2 \cdot 30 - 180} = -0{,}48.$$

# Literatur


Gablers Wirtschaftslexikon, 6 Bde., Wiesbaden [11]1984

MEFFERT, H., Marketing. Grundlagen der Absatzpolitik, Wiesbaden [7]1986, Ndr 1991, Marketing. Grundlagen marktorientierter Unternehmensführung. Konzepte – Instrumente – Praxisbeispiele, Wiesbaden [9]2000

ÖLSCHLÄGER, C., Grundlagen der Mikroökonomik, München [2]1975

WÖHE, GÜNTER, Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, München [11]1975, [15]1984, [19]1996

WOLL, ARTUR, Allgemeine Volkswirtschaftslehre, München [7]1981


www.michael-buhlmann.de / Essen 2019